第 15 卷 第 1 期
1993 年 1 月

电子科学学刊
JOURNAL OF ELECTRONICS

Vol. 15, No. 1
Jan., 1993

用于方向估计的虚拟均匀线阵的设计

路　鸣
（东南大学无线电工程系，南京 210018）

摘要　在不规则阵列场合，通过内插运算构造虚拟阵列可以解决高分辨方向估计中的一些问题．本文研究了虚拟均匀线阵的设计问题，给出了确定虚拟阵元个数、阵元间隔的方法，并对内插矩阵的计算进行了讨论．

关键词　阵列信号处理；天线阵列；内插；方向估计

一、引　言

近十几年来，高分辨技术的研究成为阵列信号处理领域的一个重要方向[1-6]．许多算法与阵列结构有关．对一些规则阵列，如均匀线阵，存在着计算效率高且性能较好的算法，如 root-MUSIC[7] 和 ESPRIT[8] 等．考虑到各种实际因素，阵列几何结构有可能是不规则的，此时高分辨算法的效率和性能会受到影响．这个问题可以通过内插构造虚拟阵列加以解决[4-6]．关于如何安排虚拟阵列，目前仅依靠经验[5]．本文提出了构造虚拟均匀线阵的一般方法，并讨论了内插矩阵的计算问题．

二、问 题 描 述

考虑在 x-y 平面上，位置坐标分别为 (x_n, y_n)，$1 \leqslant n \leqslant N$ 的N个各向同性阵元组成的二维阵列．定义N维方向矢量为

$$\boldsymbol{a}(\theta) = (1/\sqrt{N})\{\exp[j(2\pi/\lambda)(x_1\sin\theta + y_1\cos\theta)], \exp[j(2\pi/\lambda)(x_2\sin\theta + y_2\cos\theta)], \cdots, \exp[j(2\pi/\lambda)(x_N\sin\theta + y_N\cos\theta)\}^T \tag{1}$$

其中 λ 为信号波长，θ 为信号入射方向与 y 轴的夹角．假设有一个由 $K(K \leqslant N)$ 个阵元组成的均匀线阵，如果 $\boldsymbol{r}_k$ 表示由坐标原点指向第 k 个阵元的矢量，则这个均匀线阵的方向矢量为

$$\boldsymbol{b}(\theta) = (1/\sqrt{K})\{\exp[j(2\pi/\lambda)\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{u}(\theta)], \exp[j(2\pi/\lambda)\boldsymbol{r}_2\cdot\boldsymbol{u}(\theta)], \cdots, \exp[j(2\pi/\lambda)\boldsymbol{r}_K\cdot\boldsymbol{u}(\theta)]\}^T \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{u}(\theta)$ 表示指向方向 θ 的单位矢量．显然应有

1991.09.27 收到，1992.07.27 定稿．

路　鸣　男，1963 年出生，博士后，现从事数字信号处理、阵列信号处理、神经网络及其在雷达、声纳系统中的应用等方面的研究．

$$\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_{k-1} = \boldsymbol{d}, \quad k = 2, 3, \cdots, K \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{d}$ 为与该均匀线阵基线平行、长度等于阵元间隔的矢量．我们希望根据前面的二维阵列综合出后面的均匀线阵，换言之，由真实阵列综合一个“虚拟”的均匀线阵．

令 $\boldsymbol{W}$ 表示$N\times K$阶矩阵，Θ为感兴趣的空域扇区，则阵列综合或内插可用下列方程表述

$$\boldsymbol{b}(\theta) = \boldsymbol{W}^H \boldsymbol{a}(\theta), \quad \theta \in \Theta \tag{4}$$

