

## 基于双变量阈值的非下采样Contourlet变换图像去噪

贾建<sup>①②</sup> 焦李成<sup>①</sup> 项海林<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(西安电子科技大学智能信息处理研究所 西安 710071)

<sup>②</sup>(西北大学数学系 西安 710069)

**摘要:** 系数阈值是流行的去噪方法, 其中阈值方式与大小的选择是一个重要的技术问题。该文依据非下采样Contourlet分解系数与其父系数之间的相关性, 给出非高斯双变量分布, 对该模型应用Bayes估值理论推导出相应的非线性双变量阈值函数, 综合非下采样Contourlet分解和双变量阈值函数, 提出一种基于双变量阈值的非下采样Contourlet变换图像去噪方法(NSCTBI)。对于被加性高斯白噪声污染的图像, 实验中将NSCTBI方法与非下采样Contourlet变换、小波域双变量阈值去噪等方法进行了比较, 结果表明在大多数情况下, NSCTBI的PSNR结果相比这些方法高出0.5至2.3dB, 在边缘特征方面保持了良好的视觉效果。

**关键词:** 去噪; 非下采样 Contourlet 变换; 双变量阈值; Bayes 估计

中图分类号: TP391.4

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)03-0532-05

## Using Bivariate Threshold Function for Image Denoising in NSCT Domain

Jia Jian<sup>①②</sup> Jiao Li-cheng<sup>①</sup> Xiang Hai-lin<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Institute of Intelligent Information Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

<sup>②</sup>(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

**Abstract:** As the main prevailing denoising method, how the threshold function works and what's the threshold value are the greatest importance techniques. Consider the dependencies between the coefficients and their parents, a non-Gaussian bivariate distribution is given, and corresponding nonlinear threshold function is derived from the model using Bayesian estimation theory. According to non-subsampled Contourlet transform and bivariate threshold function, a novel Non-Subsampled Contourlet Transform based on Bivariate threshold function (NSCTBI) for image denoising is proposed. This scheme achieves enhanced estimation results for images that are corrupted with additive Gaussian noise over a wide range of noise variance. To evaluate the performance of the proposed algorithms, the results are compared with existent algorithms, such as non-subsampled Contourlet transform and wavelet-based bivariate threshold function method for image denoising. The simulation results indicate that the proposed method outperforms the others 0.5~2.3dB in PSNR, and keep better visual result in edges information reservation as well.

**Key words:** Denoising; Non-subsampled Contourlet transform; Bivariate threshold function; Bayes estimation

### 1 引言

自从 Mallat 给出小波(Wavelet)的快速分解方法之后, 小波变换被广泛应用于各个领域当中, 并迅速从数学、信号处理拓展到物理、天文、地理、生物、化学等其它各个学科。作为图像处理的一个重要领域, 图像去噪方法也因为小波的引入而得到了长足的发展。

由 Donoho<sup>[1]</sup>在 1995 年给出的阈值收缩方法(Shrink)为小波系数的非线性处理提供了一种可行的处理方案, 并且取得了良好的处理效果, 由此在图像去噪领域掀起了一股热潮, 很多方法都沿用这一思想继续向下发展, 即通过在小波

变换域中对小波系数作一定程度的缩放, 由此估计原始信号系数的大小, 进而重构得到去噪后图像。与此同时, 许多优秀的基于小波的方法仍旧不断地涌现出来。在图像去噪领域, 从早先的软硬阈值去噪到后来的 Bayes<sup>[2,3]</sup>阈值, 到尺度间相关系数阈值方法, 再到高维空间下的系数阈值<sup>[4]</sup>, 仅从阈值方法的改进就使得小波去噪方法不断焕发出灿烂的生命力, 而这些方法的提出有小波扎实的理论基础支持, 更具有信服性。除此之外, 由于小波变换是多尺度多分辨分解, 对变换域中的尺度关系探索的不断深入也使得小波去噪效果不断提高。

本文借鉴小波系数尺度间的相关性, 结合目前多尺度、多分辨分析的发展, 将其处理思想扩展到非下采样 Contourlet 变换(NSCT)域中, 通过考虑变换域父子系数的

