虚拟阵元解模糊的可行性分析

董国英　　陶海红　　廖桂生
(西安电子科技大学雷达信号处理重点实验室　西安　710071)

摘　要：针对稀布阵的测向模糊问题，该文以虚拟阵列变换法和基于最小二乘估计的虚拟阵元法为例，从理论上分析了虚拟阵元法解测向模糊的可行性，并通过大量仿真实验加以验证，得出虚拟阵元的接收数据的产生依赖于实际阵元的变换区间，在这种情况下虚拟阵元法并不能有效的解模糊。

关键词：信号处理；解模糊；虚拟阵列；最小二乘估计；虚拟阵列变换
中图分类号：TN911.7　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2010)06-1493-04
DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.00776

The Feasibility Analysis of Ambiguity Solving with Virtual Arrays

Dong Guo-ying　　Tao Hai-hong　　Liao Gui-sheng
(*National Key Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an* 710071, *China*)

Abstract: Considering the issue of angle ambiguity in estimating the directions of arrivals, this paper analyses the feasibility of ambiguity solving with virtual arrays using the virtual array transformation algorithm and the virtual array algorithm based on least squares estimator. Computer simulations confirm that the data of virtual array depends on the sector, and such algorithms can not solve the angle ambiguity problem effectively in this sense.

Key words: Signal processing; Ambiguity resolution; Virtual array; Least squares estimator; Virtual array transformation

1　引言

超分辨阵列测向技术能够精确估计方位，并克服传统测向体制的缺陷(如分辨率不高，受波束宽度的限制等)，其中较为经典的方法有多重信号分类法(MUSIC)[1]及基于旋转不变技术的信号参数估计方法(ESPRIT)[2]等。近来的研究表明，阵列流形(阵元的数目、位置及增益、相位、互耦等)从根本上限制了测向的最终性能，甚至当阵元间距大于载波半波长时，空间谱可能出现虚假谱峰的情况即出现多值模糊问题[3]。近年来，许多文献提出了虚拟阵元法[4–10]，文献[6,7,10]等分析了此类方法用于解决测向模糊问题，如文献[6]等提出了虚拟阵列变换法，通过对任意阵列实施变换，有效地增加了阵元数目(实为虚拟阵元)，变换后的阵列是间距为半波长的均匀线阵，所以可以克服任意阵列稀布时的信号模糊问题。文献[8,9]分别提出了基于线性预测和最小二乘估计的虚拟阵元方法，如果使用此类方法虚拟阵元可将阵列虚拟成间距小于半波长的线阵，认为能够实现解测向模糊。本文讨论虚拟阵元法(以虚拟阵列变换法和基于最小二乘估计虚拟阵元方法为例)解测向模糊的可行性，并从理论和仿真实验两个方面对可行性进行了分析。

本文内容分为4个部分，第2节介绍阵列信号数据模型，第3节以虚拟阵列变换法和基于最小二乘估计虚拟阵元的方法为例从理论上分析了虚拟阵元方法解测向模糊的可行性，并通过大量仿真实验进行验证，第4节给出本文的结论。

2　阵列结构和信号模型

使用 M 个全向天线组成的稀布线阵，如图1所示。假设 p 个远场窄带非相干源，阵元位置矢量为 $(x_1,x_2,\cdots,x_M)$，入射波长为 λ，则阵列接收到的数据矢量可表示为

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{S}(t)+\boldsymbol{n}(t) \tag{1}$$

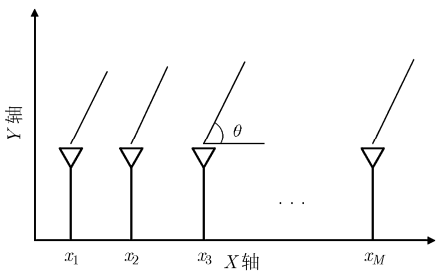

图1 稀布阵示意图

2009-05-22 收到，2009-12-01 改回
国家自然科学基金面上项目(60502045)，国家自然科学基金重点项目(60736009)和国家自然科学基金杰出青年科学基金项目(60825104)资助课题
通信作者：董国英　guoyingdong1013@163.com