式中上标“H”表示复共轭转置．如果让真实阵列接收数据通过内插矩阵 $\boldsymbol{W}$，则输出可视为上述虚拟均匀线阵的“观察数据”．

下面讨论的问题是：（1）如何安置虚拟均匀线阵；（2）如何选择合理的内插扇区Θ和虚拟阵元个数K；（3）如何计算内插矩阵 $\boldsymbol{W}$．

三、虚拟均匀线阵的设计

实际中，一般无法找到能够在扇区Θ上处处满足(4)式的矩阵$\boldsymbol{W}$．不过，可以寻找这样一个矩阵 $\boldsymbol{W}$，使得“响应” $\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{a}(\theta)$ 在Θ上最逼近“期望”响应 $\boldsymbol{b}(\theta)$．定义内插误差如下

$$\overline{e^2} \triangleq \int_\Theta \|\boldsymbol{b}(\theta) - \boldsymbol{W}^H\boldsymbol{a}(\theta)\|_2^2 d\theta = \mathrm{Tr}\{\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{R}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}^H\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^H\boldsymbol{W} + \boldsymbol{Q}\} \tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{R} = \int_\Theta \boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^H(\theta)d\theta$$

$$\boldsymbol{Q} = \int_\Theta \boldsymbol{b}(\theta)\boldsymbol{b}^H(\theta)d\theta$$

$$\boldsymbol{P} = \int_\Theta \boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{b}^H(\theta)d\theta$$

并且 $\mathrm{Tr}\{\cdot\}$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别为矩阵的迹和矢量的 Euclid 范数．现在，我们对使均方误差 $\overline{e^2}$ 最小的内插矩阵感兴趣，它是下述最小化问题的解

$$\min_{\boldsymbol{W}} T_r\{\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{R}\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}^H\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}^H\boldsymbol{W} + \boldsymbol{Q}\} \tag{6}$$

问题的解为

$$\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{R}^\# \boldsymbol{P} \tag{7}$$

式中“#”表示矩阵伪逆．相应地，最小均方误差为

$$\overline{e^2_{\min}} = \mathrm{Tr}\{\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{R}^\#\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^H\} \tag{8}$$

注意到

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^H = \int_\Theta\int_\Theta \boldsymbol{a}(\theta_1)\boldsymbol{b}^H(\theta_1)\cdot\boldsymbol{b}(\theta_2)\boldsymbol{a}^H(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2 \tag{9}$$

如果虚拟均匀线阵满足下列关系

$$\boldsymbol{b}^H(\theta_1)\boldsymbol{b}(\theta_2) = \boldsymbol{a}^H(\theta_1)\boldsymbol{a}(\theta_2), \quad \theta_1, \theta_2 \in \Theta \tag{10}$$

则有

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^H = \int_\Theta\int_\Theta \boldsymbol{a}(\theta_1)\boldsymbol{a}^H(\theta_1)\boldsymbol{a}(\theta_2)\boldsymbol{a}^H(\theta_2)d\theta_1 d\theta_2$$

$$= \left[\int_{\Theta} \boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^{H}(\theta)d\theta\right]^{2} = \boldsymbol{R}^{2}. \tag{11}$$

因为 $\mathrm{Tr}\{\boldsymbol{R}\} = \mathrm{Tr}\{\boldsymbol{Q}\}$($\boldsymbol{a}(\theta)$ 和 $\boldsymbol{b}(\theta)$ 是归一化的)，由(11)和(8)式容易推知 $\overline{e^{2}_{\min}} = 0$。方程(10)是一个理想的关系式，将在构造虚拟均匀线阵时起重要作用。注意：当 $K<N$ 且矩阵 $\boldsymbol{R}$ 满秩时，等式(11)式是矛盾的。然而，如果矩阵 $\boldsymbol{R}$ 仅有 K 个显著特征值而其余特征值小得可以忽略不计，则内插误差将会很小。这个推论可以做为选择合适的空域扇区 Θ 的依据。