相关性给出一种基于双变量阈值的非下采样 Contourlet 变换阈值去噪方法(NSCTBI), 由于该变换是平移不变的且具有足够的冗余信息, 因此可以有效提取图像中的方向信息, 使得去噪后的图像更好地满足人眼的视觉要求。在实验中与非下采样 Contourlet 变换、小波域双变量阈值去噪等方法进行了比较, 结果表明 NSCTBI 的去噪性能有了明显提高, 与目前文献中常见的两种优秀算法<sup>[5,6]</sup>相比, 去噪效果也具有一定的可比性。

## 2 非下采样 Contourlet 变换

小波变换以其时频局域化和多尺度、多分辨思想被广泛应用于图像、语音等信号处理领域。小波变换在分析点状瞬态特征的奇异性时是最优的, 但由于基函数的各向同性导致方向选择性较差, 在表示图像结构的直线、曲线奇异性时不是最优的, 不能有效地捕捉轮廓信息, 因此变换不能充分利用图像的几何正则性。

由于认识到小波在表示图像几何规则上的缺陷性, 很多学者关注于如何更有效地表示图像中的几何结构信息。1999年Candès等人提出了Curvelet变换<sup>[7]</sup>, 该函数在一定度量标准下可以最优表示连续域中具有曲线奇异的函数。受Curvelet变换启发, 2002年Do和Vetterli提出Contourlet变换(CT)<sup>[8]</sup>, 该变换继承了Curvelet变换的各向异性尺度关系, 具有更加“稀疏”的空间与方向表示形式, 其利用Laplace塔形分解(LP)和方向滤波器组(DFB)实现了一种多分辨、多尺度、多方向的图像表示方法, 由于具有很好的方向性和各向异性, 该方法可以抓住图像的几何结构, 能准确地将图像中的边缘捕获到不同尺度、不同频率的子带中。Contourlet变换中的Laplace塔形分解和方向滤波带分解中都有上下采样, 为了保留Contourlet变换的频率分割结构同时实现平移不变性, 将原Contourlet变换中对图像下采样的步骤去掉, 构造相应的分级和各方向滤波器, 便得到非下采样 Contourlet 变换。

Cunha、Zhou 和 Do 于 2005 年提出了非下采样的 Contourlet 变换(NSCT)<sup>[9]</sup>并研究了相关应用, 提出的 NSCT 结构基于一个非下采样的塔型结构和非下采样的方向滤波带分解, 利用 à trous 算法实现并生成一种灵活的多尺度、多方向且平移不变的图像分解方法, 具有快速实现算法。算法的关键是不可分两通道非下采样滤波带, 其中非下采样塔形分解结构是通过多级迭代的方式实现的, 通过这组滤波器, 图像被分为 1 个二维低频子带和 1 个二维高频子带。要实现多级结构, 只需对低频子带继续迭代滤波即可。NSCT 设计的非下采样滤波带放宽了约束条件, 生成的滤波带具有更好的频域选择性和规则性, 相比早期提出的 Contourlet 变换, 滤波带的设计能够得到更好的频域选择性, 进而更好地进行子带方向分解。相比于小波分解, NSCT 同样是多尺度多分辨分析, 但 NSCT 同时还是多方向分析, NSCT 方向分解的灵

