

小波分析与神经网络结合的研究进展¹

陈 哲 冯天瑾

(青岛海洋大学电子工程系 青岛 266003)

摘 要 目前,小波与神经网络的结合是一个十分活跃的研究领域。本文综述了这一领域的研究进展和现状,从两者结合方式的不同将其分为辅助式及嵌套式两种结合方式,重点阐述了嵌套式的结合方式——小波神经网络,并对其主要模型、算法和其它相关问题进行了论述。本文还讨论了小波网络的各种应用,从中可以看到它在函数逼近、信号分类、系统辨识、图像压缩等应用领域有极大的潜力,最后展望了今后的研究方向。

关键词 神经网络,小波,小波网络

中图分类号 TN-052

1 引 言

从 1943 年 McCulloch 和 Pitts 首次提出 MP(McCulloch-Pitts) 神经元网络模型,到 80 年代中期 Rumelhart 等人 PDP(Parallel Distributed Processing) 的出版^[1],世界范围内兴起了神经网络的研究热潮。前向多层神经网络是一种最为广泛应用的神经网络模型,用于训练前馈网络最常用的学习方法是 BP 算法。实践证明 BP 神经网络具有强大的空间映射能力。小波自 1984 年 Grossmann 和 Morlet 首次提出以来^[2],已成为信号处理的强有力工具,小波分析被认为是傅里叶分析的突破性进展^[3-6]。由于小波具有良好的时频局部特性和变焦特性^[7],而神经网络具有自学习、自适应性、强鲁棒性和推广能力,如何把小波和神经网络结合起来,一直是人们关注的问题。目前小波与神经网络的结合表现有以下两个途径:一个途径是辅助式结合,比较典型的是利用小波分析对信号进行预处理,然后用神经网络学习与判别。比如在模式识别中,先用小波对信号进行预特征提取,然后用神经网络进行判决分类;另一个途径是嵌套式结合,即把小波变换的运算融入到神经网络中去,形成所谓的小波神经网络(WNN)或小波网络。这是两者结合的主要方式,其中小波与前馈神经网络的结合又是最主要的研究方向。

2 小波与神经网络的辅助式结合

小波与神经网络辅助式结合的主要形式有两种:一种是用神经网络求小波系数或参数。例如 Daugman 用神经网络求出 Gabor 小波最优系数^[8],Telfer 等人利用神经网络自适应选择小波参数提高了检测的精度^[9,10];另一种是先用小波变换对信号进行预处理,提取信号的小波特征,再将特征量送入神经网络处理,数据经过小波变换的压缩,能有效地减少神经网络的输入层单元数,如图像压缩^[11]、数据分类^[12]、心电信号的检测^[13]。小波与前馈网络结合是小波与神经网络结合的主要形式,除此以外,小波还可以与其它神经网络相结合:例如用 Kohonen 网络实现对信号的自适应小波分解^[14],RBF 网络与小波的结合^[15]等。

3 小波神经网络

小波神经网络是在小波分析研究基础上提出的一种前馈网络,它可以被认为是 RBF 网

¹ 1998-10-05 收到, 1999-05-23 定稿
国家自然科学基金(69675005)资助

络的推广,但它又具有与一般前馈网络和 RBF 网络所不同的特点,在神经网络领域中具有良好的发展潜力。现就其主要模型和算法综述如下。

3.1 基本模型及算法

Hecht-Nielsen 证明了仅含一层隐层的非线性连续变换函数的多输入单输出三层网络可以用来逼近有界区域上的任一连续函数^[16],小波神经网络也一般采用单隐层结构。

Pati 和 Krishnaprasad 最早研究了神经网络与小波变换的联系^[17],首次提出了离散仿射小波网络模型^[18]。其思想是将离散小波变换引入神经网络模型,离散仿射小波变换的实质是,通过对单个函数的平移和伸缩构成 $L^2(R)$ 中的框架,于是可由 Sigmoid 函数构造出仿射框架和小波网络。1992 年 Zhang Qinghua 和 Benveniste 明确提出了小波网络的概念和算法,并就函数逼近对小波网络与神经网络、小波分解的实验结果进行了比较^[19]。其基本思想是用小波元 (waveron) 代替了神经元 (neuron),即激活函数为已定位的小波函数基,通过仿射变换建立起小波变换与神经网络的联接,其模型简述如下:

对于一维输入: $f(x) = \sum_{i=1}^N w_i \psi\left(\frac{x-t_i}{s_i}\right) + \bar{f}$, \bar{f} 为 f 的均值估计,若令 $v_0 \equiv 1$, $v_i = \psi\left(\frac{x-t_i}{s_i}\right)$, 则可简化为 $\hat{f} = \sum_{i=0}^N w_i v_i(x)$ (如图 1)

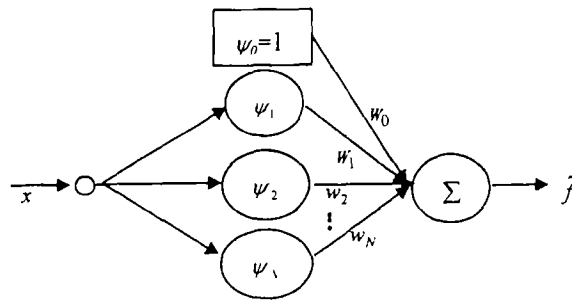


图 1 小波基函数网络

对于多维输入: $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^M w_i \psi[D_i R_i(\vec{x} - \vec{t}_i)] = \bar{f}$. 其中 D_i 是由伸缩矢量 \vec{d}_i 构成的对角矩阵, R_i 是旋转矩阵。

随后 Szu 和 Telfer 又提出了两种基于连续小波变换的自适应小波神经网络模型,分别用于信号表示和信号分类(如图 2)^[20]。WNN 用于信号分类识别的实质是在小波特征空间中寻找一组适合的小波基,通过对网络的学习,自适应地调整小波参数以使代价函数最小。

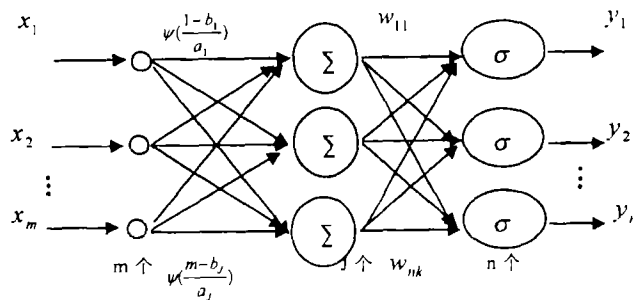


图 2 自适应小波网络用于信号分类

信号表示: $\hat{f}(t) = \sum_{k=1}^K w_k \psi\left(\frac{t-b_k}{a_k}\right)$.

信号分类: $y_i(t) = \sigma\left[\sum_{j=1}^J w_{ij} \sum_{k=1}^m x_k(t) \psi\left(\frac{k-b_j}{a_j}\right)\right]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), σ 为 sigmoid 函数。

用于信号表示(或逼近)与用于信号分类的小波网络的用途不同,决定了其特点也不同:前者用正交小波更能有效地逼近信号或函数;后者着重于选取合适的小波做特征提取以利于分类,由于不涉及重构问题,小波的正交性并不是非常重要的,提取的信号的小波特征应融入必要的不变性量并应具有鲁棒性,此外信号分类往往是离线训练过程,对实时处理的要求并不严格^[9]。

Baskshi 和 Stephanopoulos 利用正交小波函数作为神经元的激活函数,提出了正交小波神经网络及学习算法^[21]。其基本思想是依据多分辨率分析理论,用小波分解对样本进行分析,网络一部分隐结点取为尺度函数 φ , 另一部分隐结点取为小波函数 ψ , 采用逐级学习的方法来训练网络。即 $S(x) = \sum_i c_i \theta_i(x)$, 其中 θ_i 为对应的尺度或小波函数, c_i 为权值。对于函数 $S(x)$ 先在最粗分辨率下逼近,然后可逐渐增加细节信息,网络训练由粗到细逐渐增加结点,由于 φ 与 ψ 的相互正交性,只需训练新增加的小波元的权重系数即可。由于正交小波基具有良好的时-频分辨性能,信号剧烈变化时,可增加分辨尺度的细化来保证逼近的精度,而且训练过程中添加、删除网络结点不影响已训练好的网络权值,网络学习的时间因而大大减少。Zhang Jun 等研究了前人的小波网络模型,提出了另一种正交小波基神经网络^[23]。其基本思想是选用正交且具有类紧支持性的 Lemarie-Meyer 尺度函数对函数进行逼近,文章给出了确定隐层单元数的算法,并对 WNN 与 MLP 和 RBF 网络进行了性能比较。

