一种任意窗函数的复数调制重叠变换的快速算法

葛 云　　章 东
(南京大学电子科学与工程系　南京　210093)

摘　要：该文提出了一种任意窗函数的复数调制重叠变换(MCLT)的快速计算方法。针对输入信号长度为 $2M$ 的 MCLT，该算法将其转化为长度为 $2M$ 的 II 型离散 Hartley 变换，然后对后者运用快速算法。与现有算法相比，该方法能够达到最少的算术运算量。

关键词：音频处理；　重叠转换；　快速算法；　离散 Hartley 转换
中图分类号：TP391.42　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2010)03-0747-03
DOI:10.3724/SP.J.1146.2009.00204

New Fast Algorithm for Modulated Complex Lapped Transform with Arbitrary Windowing Function

Ge Yun　　Zhang Dong
(*Department of Electronic Science and Engineering*, *Nanjing University*, *Nanjing* 210093, *China*)

Abstract: A new algorithm for efficient computation of the Modulated Complex Lapped Transform (MCLT) with arbitrary windowing function is presented. For the MCLT of length-$2M$ input data sequence, the proposed method is based on computing a length-$2M$ type-II generalized discrete Hartley transform. Comparison with existing algorithms shows that the proposed method achieves the minimal number of arithmetic operations.

Key words: Audio processing; Lapped transform; Fast algorithm; Discrete Hartley transform

1　引言

复数调制重叠变换 (MCLT) 是一种把实值信号转化为复数域的变换[1]，MCLT 的实数部分与同一信号的 MLT 相同，而虚数部分携带着相位的信息。因此，MCLT 可被用于需要相位信息的信号处理问题，如声学水印和识别[2]。MCLT 较之离散傅立叶变换(DFT)的优势在于它的重建公式不是唯一的，因此，它能够更加灵活地应用于音频增强和译码系统。

由于 MCLT 涉及较多的运算，有关其快速算法近年来吸引了学者的关注。Malvar[1] 进一步提出了一种经由长为 $2M$ 的 DFT 来计算长度为 $2M$ 的 MLCT 快速算法。Dai 和 Chen[3]发展了一种以 DCT 为基础的高效计算 MCLT 的方法，他们的算法对任何对称窗函数均适用。 对于一个正弦窗，Dai 的算法相比文献[1]提出的算法需要稍多的算术运算量。此后，他们又对该算法提出了改进[4]，值得指出的是，文献[4]中的方法适用于任意窗函数。Britanak[5]提出了基于正弦窗函数的快速算法，Dai[6]在此基础上发展，在 M 为二次幂的条件下，提出新的算法，其算术运算量，基本和文献[4]相似。

本文针对任意窗函数的 MCLT，提出一种新的快速算法。该方法将 MCLT 转换为 GDHT-II 型[7,8]，然后对后者运用快速算法。较之已有方法，本文方法能够达到最少的算术运算量。

2　新型的快速算法

一个长度为 $2M$ 的实输入数据序列 $\{x(n)\}$, $n=0,1,\cdots,2M-1$，其 MLCT 变换[1]定义为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)p(n,k),\quad k=0,1,\cdots,M-1 \tag{1}$$

其中

$$p(n,k)=p_c(n,k)-jp_s(n,k) \tag{2}$$

$$p_c(n,k)=\sqrt{\frac{2}{M}}h(n)\cos\left[\frac{\pi}{4M}(2n+1+M)(2k+1)\right] \tag{3}$$

$$p_s(n,k)=\sqrt{\frac{2}{M}}h(n)\sin\left[\frac{\pi}{4M}(2n+1+M)(2k+1)\right] \tag{4}$$

这里的 $h(n)$为窗函数。

由式(3)，可以得到

$$\begin{aligned}&p_c(n,2M-1-k)\\&=\sqrt{\frac{2}{M}}h(n)\cos\left[\frac{\pi}{4M}(2n+1+M)(4M-2k-1)\right]\\&=(-1)^{M+1}p_c(n,k)\end{aligned} \tag{5}$$