式中方向矩阵 $\boldsymbol{A}(\theta)=[\boldsymbol{a}(\theta_1),\boldsymbol{a}(\theta_2),\cdots,\boldsymbol{a}(\theta_p)]$，$\boldsymbol{a}(\theta_i)$ 表示第 i 个信号的导向矢量，$\boldsymbol{a}(\theta_i)=[e^{j2\pi x_1\sin(\theta_i)/\lambda},e^{j2\pi x_2\sin(\theta_i)/\lambda},\cdots,e^{j2\pi x_M\sin(\theta_i)/\lambda}]$，$\boldsymbol{S}(t)=[S_1(t),S_2(t),\cdots,S_p(t)]^{\mathrm{T}}$ 为信号的复包络矢量，噪声矢量 $\boldsymbol{n}(t)=[\boldsymbol{n}_1(t),\boldsymbol{n}_2(t),\cdots,\boldsymbol{n}_M(t)]^{\mathrm{T}}$，由式(1)得阵列数据相关矩阵为

$$\boldsymbol{R}_{xx}=\mathrm{E}[\boldsymbol{X}(t)*\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}(t)]=\boldsymbol{A}(\theta)\boldsymbol{R}_s\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\theta)+\boldsymbol{Q} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{R}_s$ 为信号相关矩阵，由于假定接收 p 个非相干源的情况，$\boldsymbol{R}_s$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 为噪声协方差矩阵，$\boldsymbol{Q}=d^2\boldsymbol{I}$ 为加性高斯白噪声。

3 虚拟阵元解测向模糊的可行性分析

若有一平面电磁波从天线视轴夹角为 θ 的方向到达测角天线 1，2，则两天线接收到的信号相位差为 $\phi=(2\pi d/\lambda)\sin\theta$（$d$ 为阵元间距），而由此式可知，在感兴趣的测角范围内，当 d/λ 加大到一定程度时，ϕ 值可能超过 2π，此时 $\phi=2k\pi+\varphi$，k 为整数，$\varphi<2\pi$，而实际得到的相位差值为 φ 值。由于 k 值未知，所以真实的 ϕ 值不能确定，就出现多值模糊问题。针对此问题，许多文献提出了使用虚拟阵元解模糊的方法，如文献[6]等提出了虚拟阵列变换法，文献[9]提出了基于最小二乘估计的虚拟阵元方法，下面对其可行性进行分析。

3.1 虚拟阵元解测向模糊可行性的理论分析

虚拟阵列变换法实质是找到变换矩阵 $\boldsymbol{T}$，对实际阵元数据进行变换，假设实际阵列和虚拟阵列的导向矢量分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\overline{\boldsymbol{A}}$，实际阵列的接收数据矢量和协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{R}$，虚拟阵列的接收数据矢量和协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{X}_T$ 和 $\boldsymbol{R}_T$，则 $\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{X}_T=\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{R}_T=\boldsymbol{T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}$，期望得到 $\boldsymbol{X}_T=\overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S}(t)+\overline{\boldsymbol{n}}(t)$ 等同于间距半波长的均匀线阵的接收数据，下面分析其可行性。

假设实际阵元数为 M，共虚拟 N 个阵元，则

$$\boldsymbol{X}_T=\begin{pmatrix}x_{\mathrm{rel}1}\\x_{\mathrm{rel}2}\\\vdots\\x_{\mathrm{rel}M}\\x_{\mathrm{vir}1}\\x_{\mathrm{vir}2}\\\vdots\\x_{\mathrm{vir}N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_{\mathrm{rel}}\\\boldsymbol{X}_{\mathrm{vir}}\end{pmatrix} \tag{3}$$

式中下标 rel 表示为实际阵元数据，下标 vir 表示为虚拟阵元数据，$1,2,\cdots,M,N$ 为阵元编号，所以

$$\boldsymbol{R}_T=\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_T\boldsymbol{X}_T^{\mathrm{H}}]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R},&\boldsymbol{R}_{12}\\\boldsymbol{R}_{21},&\boldsymbol{R}_{22}\end{pmatrix} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{R}=\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{rel}}^{\mathrm{H}}]$，即为变换前的数据协方差矩阵，$\boldsymbol{R}_{12}=\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{vir}}^{\mathrm{H}}]$，$\boldsymbol{R}_{21}=\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_{\mathrm{vir}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{rel}}^{\mathrm{H}}]$，$\boldsymbol{R}_{22}=\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_{\mathrm{vir}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{vir}}^{\mathrm{H}}]$。因为 $\boldsymbol{R}_T=\boldsymbol{T}\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}^{\mathrm{H}}$，则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}_T)\le\min(\mathrm{rank}(\boldsymbol{T}),\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}))$，存在噪声时 $\boldsymbol{R}$ 为满秩矩阵，所以当 $\boldsymbol{T}$ 为列满秩矩阵时 $\boldsymbol{R}_T$ 的秩最大为 M。因为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}_T)=M$，取 $\boldsymbol{R}_{21}$ 的第 1 行和 $\boldsymbol{R}$ 组成一个 $(M+1)\times M$ 的矩阵，显然此矩阵的秩为 M，所以该矩阵的第 $M+1$ 行可以由前 M 行线性表示，即存在一组非全零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_M$，使得

$$\boldsymbol{a}_{M+1}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+k_3\boldsymbol{a}_3+\cdots+k_M\boldsymbol{a}_M$$