3.2 小波网络的推广和改进

小波网络的概念和模型提出以后,引起了人们的广泛研究兴趣,并对其模型和算法进行了改进。焦李成等在前人工作基础上提出了多变量函数估计小波网络^[24]。沈雪勤等针对神经元个数过多、网络学习收敛速度较慢的问题,在时频分析基础上引入了能量密度的概念,提出了基于能量函数的小波神经网络^[25,26]。最近,张钹等针对小波网络高维映射学习所用神经元数目过多和维数灾问题分析指出:对有限区间上能量有限信号的学习采用 $L^2(R)$ 上的小波多尺度结构是不理想的,于是重新定义 $L^2[0,1]$ 上的多尺度分析,提出区间小波网络模型(interval wavelet network),并通过理论与模拟实例证明,区间小波神经网络优于以前的小波神经网络^[27,28]。焦李成等人研究了小波网络与模糊逻辑的结合,用隶属函数表示权重值,构造模糊权值、模糊输出的小波网络^[29,30]。何振亚等构造了一种自适应时延小波网络,针对存在不同时延的信号用一个超小波(superwavelet)进行逼近,并给出一种基于时间竞争的学习算法^[31]。文献[32]提出了一种小波神经网络的推广模型,激励函数(小波函数)和连接权(sigmoid 函数)都取为非线性函数。此外还有紧支非正交小波网络^[33], hierarchical 小波网络^[34], 结构自适应调整的时-频小波网络模型^[35]等。

训练前馈神经网络最常用的学习方法是 BP 算法,但 BP 算法存在着众所周知的学习收敛速度慢的问题。Zhang Qinghua 首次提出小波网络模型时使用了随机梯度算法^[19]; Szu 则提出学习速度更快的共轭梯度算法^[20]。近年来,又出现了针对各种小波网络模型的算法研究,例如模糊小波神经网络的区间学习算法^[29], 模糊推理小波神经网络算法^[30], 基于离散小波的学习算法^[36]等。算法研究的主要一点是关于衡量最优的代价函数的选择。最小均方误差是最常用的标准,此外还可以选择最小最大标准、最小错分误差标准^[37], 最小正交二乘标准^[38]。

3.3 其它问题讨论

小波神经网络的研究除了模型和算法的研究外,还有许多值得探讨的问题,例如小波网络的分类、构造、结构;小波基函数的选择;小波网络与其他网络的性能比较等。以下就这几个问题进行阐述。

3.3.1 小波网络的分类 小波神经网络自提出以来出现了许多模型,归纳起来主要可以分为以下几种类型。

(1) 按小波基函数和学习参数的选取,可分为:

(a) 连续小波神经网络: 来源于连续小波变换的定义,其特点是基函数的定位不局限于有限离散值,展开式不唯一,冗余度高,无法固定小波参数与函数之间的对应关系,具有类似 BP 网络的非线性优化问题,但小波分析理论有助于网络参数和结构的初始化,使网络有较强的逼近能力和收敛速度。

(b) 离散仿射小波神经网络: 来源于离散仿射小波变换的反演方程,其理论基础是小波框架,但紧框架下的小波基不一定是正交基,有一定的冗余度,可能不具有紧支特性,其数学理论概念清楚、实现方便,应用较广。

(c) 离散正交小波神经网络: 基函数为 $L^2(R)$ 中正交小波函数系,主要理论依据是 Daubechies 构造的紧支撑正交小波^[39]及 Mallat 多分辨率分析^[40,41],其理论研究意义明确,但正交基构造及网络学习算法较复杂,网络抗干扰能力较差;正交小波网络继承了小波框架网络的优点,而且由于其基函数的正交性,对函数的逼近更有效。

(2) 按小波基在网络中的作用不同,可分为:

(a) 激活函数型小波网络: 小波函数在网络中代替了传统的 sigmoid 函数,激活函数为已定位的小波函数基,即用 waveron 代替了原来 neuron 的非线性特性,例如图 1 的用于函数逼近的小波网络。

(b) 权重型小波网络: 小波函数集在网络中充当若干组权重值,输入信号是信号与小波的内积,例如图 2 的用于信号分类的自适应小波网络。

(3) 按小波的维数不同,可分为:

(a) 一维小波网络: 建立在一维小波变换基础上,主要用于函数逼近、非参数估计,是目前研究和应用最多的模型。现已经证明,在逼近单变量函数时,小波神经网络是渐进最优的逼近器^[42]。

(b) 多维小波网络: 在一维基础上讨论的理论同样适用于二维图像,类似地还可以推广到多维情形。我们可以在一维情形的基础上利用直积 (direct product) 定义多维母波,或利用张量积 (tensor product) 构造多维正交多分辨率分析,关于构造多维小波框架的理论读者可参考有关文献^[43]。