活性可以使得在图像分解过程中得到更多的细节信息。图1显示了NSCT的分解流程图。

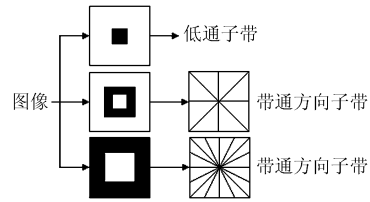


图1 非下采样滤波带结构实现NSCT

## 3 尺度间相关变量阈值

绝大多数非线性小波阈值去噪认为小波系数间是独立的, 但事实上却有很强的相关性。Sendur 和 Selesnick 根据小波系数与其父系数之间的相关性, 提出一种叫做 BivShrin<sup>[10,11]</sup>的去噪方法, 通过非高斯双变量模型描述尺度间系数的相关性, 随后通过最大后验概率(MAP)得到与分布相匹配的非线性双变量阈值函数, 进而执行阈值去噪处理。由于变换域中 NSCT 系数的分布特性与小波系数的分布具有类似的特点, 且相邻尺度间的 NSCT 系数同样具有很强的相关性, 即当前尺度内系数与其父系数(上一级相应位置的系数)以及同一尺度不同方向子带内兄弟系数之间都具有相关性。沿袭该方法在小波域中的去噪处理思想, 我们将其拓展到非下采样 contourlet 变换域中, 提出一种基于双变量阈值的非下采样 contourlet 变换图像去噪方法(NSCTBI)。

考虑当前系数与其父系数之间的关系, 令  $w_2$  表示  $w_1$  的父系数( $w_2$  与  $w_1$  处于相同的位置, 只是在下一个尺度内), 因此对带噪图像分解后有

$$\begin{aligned} y_1 &= w_1 + \varepsilon_1 \\ y_2 &= w_2 + \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $y_1, y_2$  表示带噪图像 NSCT 分解系数的观测值,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  表示独立高斯噪声系数,  $w_1, w_2$  为理想干净图像对应的 NSCT 分解系数。因此带噪图像 NSCT 分解系数可以简写为以下向量形式:

$$\mathbf{y} = \mathbf{w} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

其中  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 。

随后利用观察值向量  $\mathbf{y}$  估计  $\mathbf{w}$ , 可采用标准 MAP 估计将此形式转化为  $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{w}} p_{\mathbf{w}|\mathbf{y}}(\mathbf{w}|\mathbf{y})$ , 再利用贝叶斯法则可得

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{w}} [\log(p_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{y} - \mathbf{w})) + \log(p_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}))] \quad (3)$$

从式(3)可知, 欲求解则必须知道噪声系数与原图像 NSCT 分解系数的概率分布。假设噪声密度函数  $p_{\boldsymbol{\varepsilon}}$  服从均值为 0, 方差为  $\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2$  的高斯分布, 则

$$p_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2} \exp\left[-\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2\sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2}\right] \quad (4)$$

根据 NSCT 分解系数的分布情况, 不妨用以下的圆形对称概率分布进行拟合, 在该分布中  $w_1$  与  $w_2$  不相关但不独立:

$$p_w(\mathbf{w}) = \frac{3}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{\sqrt{3}}{\sigma} \sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right] \quad (5)$$

令  $f(\mathbf{w}) = \log(p_w(\mathbf{w}))$ , 则  $\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \arg \max_{\mathbf{w}} \left[ -\frac{(y_1 - w_1)^2}{2\sigma_\epsilon^2} - \frac{(y_2 - w_2)^2}{2\sigma_\epsilon^2} + f(\mathbf{w}) \right]$ , 若  $p_w(\mathbf{w})$  严格凸且可导, 则求解过程

可转化为求解以下方程组:

$$\frac{y_1 - \hat{w}_1}{\sigma_\epsilon^2} + f_1(\hat{\mathbf{w}}) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{y_2 - \hat{w}_2}{\sigma_\epsilon^2} + f_2(\hat{\mathbf{w}}) = 0 \quad (7)$$

其中  $f_1, f_2$  分别表示  $f(\mathbf{w})$  对  $w_1$  和  $w_2$  的偏导数。

将  $f(\mathbf{w}) = \log\left(\frac{3}{2\pi\sigma^2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{\sigma} \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$  代入式(6), 式(7),

便可以解得双变量联合阈值函数:

$$\hat{w}_1 = \frac{\left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - \frac{\sqrt{3}\sigma_\epsilon^2}{\sigma}\right)_+}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \cdot y_1 \quad (8)$$

基于双变量阈值的非下采样 Contourlet 变换图像去噪算法流程如下:

步骤 1 将含噪图像进行 NSCT 分解得到不同尺度不同方向的系数  $y_1$ ;