根据(10)式，我们可以这样安排虚拟均匀线阵，使得在 Θ 上 $\boldsymbol{b}^{H}(\theta_1)\boldsymbol{b}(\theta_2)$ 尽量逼近 $\boldsymbol{a}^{H}(\theta_1)\boldsymbol{a}(\theta_2)$。由(2)和(3)式可得

$$\boldsymbol{b}^{H}(\theta_1)\boldsymbol{b}(\theta_2) = \frac{\sin\left(\frac{K\pi}{\lambda}\boldsymbol{d}\cdot[\boldsymbol{u}(\theta_1)-\boldsymbol{u}(\theta_2)]\right)}{K\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\boldsymbol{d}\cdot[\boldsymbol{u}(\theta_1)-\boldsymbol{u}(\theta_2)]\right)}\exp\left\{-j\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{r}_c\cdot[\boldsymbol{u}(\theta_1)-\boldsymbol{u}(\theta_2)]\right\} \tag{12}$$

式中

$$\boldsymbol{r}_c = (K-1)\boldsymbol{d}/2 + \boldsymbol{r}_1 \tag{13}$$

为由坐标原点到虚拟均匀线阵几何中心的矢量。令

$$\boldsymbol{a}^{H}(\theta_1)\boldsymbol{a}(\theta_2) = \rho(\theta_1,\theta_2)\exp[-j\varphi(\theta_1,\theta_2)] \tag{14}$$

我们注意到 $\boldsymbol{b}^{H}(\theta_1)\boldsymbol{b}(\theta_2)$ 的模与阵列中心矢量无关，而仅仅取决于阵元间隔，因此虚拟均匀线阵的中心矢量和阵元间隔可以分别确定。它们为

$$\boldsymbol{d} = \mathrm{Arg}\min_{\boldsymbol{d}}\int_{\Theta}\int_{\Theta}\left|\frac{\sin\left(\frac{K\pi}{\lambda}\boldsymbol{d}\cdot[\boldsymbol{u}(\theta_1)-\boldsymbol{u}(\theta_2)]\right)}{K\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}\boldsymbol{d}\cdot[\boldsymbol{u}(\theta_1)-\boldsymbol{u}(\theta_2)]\right)}-\rho(\theta_1,\theta_2)\right|d\theta_1 d\theta_2 \tag{15}$$

$$\boldsymbol{r}_c = \mathrm{Arg}\min_{\boldsymbol{r}_c}\int_{\Theta}\int_{\Theta}\left|\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{r}_c\cdot[\boldsymbol{u}(\theta_1)-\boldsymbol{u}(\theta_2)]-\varphi(\theta_1,\theta_2)\right|d\theta_1 d\theta_2 \tag{16}$$

附注：当虚拟均匀线阵满足(10)式时，内插矩阵 $\boldsymbol{W}_0$ 是正交矩阵。事实上，我们有

$$\boldsymbol{W}_0^{H}\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{P}^{H}\boldsymbol{R}^{\#}\boldsymbol{R}^{\#}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{H}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{H})^{\#}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_K \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{I}_K$ 表示 $K\times K$ 阶单位矩阵。在一些场合中，为了减少计算量的目的，虚拟均匀线阵的阵元个数 K 常常小于实际阵元个数 N。如果将内插矩阵视为波束形成矩阵，考察“波束形成”引起的阵列信噪比损失，可以证明(10)式是避免阵列信噪比损失的充分条件。另一式面，波束空间 MUSIC[9] 的分辨门限取决于波束形成矩阵的选择，不难证明，等式(10)方也是波束空间 MUSIC 分辨门限最小的充分条件。限于篇幅，文中不进行深入讨论。

下面讨论一些具体的设计问题。

1. 内插扇区 Θ 和虚拟阵元个数 K 的选择

(10)式实际上意味着在空域扇区 Θ 上，虚拟均匀线阵应该具有与实际阵列相同的波束图案。显然，太大的扇区将会使“波束图案匹配”变得不可能。通常合理的内插扇区可以取一个波束宽度的范围，例如主波束两侧第一个极小值点之间的夹角。Θ 确定后，虚拟阵元个数 K 就不应小于矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的显著特征值的个数。