3.3.2 小波网络的构造 小波神经网络的构造是一个重要的问题。Zhang Qinghua 首先用回归分析给出了小波网络的构造方法^[44]。Pati 和 Krishnaprasad 在文献 [18] 中提出了利用小波变换对前馈神经网络进行综合 (synthesis) 的两种方法,其系统地定义了网络的拓扑结构,提前确定网络中的部分权重值,简化了网络的训练问题。文献 [45,46] 系统提出了一种小波基函数网络结构设计的“分解-综合”方法,有效地减少了构造小波网络所需的小波基元。

3.3.3 小波函数的选择 构造小波网络时选择什么类型的小波函数,以及根据不同情况选择相同或不同的小波基函数也是一个值得研究的问题,目前这方面定性的研究不多。在实践中, Morlet 小波 $\cos(rt)e^{-t^2/2}$ 应用领域甚广,例如信号表示和分类 (Szu 取 $r = 1.75$)^[20]、图像识别^[47]、特征提取^[48,49]; $-xe^{-x^2/2}$ (高斯函数一阶导数) 用于函数估计^[19]; 墨西哥

草帽小波用于系统辨识^[50]；样条小波用于材料探伤^[51]；Shannon 正交基用于差分方程求解^[52]；还可以选择几个 sigmoid 函数的组合^[45]作为小波函数。正交小波神经网络的小波基一般选择 Daubechies 构造的具有紧支撑的正交小波。

3.3.4 小波网络与 RBF 和 MLP 比较 RBF 网络是一种特殊的三层前向网络，其中径向基函数对应着隐层的神经元。基函数簇通常为同一类型，可由一个母函数经过平移、旋转和尺度变换得到。母函数是形状不同的轴对称函数，最常见的是高斯函数：

$$\phi_i = \exp\{-\|x - c_i\|^2/\beta_i^2\}, \quad y = W\phi(x),$$

其中 $x \in R^m$ 表示网络输入向量， $c_i \in R^m$ 表示第 i 个隐元的高斯分布曲线的作用中心， $\beta_i > 0$ 为隐元宽度， $y \in R^n$ 为输出量， $W \in R^{n \times n}$ 为权矩阵。RBF 网络实际上是用一组具有紧支集的径向基函数来表示任意函数，这组基函数往往是非正交的，而小波神经网络是 RBF 网络的推广，它用小波斜交或正交基来逼近任意函数。

多层感知器是一种多层前馈网络，其激活函数一般选用 signum 函数或 sigmoid 函数，其中 $\sigma \notin L^2$ 且 $\sigma \in C^\infty$ ，所以 sigmoid 函数难以保证解的唯一性，也难以找到 L^2 函数所对应的反演公式；而连续 WNN 的激活函数是显式小波函数 ($\psi \in L^2$ 且 $\psi \in C^\infty$)，仿射 WNN 可选用具有 K 阶正则性的、具有良好的指数衰减特性的非紧支正交小波基 ($\psi \in C^k$)，正交 WNN 激活函数是具有紧支性、任意阶正则性、零冗余性的正交小波基。MLP 的基函数均不正交，相关冗余度大，因此权值学习训练往往呈现峡谷性误差曲面，收敛速度慢；WNN 权值之间相关度很小，对某一权值训练不会影响其它权重，因而收敛速度快。sigmoid 网络原则上可以任意精度逼近给定函数，但它需要无限多权值对基函数的伸缩平移系作线性展开，因而难以定量分析逼近的分辨尺度。WNN 与 MLP 在一定程度上可进行等效性分析，举两个简单的例子就可以说明：

$$\text{Haar 小波: } \psi_{\text{Haar}} = \begin{cases} 1 & [0, 1/2) = \text{sign}(x) + \text{sign}(x-1) - 2\text{sign}(x-1/2), \\ -1 & [1/2, 1) = \text{sign}(x) + \text{sign}(x-1) - 2\text{sign}(x-1/2) \end{cases}, \text{ 可分解为}$$