步骤 2 若  $y_1$  所在尺度与其父尺度具有相同的方向分解数, 则其父尺度上相同分解方向内同一位置的系数  $y_2$  与  $y_1$  共同构成系数向量  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ ; 若  $y_1$  所在尺度与其父尺度具有不同的方向分解数, 则在其父尺度上选取包含该分解方向的子带, 该子带上同一位置的系数  $y_2$  与  $y_1$  共同构成系数向量  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ , 对最低频子带系数不作处理;

步骤 3 利用式(8)对当前系数  $y_1$  进行阈值处理, 抑制噪声系数, 得到  $\hat{w}_1$ 。其中每个子带中的噪声系数方差  $\sigma_\epsilon^2$  可对模拟噪声经 NSCT 分解后的系数采用蒙特卡罗方法估计求得, NSCT 分解系数真值对应的标准差可估计为  $\hat{\sigma} = \sqrt{(\hat{\sigma}_{y_1}^2 - \hat{\sigma}_\epsilon^2)_+}$ ,  $\hat{\sigma}_{y_1}^2$  由系数  $y_1$  局部方形窗口邻域内系数对应的方差确定;

步骤 4 对阈值后的 NSCT 系数进行逆 NSCT 变换得到去噪图像。

传统的去噪方法常假设分解得到的变换系数间相互独立而忽略其相关性。在式(8)中若不考虑父系数的影响, 即令  $y_2 = 0$ , 则  $w_1$  的 MAP 估计对应为软阈值函数  $\hat{w}_1 = \text{sign}(y_1) \cdot (|y_1| - \sqrt{3}\sigma_n^2/\sigma)_+$ , 此时阈值函数具有统一的阈值大小  $T = \sqrt{3}\sigma_n^2/\sigma$ , 不再受其父系数的影响。

## 4 实验结果

这一节, 对  $512 \times 512$  大小 Lena 图像和 Barbara 灰度图像分别进行实验, 验证算法对加性高斯白噪声的去噪能力, 处理图像来源自 [http://decsai.ugr.es/~javier/denoise/test\\_](http://decsai.ugr.es/~javier/denoise/test_)

images, 估计局部参数时使用的局部窗口大小为  $15 \times 15$ 。为验证本文算法的性能, 首先为原始图像添加零均值高斯白噪声, 标准差  $\sigma$  从 20 变化到 80, 将此算法与小波方法, Contourlet 方法, NSCT 方法和 BivShrink 方法做对比实验。实验中采用双正交 Daubechies 9/7 小波进行分解, Contourlet 变换由工具包<sup>[12]</sup>实现, 对 Contourlet 中 Laplacian 分解过程使用同样的双正交滤波带; BivShrink 结果由 <http://taco.poly.edu/WaveletSoftware/index.html> 得到的软件运行给出结果; NSCT 结果同样由工具包实现, 处理过程按照文献[9]所指引步骤完成。

为公平起见, 对应 CT, NSCT 和 NSCTBI 中分解层数都设定为 5 层, 分解方向由粗尺度到细尺度分别为 4, 8, 8, 16, 16。表 1 给出数值结果, 以峰值信噪比 (PSNR) 作为度量标准, 可以看到 NSCTBI 方法相比 BivShrink 方法普遍提高了 0.5-2.3 dB, 相比 NSCT 方法提高了 0.1-1.4 dB。图 2 显示当噪声标准差  $\sigma = 20$  时, Barbara 原图、噪声图与各种去噪方法对应的局部放大效果图。图 2(a), 2(b) 分别为原图与噪声图, 小波去噪 PSNR 结果为 25.4767 dB (图 2(c)), CT (图 2(d)), BivShrink (图 2(e)) 与 NSCT 方法 (图 2(f)) 去噪 PSNR 值分别为 26.0297 dB, 28.2245 dB 和 29.3659 dB, 而 NSCTBI 去噪结果可以达到 30.5538 dB (图 2(g)), 并且视觉效果的改进也很明显。