类似地

$$\begin{aligned}&p_s(n,2M-1-k)\\&=\sqrt{\frac{2}{M}}h(n)\sin\left[\frac{\pi}{4M}(2n+1+M)(4M-2k-1)\right]\\&=(-1)^{M}p_s(n,k)\end{aligned} \tag{6}$$

上述式子表明对于 $k=0,1,\cdots,2M-1$, $p_c(n,k)$和 $p_s(n,k)$满足对称或反对称性质，因此，计算 $X(k)$, k

2009-02-20 收到，2009-07-21 改回
江苏省教育厅(JHB06-01)资助课题
通信作者：葛云　geyun@nju.edu.cn

$=0,1,\cdots,M-1$,可以通过计算序号为偶数的 $X(k)$，即 $k=0,2,4,\cdots,2M-2$ 得到。对于偶数 k，式(3)变为

$$\begin{aligned}&p_c(n,2k)\\&=\sqrt{\frac{2}{M}}h(n)\cos\left[\frac{\pi}{4M}(2n+1+M)(4k+1)\right]\\&=\sqrt{\frac{2}{M}}h(n)\cos\left[\frac{\pi}{4}(4k+1)+\frac{\pi}{4M}(2n+1)(4k+1)\right]\\&=(-1)^k\sqrt{\frac{1}{M}}h(n)\mathrm{cas}\frac{-\pi(2n+1)(4k+1)}{4M},\\&\qquad k=0,1,\cdots,M-1\end{aligned}\tag{7}$$

其中 $\mathrm{cas}\theta=\cos\theta+\sin\theta$。

类似地

$$\begin{aligned}&p_s(n,2k)\\&=\sqrt{\frac{2}{M}}h(n)\sin\left[\frac{\pi}{4M}(2n+1+M)(4k+1)\right]\\&=\sqrt{\frac{2}{M}}h(n)\sin\left[\frac{\pi}{4}(4k+1)+\frac{\pi}{4M}(2n+1)(4k+1)\right]\\&=(-1)^k\sqrt{\frac{1}{M}}h(n)\mathrm{cas}\frac{\pi(2n+1)(4k+1)}{4M},\\&\qquad k=0,1,\cdots,M-1\end{aligned}\tag{8}$$

将式(1)改写为

$$X(k)=X_c(k)-jX_s(k)\tag{9}$$

这里的 $X_c(k)$和 $X_s(k)$分别代表 $X(k)$的实部和虚部，其定义为

$$X_c(k)=\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)p_c(n,k)\tag{10a}$$

$$X_s(k)=\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)p_s(n,k),\quad k=0,1,\cdots,M-1\tag{10b}$$

从式(5)和式(6)，容易得到

$$X_c(2M-1-k)=(-1)^{M+1}X_c(k)\tag{11a}$$

$$X_s(2M-1-k)=(-1)^M X_s(k),\quad k=0,1,\cdots,M-1\tag{11b}$$

将式(7)代入式(10a)，得到

$$\begin{aligned}X_c(2k)&=(-1)^k\sqrt{\frac{1}{M}}\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)h(n)\\&\quad\cdot\mathrm{cas}\frac{-\pi(2n+1)(4k+1)}{4M}\\&=(-1)^k\sqrt{\frac{1}{M}}\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)\frac{h(n)}{-2\sin\frac{\pi(2n+1)}{4M}}\\&\quad\cdot\left(-2\sin\frac{\pi(2n+1)}{4M}\right)\mathrm{cas}\frac{-\pi(2n+1)(4k+1)}{4M}\\&=(-1)^k\sqrt{\frac{1}{M}}\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)h'(n)\left(-2\sin\frac{\pi(2n+1)}{4M}\right)\\&\quad\cdot\mathrm{cas}\frac{-\pi(2n+1)(4k+1)}{4M}\end{aligned}\tag{12}$$

其中

$$h'(n)=\frac{h(n)}{-2\sin\frac{\pi(2n+1)}{4M}}\tag{13}$$

利用三角函数性质

$$-2\sin(\alpha)\mathrm{cas}(-\beta)=\mathrm{cas}(\beta-\alpha)-\mathrm{cas}(\alpha+\beta)\tag{14}$$