三个 signum 函数组合；

sigmoid 函数： $\sigma(x) = 1/(1 + e^{-x})$ ， $\psi(x) = \sigma(x+2) + \sigma(x-2) - 2\sigma(x)$ ，即三个 sigmoid 函数组合可生成一个带限小波函数。因此从直观上看，小波网络可以等效为三个 MLP 的组合，WNN 近似估值能力是 MLP 的三倍。虽然 sigmoid 函数不满足框架条件，但三个 sigmoid 函数的线性组合得到的 $\psi(x)$ 却可以实现^[6,18]。此外，MLP 学习算法忽视了许多包含在训练数据中的先验知识，从而忽略了权重设计中潜在的简化问题，而 WNN 的训练数据的预处理将导致训练问题的凸性，因而在选择权重时更具指导性；基于 BP 算法的 MLP 常常遇上局部最小值问题，而正交 WNN 的能量函数是凸函数，因而其任何极小值就是全局最小值。

理论分析和模拟实例均表明：小波神经网络具有逼近能力强，网络学习收敛速度快，参数（隐层结点数和权重）的选取有理论指导，有效避免了局部最小值问题等优点^[53]。它比单纯的小波分解可使用更少的基函数，也优于同样单元数目的 sigmoid 神经网络。然而，小波神经网络也有不足之处，相比而言，小波运算复杂度增加了。如前所述，当神经元个数过多时，网络学习及收敛速度缓慢；高维映射学习时易产生维数灾。这两点可考虑通过光学或 VLSI 技术实现高速并行运算而较好地解决。

4 应用与展望

小波神经网络最初主要用于函数逼近^[19,54]、语音识别^[20]。随着小波网络的理论不断发展,应用领域也不断拓宽,如非参数估计^[55];模式识别^[56];心电信号的识别与分类^[57];数据与图像压缩^[58,59]。近年来,小波网络在我国也引起了广大学者的关注^[60-65],欲详细了解资料可参照有关文献。总体而言,小波网络的理论和应用研究还处于初始阶段,迄今还存在许多有待解决的问题,这无疑是我们今后的研究方向:

(1) 小波网络的新模型及其学习算法。例如可考虑基于小波包的小波网络^[66]、PPR (Projection Pursuit Regression) 小波网络^[67]、小波与联想记忆神经网络的结合^[68]、多分辨分析与神经网络的结合^[69]。关于小波网络的结构,近年来有人提出多层结构小波网络^[34]、局域连接型的小波网络^[70]。目前神经网络的研究正由单纯的神经计算转向计算智能,并结合脑科学的研究向生物智能方向发展,小波网络的研究也应该考虑吸收模糊、分形、混沌、进化计算等交叉学科的研究成果,如小波网络与模糊逻辑的结合,如小波模糊神经网络^[29,30,71]、小波包模糊聚类网络^[72];又如考虑小波网络与分形理论的结合,构造分形小波网络;小波网络算法与遗传算法和进化计算的结合研究^[73]等。

(2) 小波网络的收敛性、鲁棒性、计算复杂度等研究,这方面的参考文章可参见文献^[23, 45, 53]。

(3) 离散正交小波网络构造的复杂性问题以及多维输入出现的“维数灾”问题。

(4) 如何把输入信号特征与尺度、平移、旋转等不变性量结合起来输入小波网络训练,以压缩信号特征信息,加速训练过程。

(5) 小波基函数的选择。实际应用不同情况应选取何种小波?小波基应选取相同类型还是不同类型?选取的数目和标准是什么?如何用理论指导网络中小波的初始化参数?

(6) WNN 硬件实现。神经网络的光学实现是当前的研究热点之一。值得一提的是 Szu 和 Telfer 等人在这方面做了不少工作,构造了一种神经网络“光学耳蜗”(optical cochlea)模型,有兴趣的读者可参见文献^[58]及其引用的文献;另外文献^[74]提出了一种基于并行神经计算机结构的模型,VLSI 技术的实现无疑将进一步促进 WNN 的推广和应用。

可以看到,小波神经网络由于把神经网络的自学习特性和小波的局部特性结合起来,具有自适应分辨性和良好的容错性,因此特别适合应用在函数逼近、系统辨识、数据压缩、模式识别等领域。小波神经网络的理论和应用研究近年来发展很快,由于所查文献和资料有限,不可能囊括所有的研究成果,由于篇幅所限,许多应用方面文献也没有列入,有兴趣的读者可以参阅近年来的国际会议论文和有关刊物。

参 考 文 献

- [1] Rumelhart D E, McClelland J L, Eds. *Parallel Distributed Processing 1: Foundation*. Cambridge, MA: MIT Press, 1986, Chapter 8: 318-362.
- [2] Grossmann A, Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 1984, (15): 723-736.
- [3] Meyer Y. *Wavelet: Algorithms and Applications*. Philadelphia, PA: SIAM Press, 1993.
- [4] Chui C K, Ed. *Wavelet: A Tutorial in Theory and Application*. New York: NY: Academic Press 1992.
- [5] Chui C K. *An Introduction to Wavelets*. New York: NY: Academic Press, 1992.
- [6] Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia, PA: SIAM Press, 1992.