接下来将 NSCTBI 方法与目前比较优秀的两种去噪方法做比较, BSL\_GSM 去噪方法<sup>[6]</sup>由 <http://decsai.ugr.es/~javier/denoise/index.html> 得到的软件执行, SA-DCT 去噪方法<sup>[5]</sup>由 <http://www.cs.tut.fi/~foi/SA-DCT> 得到的软件执行, 将 3 种方法应用于同一数据集得到的 PSNR 结果如表 1 双线后半部分表示, 星号标注部分为所有方法里最好的 PSNR 结果。从图 2 中可以看到, NSCTBI 产生的人工效应明显要少且更好地保留边缘及其它细节信息, 同质区域更加光滑,

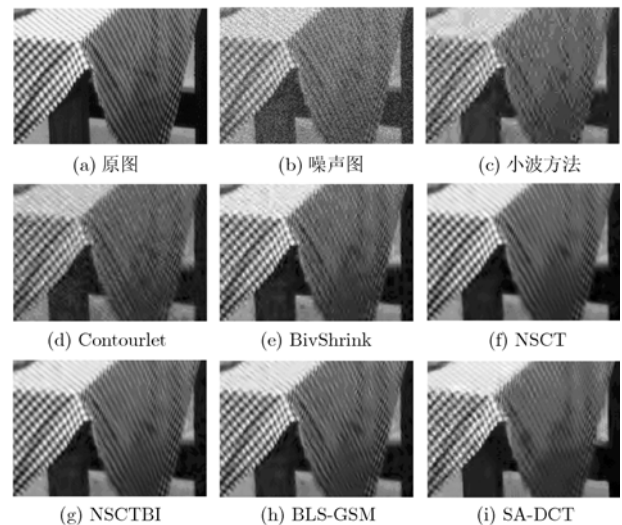


图 2  $\sigma = 20$  时, Barbara 图像和噪声图像及各种去噪方法结果的局部图

表1 不同噪声标准差  $\sigma$  对应去噪结果的 PSNR 数值

Lena		相比其它变换					相比其它方法		
$\sigma$	noisy	Wavelet	Contourlet	NSCT	BivShrink	NSCTBI	BSL-GSM	SA-DCT	
20	22.1029	28.6700	28.8741	32.1927	31.4113	<b>32.6952</b>	32.8576★	32.8411	
30	18.5779	26.4275	27.1011	30.3984	29.5612	<b>30.7844</b>	31.0595★	31.0196	
40	16.1042	25.0757	25.8362	29.1200	28.4009	<b>29.4754</b>	29.8548★	29.7966	
50	14.1424	23.7369	24.7832	27.9973	27.4218	<b>28.3083</b>	28.7720	28.7776★	
60	12.5674	22.6788	23.9794	27.1481	26.7447	<b>27.4614</b>	28.0912★	27.9789	
70	11.2390	21.8111	23.3821	26.4733	26.1101	<b>26.7115</b>	27.4659★	27.3317	
80	10.0742	21.0775	22.6484	25.9008	25.5077	<b>26.0290</b>	26.9501★	26.7215	
Barbara		相比其它变换					相比其它方法		
$\sigma$	noisy	Wavelet	Contourlet	NSCT	BivShrink	NSCTBI	BSL-GSM	SA-DCT	
20	22.0977	25.4767	26.0297	29.3659	28.2245	<b>30.5538★</b>	30.2607	29.9725	
30	18.6013	23.3417	24.1918	27.1195	26.1451	<b>28.4924★</b>	28.1944	28.1138	
40	16.0771	22.0306	22.9268	25.4828	24.7916	<b>26.8747★</b>	26.5628	26.6380	
50	14.1566	21.1508	22.0629	24.4238	23.8389	<b>25.7705★</b>	25.4616	25.4525	
60	12.5780	20.3953	21.3421	23.6225	23.2026	<b>24.7977★</b>	24.5745	24.5049	
70	11.2285	19.7607	20.8395	23.0408	22.6980	<b>24.0879★</b>	23.9323	23.8443	
80	10.0600	19.1941	20.2457	22.5314	22.3082	<b>23.4077★</b>	23.3632	23.2809	

