

## 利用数学形态学和方向窗的小波域双重局部维纳滤波图像去噪算法

周祚峰 水鹏朗

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 基于小波的图像去噪算法是目前图像处理研究的一个热点。该文提出了一种结合椭圆型方向窗和数学形态学的小波域双重局部维纳滤波图像去噪算法。该算法同时利用了小波域子带的方向信息和图像本身所固有的几何结构: 首先使用数学形态学把图像分成纹理区域和光滑区域两部分, 然后结合椭圆型方向窗去估计小波域方向子带中每一点的信号方差, 最后使用双重维纳滤波器对含噪图像进行去噪。实验结果表明该算法的去噪效果优于其它的采用二维可分离实小波进行图像去噪的算法。

**关键词:** 图像去噪; 双重局部维纳滤波; 椭圆型方向窗; 数学形态学

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)04-0885-04

## Wavelet-Based Image Denoising via Doubly Local Wiener Filtering Using Directional Windows and Mathematical Morphology

Zhou Zuo-feng Shui Peng-lang

(National Lab of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** Wavelet-based image denoising algorithms is a hot point in image processing applications. In this paper, a doubly local Wiener filtering algorithm using elliptic directional window and mathematical morphology is proposed, in which the mathematical morphology is first used to divide the image into texture and smooth regions, and then combine the elliptic directional window to estimate the signal variance of each wavelet coefficients in different oriented subbands, finally the doubly local Wiener filtering is used to denoise the observed image. Experiment results show that the proposed algorithm is better than the existing image denoising algorithms using 2-D real separable wavelets.

**Key words:** Image denoising; Doubly local Wiener filtering; Elliptic directional window; Mathematical morphology

### 1 引言

近年来, 基于小波的图像去噪算法在图像处理的应用中发挥了越来越重要的作用<sup>[1-10]</sup>。在这些算法中, 空间自适应算法可以达到很好的去噪效果并且具有低的运算复杂度。图像的小波域系数通常被假定为方差随位置变化的条件独立高斯随机变量, 这样在小波域的图像去噪中很重要的一点就是如何准确地估计信号的方差。基于小波域同尺度和相邻尺度间信号方差分布的强相关性, 一些方法利用含噪环境下待估计小波系数邻域内的系数的局部平均值来估计信号的方差。文献[1]中, 基于区域融合思想, 每一个小波系数的方差是通过其周围的一个几乎任意形状的窗来估计的。文献[2]中, 首先对待估计点邻域内的含噪小波系数进行一次阈值处理, 然后再用这些点的平均来对信号的方差进行估计。文献[5,6]使用在同尺度上的待估计点周围一个邻域的点再加上更粗一级尺度上相同位置的点来估计信号的方差。

上述提到了大部分算法都假设在小波域的各个方向子带中信号的能量分布是各向同性的, 所以他们在小波域的不

同尺度的3个方向子带中使用待估计点周围的正方形窗来估计该点信号的方差。但是, 对大多数实际图像, 小波域中3个方向子带呈现出不同的方向特性。考虑到子带所具有的方向特性, 文献[9]使用随子带不同而方向变化的椭圆型窗来估计信号的方差。然而, 上述所有算法都没有考虑图像本身所固有的几何结构。实际图像一般是由平滑区域和纹理区域构成的, 利用数学形态学方法<sup>[11]</sup>就可以把这两类区域很好的区分开来。因此, 本文在文献[9]的基础上, 同时利用了小波域子带中的方向特性和图像本身所固有的几何特征, 即结合椭圆型方向窗和数学形态学来更准确地估计信号的方差, 然后对含噪图像进行双重维纳滤波进行去噪。实验结果证实了该算法的有效性。

### 2 利用数学形态学和方向窗的双重局部维纳滤波

在图像去噪中, 一般假设原始图像被均值为零, 方差为 $\sigma_s^2$ 的加性平稳高斯白噪声所污染。则含噪图像在小波域可以表示为

$$y(i, j) = s(i, j) + \varepsilon(i, j) \quad (1)$$

其中 $s(i, j)$ 和 $\varepsilon(i, j)$ 分别表示原始图像和噪声的小波域系数。为了表示方便, 这里省去了不同尺度和子带的下标。在

正交小波变换下,  $\varepsilon(i, j)$  同样为零均值, 方差为  $\sigma_\varepsilon^2$  的独立同分布高斯随机变量。