- [7] Daubechies I. The wavelets transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Trans. on Info. Theory*. 1990, IT-36(5): 961-1005.
- [8] Daugman G. Complete discrete 2-D transforms by neural networks for image analysis and compression. *IEEE Trans. on ASSP*, 1988, ASSP-36(7): 1169-1179.
- [9] Telfer B, Szu H, Dobeck G. Adaptive wavelet classification of acoustic backscatter and imagery. *Optical Engineering*, 1994, 33(9): 2192-2203.
- [10] Casasent D, Smokelin J S. Neural net design of macro Gabor wavelet filters for distortion-invariant object detection in clutter. *Optical Engineering*, 1994, 33(9): 2264-2271.
- [11] Denk T, *et al.* Combining neural networks and the wavelet transform for image compression. *Proc. IEEE ICASSP*. Minnesota, USA: 1993, 1: 637-640.
- [12] Szu H, Yang X, Telfer B, *et al.* Neural network and wavelet transform for scale-invariant data classification. *Phys. Rev. E*, 1993, 48(2): 1497-1501.
- [13] Kalayci T, Ozdamar O, Erdol N. The Use of wavelet transform as preprocessor for the neural network detection of EEG spikes. *Proc. IEEE Southeast Conference*, 1994, 1-3.
- [14] Cheng Qiming, Tian Jifei, Zhang Shujing, *et al.* The Application of neural network to wavelet decomposition of surface EMG signal. *Proc. of IJCNN*, Beijing: 1992, 1: 889-892.
- [15] Mukherjee S, Nayar S K. Automatic generation of RBF networks using wavelets. *Pattern Recognition*, 1996, 29(8): 1369-1383.
- [16] Hecht-Nielson R. Theory of the backpropagation neural network. *Proc. of IJCNN*, Washington DC, USA: 1989, 1: 593-611.
- [17] Pati Y C, Krishnaprasad P S. Discrete Affine Wavelet Transform for Analysis and Synthesis of Feedforward Neural Network. *Advances in Neural Information Processing System*. Lippman R (Eds.) San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1990, 3: 743-749.
- [18] Pati Y C, Krishnaprasad P S. Analysis and synthesis of feedforward neural network using discrete affine wavelet. *IEEE Trans. on NN*, 1993, NN-4(1): 73-75.
- [19] Zhang Q, Benveniste A. Wavelet networks. *IEEE Trans. on NN*, 1992, NN-3(6): 889-898.
- [20] Szu H, Telfer B, Kadambe S. Neural network adaptive wavelets for signal representation and classification. *Optical Engineering*, 1992, 31(9): 1907-1916.
- [21] Baskshi B R, Stephanopoulos G. Wave-net: a multiresolution, hierarchical neural network with localized learning. *American Institute Chemical. Engineering Journal*, 1993, 39(1): 57-81.
- [22] Boubez T, Peskin R L. Wavelet neural networks and receptive field partitioning. *Proc. of IEEE ICNN*, San Francisco, CA, USA: 1993, 3: 1544-1549.
- [23] Zhang Jun, Walter G, Miao Y, *et al.* Wavelet neural networks for function learning. *IEEE Trans. on SP*, 1995, SP-43(6): 1485-1497.
- [24] 石卓尔, 焦李成, 保铮. 子波神经网络. *中国神经网络 1993 年学术大会论文集 (上)*, 西安: 1993, 85-96.
- [25] 丁宇新, 沈雪勤. 基于能量密度的小波神经网络. *计算机学报*, 1997, 20(9): 832-838.
- [26] 沈雪勤, 贾向红, 吴永清. 能量密度在正交小波神经网络中的应用. *1997 年中国神经计算科学大会论文集 CCNS*, 南京: 1997, 2: 613-616
- [27] 高协平, 张铍. 区间小波神经网络 (I)—理论与实现. *软件学报*, 1998, 9(3): 217-221.
- [28] 高协平, 张铍. 区间小波神经网络 (II)—性质与模拟. *软件学报*, 1998, 9(4): 246-250.
- [29] 王岭, 焦李成. 区间估计的 FWNN 及其区间学习算法. *电子学报*, 1998, 26(4): 41-45.
- [30] Zhang Liangjie, Li Yanda. Wavelet Based Fuzzy Neural Networks. *Proc. ISANN*. Taiwan: 1994, 180-185.
- [31] 何振亚, 李文化, 靳承建. 用于信号逼近的自适应时延小波小波神经网络. *电子科学学刊*, 1998, 20(5): 604-610.
- [32] 陈维荣, 钱清泉. 一种形式神经元的统一模型. *1997 年中国神经计算科学大会论文集 CCNS*, 南京: 1997, 1, 78-81.
- [33] Yamakawa T, *et al.* Wavelet neural networks employing over-complete number of compactly supported nonorthogonal wavelets and their application. *Proc. of IEEE ICNN*, Orlando, FL, USA: 1994, 2: 1391-1396.
- [34] Rao S S, Pappu R S. Hierarchical wavelet neural networks. In Simpson P K (Eds). *Neural Network: Theory, Technology, and Application*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1996, 83-90.