式(12)变为

$$\begin{aligned}X_c(2k)&=(-1)^k\sqrt{\frac{1}{M}}\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)h'(n)\\&\quad\cdot\left[\mathrm{cas}\frac{\pi(2n+1)2k}{2M}-\mathrm{cas}\frac{\pi(2n+1)(2k+1)}{2M}\right]\end{aligned}\tag{15}$$

类似地

$$\begin{aligned}X_s(2k)&=(-1)^k\sqrt{\frac{1}{M}}\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)h'(n)\left(-2\sin\frac{\pi(2n+1)}{4M}\right)\\&\quad\cdot\mathrm{cas}\frac{\pi(2n+1)(4k+1)}{4M}\\&=(-1)^k\sqrt{\frac{1}{M}}\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)h'(n)\\&\quad\cdot\left[\mathrm{cas}\frac{-\pi(2n+1)(2k+1)}{2M}-\mathrm{cas}\frac{-\pi(2n+1)2k}{2M}\right]\end{aligned}\tag{16}$$

令

$$Y(k)=\sqrt{\frac{1}{2M}}\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)h'(n)\mathrm{cas}\frac{\pi(2n+1)k}{2M}\tag{17}$$

$$Z(k)=\sqrt{\frac{1}{2M}}\sum_{n=0}^{2M-1}x(n)h'(n)\mathrm{cas}\frac{-\pi(2n+1)k}{2M},\quad k=0,1,\cdots,2M-1\tag{18}$$

容易验证

$$Z(2M-k)=-Y(k),\quad k=0,1,\cdots,2M-1\tag{19}$$

式(15)和式(16)变为

$$X_c(2k)=\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}[Y(2k)-Y(2k+1)]\tag{20}$$

$$\begin{aligned}X_s(2k)&=\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}[Z(2k+1)-Z(2k)]\\&=\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}[Y(2M-2k)-Y(2M-2k-1)],\\&\qquad k=0,1,\cdots,M-1\end{aligned}\tag{21}$$

有 $Y(2M)=-Y(0)$。

由式(17)定义的 $Y(k)$是一个输入数据序列 $x(n)$ $h'(n)$的归一化的长度为$2M$的GDHT-II，因而，可借由FHT算法将其算出。由 $Y(k)$的值，$k=0,1,\cdots,2M-1$，MCLT系数的实部和虚部 $X_c(2k)$ 和 $X_s(2k)$，$k=0,1,\cdots,M-1$，可以很简单的从式(20)和式(21)获取。一旦得到了偶下标系数，奇下标系数可由对称特性(11a)和(11b)推演出。实现该算法的流程图见图1。

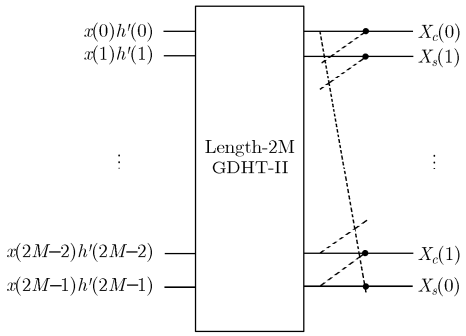

图 1 算法流程图

上述讨论表明本文方法的计算复杂度是一个长度为 $2M$ 的 GDHT-II，加上式(20)和式(21)中所需的算术运算。 对于 GDHT-II 型，可以采用已有的快速算法提高计算效率。对于 M 为 2 的幂次方情况，使用文献[7]提出的算法，长度为 $2M$ 的 GDHT-II 需要 $M\log_2 M$ 次乘法和 $3M\log_2 M+4$ 次加法。此外，输入信号 $x(n)h'(n)$ 需要进行 $2M$ 次乘法，式(20)和式(21)的计算中需要 $2M$ 加法。由于因子 $1/\sqrt{2}$ 可被吸收进 GHDT 的规一化因子或者纳入量化部分，故而在式(20)和式(21)中无须乘法运算。因此，本文方法的总算术量为 $3M\log_2 M+2M+4$ 加法和 $M\log_2 M+2M$ 乘法。特别地，当使用的窗函数为正弦窗时(这是实际中最常用的情况)，即 $h(n)=-2\sin[\pi(2n+1)/(4M)]$ 时，则式(13)变为 $h'(n)=1$，此时，输入信号不需要进行乘法运算，因此，对于正弦窗函数，本文方法的运算量为 $3M\log_2 M+2M+4$ 加法和 $M\log_2 M$ 乘法。