纹理线条清晰。图 2(g)中噪声去除比较平和,具有更少的划痕状效应,大多数纹理特征都表现出清晰的结构,保留了明显的几何特征,比如桌布的纹路走向保持清晰,而在 BSL\_GSM 和 SA-DCT 方法中,桌纹的线路在去噪处理过程中被光滑掉了一些信息,看起来不够连续,在 BSL\_GSM 得到的图 2(h)中出现了间断和模糊现象,SA-DCT 方法得到的图 2(i)又显得过度平滑,对比度不够,存在细小细节的丢失。

从表 1 可以看到对于 Lena 图像来说,虽然 NSCTBI 相对 NSCT 和 BivShrink 方法有了很大提高,但是其 PSNR 数值并没有 BSL-GSM 方法高,而对 Barbara 图像来说,NSCTBI 方法是所有结果里最好的,其原因应该是由 Lena 图像中所包含的大量自由纹理信息导致的,比如 Lena 帽子上的羽毛等不规则形状物品,而 NSCTBI 方法对此特征并不能表现出其处理能力,但 BSL-GSM 是在局部区域里用高斯模型拟合数值分布,处理能力较好。NSCTBI 方法虽对大量点状信息无能为力,但其优点是能够处理含直线奇异的特征,因此对于 Barbara 这类存在大量线奇异特征信息的图像能够很好地提取特征并进行表示,从而得到了很好的处理结果。

## 5 结束语

传统的阈值去噪方法是直接在变换域中对系数做截断处理,而没有考虑到变换域尺度内、尺度间的相关性,新近出现的优秀去噪算法都是在充分考虑尺度相关性的条件下获得了良好的去噪结果。本文根据 NSCT 系数分布的特点,

将尺度间的父子相关性引入 NSCT 变换域,提出了新的阈值去噪算法,对于包含大量线性奇异特征的图像可以得到良好的去噪结果,对于包含大量点状奇异特征的图像,虽然其去噪效果有了很大改进,但并没有超过目前常见文献的最好效果,其去噪能力还有待进一步的提高。

## 参考文献

- [1] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding [J]. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1995, 41(3): 613-627.
- [2] Abramovich F, Sapatinas T, and Silverman B W. Wavelet thresholding via a Bayesian approach [J]. *J. of the Royal Statist. Society, Series B*, 1998, 60(3): 725-749.
- [3] Pi žurica A, Philips W, and Lemahieu I, et al. A joint inter- and intrascale statistical model for wavelet based Bayesian image denoising [J]. *IEEE Trans. on Image Procing*, 2002, 11(5): 545-557.
- [4] 谭山. 脊波双框架系统与自然图像的多变量统计模型[D]. [博士论文], 西安电子科技大学, 2007.  
Tan Shan. Ridgelet Bi-frame and multivariate statistical models of natural image [D]. [Ph.D. dissertation], Xidian University, 2007.
- [5] Foi A, Katkovnik V, and Egiazarian K. Pointwise shape-adaptive DCT for high-quality denoising and deblocking of grayscale and color images [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2007, 16(5): 1395-1411.
- [6] Portilla J, Strela V, and Wainwright M, et al. Image

- denoising using scale mixtures of gaussians in the wavelet domain [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2003, 12(11): 1338-1351.
- [7] Starck J L, Candès E J, and Donoho D L. The curvelet transform for image denoising [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2002, 11(6): 670-684.
- [8] Do M N and Vetterli M. The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2005, 14(12): 2091-2106.
- [9] Cunha A L, Zhou J, and Do M N. The nonsubsampling contourlet transform: theory, design, and applications [J]. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006, 15(10): 3089-3101.
- [10] Sendur L and Selesnick I W. Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency [J]. *IEEE Trans. on Signal Proc.*, 2002, 50(11): 2744-2756.
- [11] Sendur L and Selesnick I W. Bivariate shrinkage with local variance estimation [J]. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2002, 9(12): 438-441.
- [12] Do M N. Contourlet Toolbox. <http://www.ifp.uiuc.edu/~minhdo/software/>. 2007, 10.
- 贾建: 男, 1977年生, 讲师, 从事模式识别、图像处理、计算机图形学等方面的研究.
- 焦李成: 男, 1959年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为非线性理论、智能信息处理、信息安全.
- 项海林: 男, 1970年生, 博士生, 研究方向为模式识别、图像处理.