- [35] Yingxian Qiao, Fengqi Zhou. Time-frequency wavelet networks with structure adaptation. Proc. ICONIP, Beijing: 1995, 1: 36-39.
- [36] 姚骏, 彭汉川, 甘强, 等. 基于离散小波变换的小波网络学习算法及其在心电信号识别中的应用. CCNS, 南京: 1997, 2: 605-608.
- [37] Telfer B, Szu H, *et al.* Implementing the minimum-misclassification-error energy function for target recognition. Proc. IJCNN, Baltimore, MD, USA: 1992, 1: 214-219.
- [38] Chen S, Cowan C F, Luo W. Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks. IEEE Trans. on NN, 1991, NN-2(2): 302-309.
- [39] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelet. Comm. on Pure. Appl. Math, 1988, 41(7): 909-996.
- [40] Mallat S G. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. IEEE Trans. on ASSP, 1989, ASSP-37(12): 2091-2110.
- [41] Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. IEEE Trans. on PAMI, 1989, PAMI-11(7): 674-693.
- [42] Kreinovich V, Sirisaengtaksin O, Cabren S. Wavelet neural networks are asymptotically optimal approximators for functions of one variable. Proc. of IEEE ICNN, Orlando, FL, USA: 1994, 1: 299-304.
- [43] Kugarajah T, Zhang Q. Multidimensional wavelet frames. IEEE Trans. on NN, 1995, 6(6): 1552-1556.
- [44] Zhang Q. Regressor selection and wavelet network construction. INRIA Technical Report No.709, 1993.
- [45] 张邦礼, 李银国, 曹长修. 小波神经网络的构造及其算法的鲁棒性分析. 重庆大学学报, 1995, 18(6): 88-95.
- [46] 李银国, 张邦礼, 曹长修. 小波神经网络及其结构设计方法. 模式识别与人工智能, 1997, 10(3): 197-205.
- [47] 柳振宇, 戚飞虎, 沈定刚. 基于不变矩和子波神经网络的图像识别. 1994 中国神经网络大会论文集: 中国神经网络理论及应用——'94 最新进展, 武汉: 1994: 552-555.
- [48] 张艳宁, 孙进才, 孙玉兰, 等. 一种基于自适应子波神经网络的船舶噪声分类方法. 西北工业大学学报, 1997, 15(1): 120-124.
- [49] 张艳宁, 焦李成. 基于自适应子波的目标特征提取方法. CCNS, 南京: 1997, 2: 588-591.
- [50] 李向武, 韦岗. 小波神经网络的动态系统辨识方法及应用. 控制理论与应用, 1998, 15(4): 494-500.
- [51] 吴耀军, 陶宝祺, 袁慎芳. B 样条小波神经网络. 模式识别与人工智能, 1996, 9(3): 228-233.
- [52] 水鹏朗, 保铮, 焦李成. 一种基于子波神经网络的多尺度差分方程求解新方法. 电子科学学刊, 1997, 19(6): 733-737.
- [53] Delyon B, Juditsky A, Benveniste A. Accuracy analysis for wavelet approximations. IEEE Trans. on NN, 1995, NN-6(2): 332-348.
- [54] Zhang Q, Benveniste A. Approximation by nonlinear wavelet networks. Proc. IEEE ICASSP, Toronto, Canada, 1991, 5: 3417-3420.
- [55] Zhang Qinghua. Using wavelet network in nonparametric estimation. IEEE Trans. on NN, 1997, NN-8(2): 227-236.
- [56] Song Xianyu, Li Weidong, Qi Feihu. Adaptive wavelet neural network for pattern recognition. Proc. IEEE ICNNSP, Nanjing: 1995, 1: 386-389.
- [57] Szu H, Telfer B, Anandkumar J, *et al.* Remote ECG diagnosis using wavelet transform and artificial neural networks. Proc. of WCNN, Washington DC, USA: 1995, 2: 844-848.
- [58] Szu H, Telfer B, Garica J. Wavelet transforms and neural networks for compression and recognition. Neural Networks, 1995, 9(4): 695-708.
- [59] 李建平, 杨晓帆, 陈廷槐. 基于小波变换和神经网络的图像压缩. 神经网络理论与应用研究'96, 成都: 1996: 436-430.
- [60] 金龙, 秦伟良, 罗莹, 等. 基于小波神经网络的长期预报研究. CCNS, 南京: 1997, 2: 617-620.
- [61] 刘伟, 李金屏, 熊建辉, 等. 小波神经网络在红外光谱数据压缩中的应用. 科学通报, 1997, 42(8): 824-827.
- [62] 徐晓霞, 陈涛, 王晓升. 基于正交最小二乘的小波神经网络. 电子学报, 1998, 26(10): 115-117.
- [63] 王忠勇, 蔡远利, 贾冬. 混沌系统的小波基控制. 物理学报, 1999, 48(2): 206-212.
- [64] 吕柏权, 李天铎, 吕崇德, 等. 一种用于函数学习的小波神经网络. 自动化学报, 1998, 24(4): 548-551.