2. 虚拟均匀线阵的安置

通常要求解如(15)和(16)式所述的最小化问题相当困难。但是，我们可以采用一些近似方法以达到实用的目的. 做法是将虚拟均匀线阵的基线根据实际阵列的几何结构选择,使得虚拟阵元有尽可能靠近实际阵元位置的机会. 令 θ_c 为扇区 Θ 的中心方向，$\Delta\theta_c$ 为虚拟线阵法线方向与方向 θ_c 之间的夹角. 依据前述的"波束图案匹配"原则,虚拟均匀线阵的波束宽度应等于实际阵列的波束宽度. 以 BW_m 记实际阵列指向方向 θ_c 的主波束两侧第一个零点之间的夹角(方向锐度角),则虚拟均匀线阵的阵元间隔可选择为

$$d = \lambda \csc\Delta\theta_c/(K\cdot BW_m) \tag{18}$$

顺便指出,如果采用不同的波束宽度定义，则对应的虚拟阵元间隔虽有所不同,但彼此相差不大.

3. 具有空域滤波能力的内插矩阵

在实际中,有时为了简化信号环境以及抑制有向噪声，要求内插矩阵 $\boldsymbol{W}$ 能够抑制扇区 Θ 以外的信号. 令 $\bar{\Theta}$ 记不包含 Θ 的整个空域. 内插矩阵对扇区外信号的总响应为

$$\int_{\bar{\Theta}} \|\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{a}(\theta)\|_2^2 d\theta = \mathrm{Tr}\{\boldsymbol{W}^H\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{W}\} \tag{19}$$

式中

$$\bar{\boldsymbol{R}} = \int_{\bar{\Theta}} \boldsymbol{a}(\theta)\boldsymbol{a}^H(\theta)d\theta \tag{20}$$

在空域 Θ 内定义一组方向 θ_i，$1\leqslant i\leqslant L(L<N)$. 令

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}(\theta_1)\boldsymbol{a}(\theta_2)\cdots\boldsymbol{a}(\theta_L)] \tag{21}$$

$$\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}(\theta_1)\boldsymbol{b}(\theta_2)\cdots\boldsymbol{b}(\theta_L)] \tag{22}$$

实现内插必须满足

$$\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{23}$$

在上述约束下，利用剩余自由度使扇区外信号的响应最小化可以获得一定的空域滤波能力. 有下列约束最小化问题

$$\min_{\boldsymbol{W}}\mathrm{Tr}[\boldsymbol{W}^H\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{W}] \quad \mathrm{st.}\,\boldsymbol{W}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{24}$$

其解为

$$\boldsymbol{W} = \bar{\boldsymbol{R}}^{\#}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{A}^H\bar{\boldsymbol{R}}^{\#}\boldsymbol{A}]^{\#}\boldsymbol{B}^H \tag{25}$$

为了减小白噪声对内插数据的影响和减少阵列信噪比损失,上式中的矩阵 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 可用 $\bar{\boldsymbol{R}}+\lambda_0\boldsymbol{I}_N$ 代替,这里 $\lambda_0>0$,$\boldsymbol{I}_N$ 为 $N\times N$ 阶单位阵. 这样做的代价是内插矩阵的扇面外衰减性能受到影响. 如果存在扇区外的强干扰信号,即使不能充分加以抑制,但只要总的入射信号个数小于 K,则扇面外干扰的存在不会产生严重影响.

四、计算举例

考虑由 $N=36$ 个各向同性阵元组成的均匀圆阵，其半径为 2.05λ. 设坐标原点位于圆心,阵列的观察方向为 $\theta_c=0°$,其主波束方向锐度角约为 $21°$,取 $\Theta=[-10°,10°]$. 计算矩阵 $\boldsymbol{R}$,它有 4 个显著特征值且第 4 个远小于前 3 个，故取 $K=4$. 虚拟均匀线阵

的几何中心选在原点，基线在 x 轴上.