若 M 不是二次幂的情况，长度为 $2M$ 的 GDHT-II 可由文献[8]中提出的快速算法计算。

在 M 为二次幂的条件下，本文提出的算法与其它方法，在计算复杂度方面的对比，详见表 1。由该表可见，对于任意窗函数，本文的算法不仅乘法运算次数最少(与文献[4]相同)，同时也是在现有 MLCT 算法中执行加法操作需求最少的。在文献[3,4]所报告的算法中，作者通过把正弦窗函数吸收进 DCT-IV 的核函数，可把 $2M$-点的 MCLT 系数的实部和虚部转换进两个 M-点的 DCT-II 系数中去。在本文的算法中，通过把正弦窗函数吸收入 GDHT-IV 核函数， 成功地把 $2M$-点的 MLCT 系数的实部和虚部转换进了 $2M$-点 GDHT-II 系数的计算。应该指出，文献[3,4]中提出的算法可以被分别应用于对称窗函数和任何窗函数。本文的算法支持任意函数。

表 1 各种算法的计算复杂度

算法	窗函数选择	乘法计算量	加法计算量
文献[1]	正弦	$M\log_2 M+M$	$3M\log_2 M+3M-2$
文献[3]	对称	$M\log_2 M+3M$	$3M\log_2 M+4M$
	正弦	$M\log_2 M+M$	
文献[4]	任意	$M\log_2 M+2M$	$3M\log_2 M+4M$
	正弦	$M\log_2 M$	
本文方法	任意	$M\log_2 M+2M$	$3M\log_2 M+2M+4$
	正弦	$M\log_2 M$	

3 结论

本文提出了一种使用任意窗函数进行高效 MCLT 计算的新型算法。 针对一个 length-$2M$ 输入数据序列的 MCLT，MCLT 系数的实部和虚部可经由同一信号的长度为 $2M$ GDHT-II 系数得到。对比于此前的其它算法，本文提出的算法，可达到实数乘法操作数最小和总算术操作数最小，而节约约 5%的效果。此外，该方法具备规则的结构，故而，它对软硬件开发应用均可能有用。

参 考 文 献

[1] Malvar H S. Fast algorithm for the modulated complex lapped transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 2003, 10(1): 8–10.

[2] Jose Juan Garcia-Hernandez and Mariko Nakano-Miyatake. Data hiding in audio signal using Rational Dither Modulation. *IEICE Electronics Express*, 2008, 5(7): 217–222.

[3] Dai Q and Chen X. New algorithm for modulated complex lapped transform with symmetrical window function. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(12): 925–928.

[4] Chen X and Dai Q. A novel DCT-based algorithm for computing the modulated complex lapped transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4480–4484.

[5] Britanak V, Yip Y, and Rao K R. Discrete Cosine and Sine Transforms: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations. New York: Academic, 2007: 117–195.

[6] Dai Xingdong and Meghanad D. Wagh fast algorithm for modulated complex lapped transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 2009, 16(1): 30–32.

[7] Hu N C, Chang H I, and Ersoy O K. Generalized discrete Hartley transforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, 40(12): 2931–2940.

[8] Bi G, Chen Y, and Zeng Y. Fast algorithms for generalized discrete Hartley transform of composite sequence lengths. *IEEE Transactions on Circuits System. II*, 2000, 47(9): 893–901.

葛　云：　男，1970年生，博士，副教授，从事医学图像处理、医学物理、计算机视觉、快速算法等方面的研究.

章　东：　男，1969年生，博士，教授，从事信号处理、医学超声等方面的研究.