- [65] Jia Ying, Jiao Licheng. Wavelet neural networks for functional optimization problems. Proc. ICONIP, Beijing: 1995, 1: 359-362.
- [66] Coifman R, Meyer Y, Wickerhauser V. Wavelet analysis and signal processing. Wavelets and Their Applications. Ruskai M B (Eds.) Boston, MA: Jones & Bartlett, 1992, 153-178.
- [67] Huang J N, Lay S R, Maechler M, *et al.* Regression modeling in back-propagation and projection pursuit learning. IEEE Trans. on NN, 1994, NN-5(3): 342-353.
- [68] 丁峭卫, 王煦法, 冯焕清, 等. 基于自组织联想小波神经网络的 QRS 聚类方法. 中国科学技术大学学报, 1998, 28(3): 310-315.
- [69] 黄凤岗, 孙文彦, 王莹. 一种用于自适应的小波神经网络. 电子学报, 1998, 26(8): 143-145.
- [70] 张艳宁, 焦李成. 局域自适应子波高斯神经网络综合分类系统. 电子科学学刊, 1999, 21(3): 326-331.
- [71] Qian W, Clarke L P. Wavelet-based neural network with fuzzy-logic adaptivity for image restoration. Proc. of IEEE. 1996, 84(10): 1458-1473.
- [72] 赵纪元, 何正嘉, 孟庆丰, 等. 小波包模糊聚类网络研究及应用. 西安交通大学学报, 1998, 32(2): 15-19.
- [73] Yao S, Wei C J, He Z Y. Optimization of wavelet neural network using evolutionary programming. Proc. ICONIP, Beijing: 1995, 1: 313-316.
- [74] He Shichun, He Zhenya. A Parallel neurocomputer architecture for wavelet networks. Proc. IEEE ICNNSP, Nanjing: 1995, 1: 174-177.
- [75] 焦李成. 神经网络的应用与实现. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1995, 第二章.

RESEARCH ADVANCES ON COMBINATIN OF WAVELET ANALYSIS AND NEURAL NETWORKS

Chen Zhe Feng Tianjin

(*Electrical Engineering Department, Ocean University of Qingdao, Qingdao 266003*)

Abstract In recent years, the researches on combination of wavelet analysis and neural networks have attracted much attention. This paper reviews the development and status about this field. The combination of wavelet and neural networks can be categorized into the ancillary type and the embedded type, the latter of which is referred to wavelet neural networks(WNN). WNN including its main models, algorithms and other issues are discussed. The applications and prospects of WNN are also given, which showed that WNN have great competence and potential in the applications of function approximation, signal classification, system identification and image compression.

Key words Neural networks, Wavelet, Wavelet networks

陈 哲: 男, 1976 年生, 硕士生, 主要研究领域包括神经网络、小波分析、图像处理.

冯天瑾: 男, 1938 年生, 教授, IEEE 高级会员, 主要研究领域为神经网络、人工智能、CIMS 工程.