其中

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\\boldsymbol{a}_2\\\vdots\\\boldsymbol{a}_{M+1}\end{pmatrix}=\mathrm{E}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}1}^*,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}2}^*,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}3}^*,\cdots,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}M}^*\\\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}2}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}1}^*,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}2}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}2}^*,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}2}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}3}^*,\cdots,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}2}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}M}^*\\\vdots\\\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}M}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}1}^*,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}M}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}2}^*,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}M}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}3}^*,\cdots,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}M}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}M}^*\\\boldsymbol{x}_{\mathrm{vir}1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}1}^*,\boldsymbol{x}_{\mathrm{vir}1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}2}^*,\boldsymbol{x}_{\mathrm{vir}1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}3}^*,\cdots,\boldsymbol{x}_{\mathrm{vir}1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}M}^*\end{pmatrix} \tag{5}$$

即

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_{\mathrm{vir}1}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}1}^*,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}2}^*,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}3}^*,\cdots,\boldsymbol{x}_{\mathrm{rel}M}^*)]\\&=\mathrm{E}[(k_1x_{\mathrm{rel}1}+k_2x_{\mathrm{rel}2}+k_3x_{\mathrm{rel}3}+\cdots+k_Mx_{\mathrm{rel}M})\\&\quad\cdot(x_{\mathrm{rel}1}^*,x_{\mathrm{rel}2}^*,x_{\mathrm{rel}3}^*,\cdots,x_{\mathrm{rel}M}^*)]\end{aligned}$$

所以 $x_{\mathrm{vir}1}$ 是 $x_{\mathrm{rel}1},x_{\mathrm{rel}2},x_{\mathrm{rel}3},\cdots,x_{\mathrm{rel}M}$ 的线性组合，可表示为

$$x_{\mathrm{vir}1}=k_1x_{\mathrm{rel}1}+k_2x_{\mathrm{rel}2}+k_3x_{\mathrm{rel}3}+\cdots+k_Mx_{\mathrm{rel}M} \tag{6}$$

当存在测向模糊时，即至少存在两个不同的角度 θ_1,θ_2，使得

$$\begin{pmatrix}e^{j2\pi x_1\sin(\theta_1)/\lambda}\\e^{j2\pi x_2\sin(\theta_1)/\lambda}\\e^{j2\pi x_3\sin(\theta_1)/\lambda}\\\vdots\\e^{j2\pi x_M\sin(\theta_1)/\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{j2\pi x_1\sin(\theta_2)/\lambda}\\e^{j2\pi x_2\sin(\theta_2)/\lambda}\\e^{j2\pi x_3\sin(\theta_2)/\lambda}\\\vdots\\e^{j2\pi x_M\sin(\theta_2)/\lambda}\end{pmatrix}$$

显然有

$$\begin{aligned}e^{j2\pi x_{\mathrm{vir}1}\sin(\theta_1)/\lambda}&=k_1e^{j2\pi x_1\sin(\theta_1)/\lambda}+k_2e^{j2\pi x_2\sin(\theta_1)/\lambda}+\cdots\\&+k_Me^{j2\pi x_M\sin(\theta_1)/\lambda}=e^{j2\pi x_{\mathrm{vir}1}\sin(\theta_2)/\lambda}=k_1e^{j2\pi x_1\sin(\theta_2)/\lambda}\\&+k_2e^{j2\pi x_2\sin(\theta_2)/\lambda}+\cdots+k_Me^{j2\pi x_M\sin(\theta_2)/\lambda}\end{aligned} \tag{7}$$

同理对 $e^{j2\pi x_{\mathrm{vir}2}\sin(\theta_1)/\lambda},\cdots,e^{j2\pi x_{\mathrm{vir}N}\sin(\theta_1)/\lambda}$ 可得同样的公式，所以利用虚拟阵元数据 $x_{\mathrm{vir}1},x_{\mathrm{vir}2},x_{\mathrm{vir}3},\cdots,x_{\mathrm{vir}N}$ 及实际阵元数据进行测向时同样产生模糊，且模糊角度不变，即不能解决测向模糊问题。

文献[9]提出了基于最小二乘估计的虚拟阵元方法，产生虚拟阵元数据如下式：

$$x_{\mathrm{vir}1}=k_1x_{\mathrm{rel}1}+k_2x_{\mathrm{rel}2}+k_3x_{\mathrm{rel}3}+\cdots+k_Mx_{\mathrm{rel}M} \quad (8)$$