根据(18)式，阵元间隔应为 1.367λ. 为计算内插矩阵，选择 8 个约束方向：$\pm 7.762°$，$\pm 5.536°$，$\pm 3.318°$，$\pm 1.106°$，同时取对角加载因子 $\lambda_0 = 1$ 以减小阵列信噪比损失. 内插矩阵可用(25)式算出. 选择其它阵元间隔，以类似方法计算内插矩阵. 下面看一看不同的阵元间隔选择对方向估计的影响. 设有两个等功率不相关信号，方向分别为 $-2.5°$ 和 $1.5°$. 利用内插矩阵对圆阵的观测数据进行变换，然后采用 TLS-ESPRIT 算法[8] 估计信号方向. 表 1 给出了根据 100 次独立试验所得到的信号方向估计误差的总体均方根值，这里信号的时间带宽积为 20. 可以看到，在 $d = 1.367\lambda$ 附近出现最小估计误差.

五、结 束 语

由于均匀线阵的处理比较方便，在遇到不规则阵列时，通过阵列内插产生一个虚拟均匀线阵常常可以简化问题. 本文深入讨论了虚拟均匀线阵的设计，给出了确定阵元间隔的简单方法，计算机仿真的结果表明，所提出的方法是实用有效的.

表 1　选择不同阵元间隔对应的方向估计量误差

阵元间隔(λ)	方向估计量总体均方误差(°)	
	信噪比＝20dB	信噪比＝25dB
0.500	0.6430	0.3557
0.750	0.4149	0.2318
1.000	0.2171	0.1221
1.250	0.1380	0.0776
1.367*	0.1295*	0.0729*
1.500	0.1496	0.0842
1.750	0.5179	0.2847
2.000	1.4960	0.8592

* 用本文(18)式所选择的阵元间隔和对应的结果.

参 考 文 献

[1] T. P. Bronez, Sector Interpolation of Nonuniform Arrays for Efficient High Resolution Bearing Estimation, in Proc. ICASSP, Apr. 1988, New York, USA, pp. 2885—2888.

[2] G. Bienvenu, L. Kopp, Decreasing High Resolution Method Sensitivity by Conventional Beamformer Preprocessing, in Proc. ICASSP, March 1984, San Diego, USA, pp. 33.2.1—33.2.4.

[3] K. M. Buckley, X. L. Xu, Reduced-Dimension Beam-Space Broadband Source Localization: Preprocessor Design, in Proc. SPIE, Vol. 975, Advanced Algorithms and Architectures for Signal Processing III, San Diego, USA, (1988), pp. 368—375.

[4] 路鸣，保铮：非均匀阵列上相干信号的空间谱估计，电子科学学刊，13(1991)1，1—11.

[5] B. Friedlander, Direction Finding with an Interpolated Array, in Proc. ICASSP, Apr. 1990, New Mexico, USA, pp. 2951—2954.

[6] A. J. Weiss, M. Gavish, *IEEE Trans. on SP*, SP-39(1991)6, 1473—1478.

[7] B. D. Rao, K. V. S. Hari, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-37(1989)12, 1939—1949.

[8] R. Roy, T. Kailath, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-37(1989)7, 984—995.

[9] H. B. Lee, M. S. Wengrovitz, *IEEE Trans. on ASSP*, ASSP-38(1990)9, 1545—1559.

DESIGN OF VIRTUAL UNIFORM LINEAR ARRAYS FOR EFFICIENT DIRECTION FINDING

Lu Ming
(*Southeast University, Nanjing* 210018)

Abstract The problem considered in this paper is that of interpolating a virtual uniform linear array from a real two-dimensional array with arbitrary geometry via an interpolation matrix. Central to this problem is how to place these virtual sensors. It is shown that the virtual uniform linear array should have the same mainlobe beam pattern as the real array over an angular sector of interest. Simulation results are presented to illustrate the application of virtual array in direction finding.

Key words Array signal processing; Antenna array; Interpolation; Direction finding