其中 $(x_{\mathrm{rel}1},x_{\mathrm{rel}2},\cdots,x_{\mathrm{rel}M})^{\mathrm{T}}$ 为实际阵列的接收数据矢量，$(k_1,k_2,\cdots,k_M)^{\mathrm{T}}$ 是最小二乘准则下求得的估计参量，由式(8)可以看出，$x_{\mathrm{vir}1}$ 是 $x_{\mathrm{rel}1},x_{\mathrm{rel}2},\cdots,x_{\mathrm{rel}M}$ 的线性组合。同上可证使用虚拟阵元数据 $x_{\mathrm{vir}1},x_{\mathrm{vir}2},\cdots,x_{\mathrm{vir}N}$ 和实际阵元数据 $x_{\mathrm{rel}1},x_{\mathrm{rel}2},\cdots,x_{\mathrm{rel}M}$ 进行测向必然产生模糊，且模糊角度不变，即基于最小二乘估计的虚拟阵元方法并不能解决测向模糊问题。

另外说明：上面以虚拟阵列变换法和基于最小二乘估计虚拟阵元的方法为例，对虚拟阵元解测向模糊的可行性进行分析，通过上面的分析还可以得出，即使虚拟阵元数据不是实际阵元数据的线性组合，只要是按照一定准则由实际阵元数据产生虚拟阵元数据，当存在测向模糊时向量 $\boldsymbol{a}_1=[e^{j2\pi x_1\sin(\theta_1)/\lambda},\ e^{j2\pi x_2\sin(\theta_1)/\lambda},\cdots,e^{j2\pi x_M\sin(\theta_1)/\lambda}]^{\mathrm{T}}$ 和向量 $\boldsymbol{a}_2=[e^{j2\pi x_1\sin(\theta_2)/\lambda},e^{j2\pi x_2\sin(\theta_2)/\lambda},\cdots,e^{j2\pi x_M\sin(\theta_2)/\lambda}]^{\mathrm{T}}$ 的对应项相等，则 $\boldsymbol{a}_1$ 中任意多个元素的任意组合与 $\boldsymbol{a}_2$ 中相同多个元素的相同组合相等，即在这种情况下本文认为利用虚拟阵元方法并不能有效的解决测向模糊问题。

3.2 仿真实验及分析

仿真实验　12 个阵元，阵元间距为 λ，快拍数为 200，信噪比为 10 dB，2 个信号源，入射方向 $[-45°\ \ 5°]$，使用基于最小二乘估计的虚拟阵元法，将实际天线阵列虚拟成间距为半波长的均匀线阵。

图 2 是 12 个实际阵元的 MUSIC 搜索谱，除了在角度 $-45°$，$5°$ 测出目标外，还测出 2 个模糊角度。图 3 利用不模糊区间产生虚拟阵元数据，可以看出测出了正确的目标方向没有出现模糊问题，图中结果看似实现解模糊，其实由图 2 看出在此变换区间 $[-5°\ 10°]$ 内并不存在模糊角度。图 4 使用仅含有模糊角度的区间产生虚拟阵元数据，此方法仅测出了模糊角。图 5 使用同时含有真实角度和模糊角度的区间产生虚拟阵元数据，结果目标真实方向和模糊角都被搜索出来，模糊角并没有消除。可见，此方法并不能有效实现解模糊。

仿真实验还使用虚拟阵列变换法产生虚拟阵元数据，将实际天线阵列虚拟成间距为半波长的均匀线阵，对单目标和多目标以及均匀稀布阵和非均匀稀布阵的情况分别进行仿真实验，所得实验结果与以上实验结果相同，即变换区间为不模糊区间时，结果可搜索出目标真实方向而无模糊，变换区间为仅含模糊角度的区间时，结果只搜索出模糊角度方向，变换区间为既含有模糊角度又含有真实目标方向时，结果两者都被搜索出来，模糊角度并没有消除。可见，虚拟阵元方法并不能有效地实现解模糊。

4　结论

本文针对稀布阵的角度模糊问题，不失一般性地以虚拟阵列变换法和基于最小二乘估计的虚拟阵元法为例分析了虚拟阵元解模糊的可行性，并扩展到一般的虚拟阵元法，从理论上分析了此类方法解测向模糊的可行性，文章还通过大量仿真实验(包括单目标、多目标)对解模糊的可行性进行了验证，由于虚拟阵元接收数据的产生依赖于真实阵元数据的变换区间，在这种情况下本文认为此类方法并不能有效的实现解模糊。

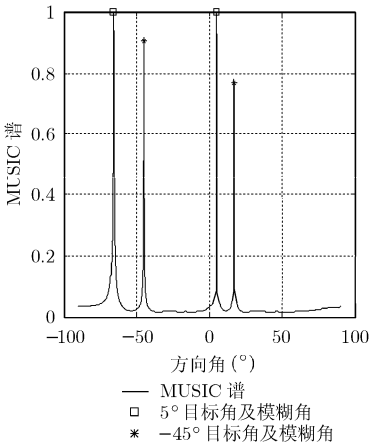

图 2 实际阵元 MUSIC 谱
(间距大于半波长产生模糊)

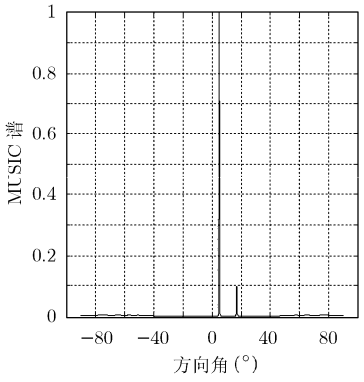

图 3 最小二乘虚拟阵元，
虚拟区间为 $[-5°\ 10°]$

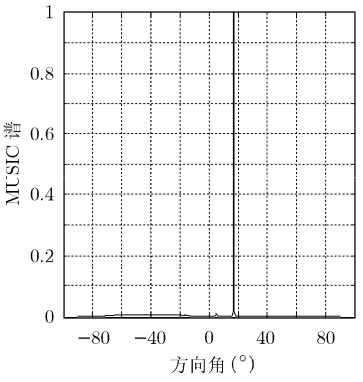

图 4 最小二乘虚拟阵元，
虚拟区间为 $[15°\ \ 35°]$

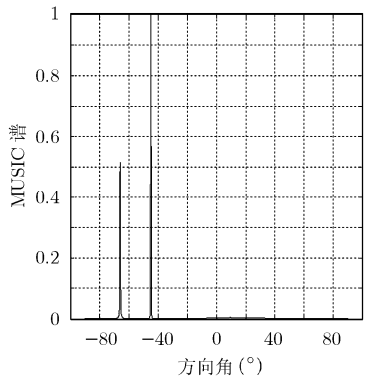

图 5 最小二乘虚拟阵元，虚拟区间为 [−70° − 40°]

参 考 文 献

[1] Schmidt R O. Multiple location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280.

[2] Roy R and Kailath T. ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, speech and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984–995.

[3] Si WJ. Study on new method of resolving angle ambiguity. *Guidance & Fuze*, 2007, 28(19): 44–47.

[4] Pesavento M, Gershman A, and Luo Z Q. Robust array interpolation using second order cone programming. *IEEE Signal Processing Letters*, 2002, 9(1): 8–11.

[5] Hyberg P, Jansson M, and Ottersten B. Array interpolation and bias reduction. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(10): 2711–2720.

[6] Wang Yong-liang, Chen Hui and Wan Shan-hu. An effective DOA method via virtual array transformation. *Science in China* (*Series E*), 2001, 44(1): 75–82.

[7] 王明哲, 王俊. 一种改进的虚拟变换自适应波束形成方法.电子与信息学报, 2009, 31(1): 101–103.
Wang Ming-zhe and Wang Jun. An improvement on adaptive beamforming via virtual array transformation. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(1): 101–103.

[8] Swingler D and Walker R. Line array beamforming using linear prediciton for aperture extrapolation and interpolation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1989, 37(1): 16–30.

[9] 胡鹏, 杨士莪, 杨益新. 基于最小二乘估计的虚拟阵元波束形成仿真. 计算机仿真, 2007, 24(1): 323–325.
Hu Peng, Yang Shi-e, and Yang Yi-xin. Simulation of virtual array beamforming algorithm based on least squares estimator. *Computer Simulation*, 2007, 24(1): 323–325.

[10] 宋石磊, 于振海, 赵国庆. 虚拟阵列测向性能分析. 长沙航空职业技术学院学报, 2006, 6(4): 49–52.
Song Shi-lei, Yu Zhen-hai, and Zhao Guo-qing. The DOA estimates based on virtual array lateral performance. *Journal of Changsha Aeronautical Vocational and Technical College*, 2006, 6(4): 49–52.

董国英： 女，1984 年生，硕士生，从事阵列信号处理方面的研究.
陶海红： 女，1978 年生，教授，研究方向为阵列信号处理等.
廖桂生： 男，1963 年生，教授，博士生导师，研究方向为阵列信号处理、空时自适应信号处理等.