本文算法的框图如图 1 所示。首先, 用基于方向窗的局部维纳滤波(Local Wiener Filtering with Directional Windows, LWFDW)对含噪图像进行去噪; 然后把去噪后的含有较少噪声的图像作为引导图像, 信号的方差就可以通过对引导图像的小波系数邻域内取平均得到, 此时的窗是由数学形态学和方向窗共同决定的; 最后在估计出信号的方差以后, 对含噪图像再做一次利用数学形态学和方向窗的局部维纳滤波(Local Wiener Filtering with Directional Windows and Mathematic Morphology, LWFDWMM)来得到最终的去噪结果。故本文的算法可以称之为利用数学形态学和方向窗的小波域双重局部维纳滤波图像去噪算法(Doubly Local Wiener Filtering with Directional Windows and Mathematic Morphology, DLWFDWMM)。

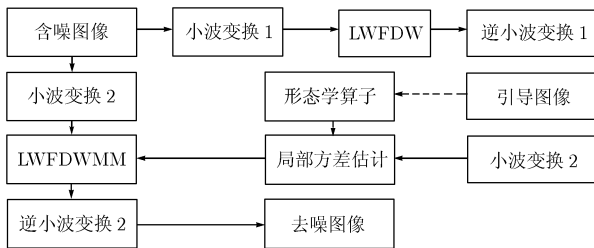


图 1 本文算法框图

2.1 利用方向窗的局部维纳滤波(LWFDW)

文献[9]考虑到小波域同尺度 3 个不同子带所具有各自的方向特性, 提出了方向窗的概念。椭圆型方向窗定义为

$$W(r, a) = \left\{ (m, n) \in Z^2 : \frac{m^2}{a^2} + a^2 n^2 \leq r^2 \right\} \quad (2)$$

其中  $r$  和  $a$  是两个正数。在小波分解后的水平高频子带中使用  $a > 1$  的椭圆型方向窗; 在垂直高频子带中使用  $a < 1$  的椭圆型方向窗。对于对角高频子带, 使用交叉形状的窗, 定义为

$$W_d(r, a) = \left\{ (m, n) : a^2 p^2 + \frac{q^2}{a^2} \leq r^2 \text{ or } a^2 q^2 + \frac{p^2}{a^2} \leq r^2 \right\} \quad (3)$$

其中  $(p, q) = (m + n, m - n)$ 。

在窗给定以后, 就可以对图像进行局部维纳滤波。小波域的局部维纳滤波包括两步: 首先, 通过求待估计点周围的含噪小波系数的局部平均来估计信号的方差, 即

$$\hat{\sigma}^2(i, j) = \left[ \frac{1}{\#W} \sum_{(p,q) \in W} y^2(i+p, j+q) - \sigma_\varepsilon^2 \right]_+ \quad (4)$$

然后信号的小波系数就可以对含噪信号的小波系数做局部维纳滤波得到

$$\hat{s}(i, j) = \frac{\hat{\sigma}^2(i, j)}{\hat{\sigma}^2(i, j) + \sigma_\varepsilon^2} y(i, j) \quad (5)$$

其中  $(x)_+ \equiv \max\{0, x\}$ ,  $W$  和  $\#W$  分别代表窗以及窗中点

的个数。

2.2 利用方向窗和数学形态学的局部维纳滤波(LWFDWMM)

图 2(a), 2(b)和 2(c)分别给出了 ‘Lena’ 图像在做 5 层小波分解后第 3 层上水平高频子带、垂直高频子带和对角高频子带上的小波系数。其中白的区域对应于能量大的小波分解系数, 黑的区域对应于能量小的小波分解系数。由于小波具有高的消失矩, 所以能量大的小波系数一般是由图像的纹理区域所产生的, 能量小的小波系数则对应于图像的平滑区域。这里我们希望通过图像分割把图像的平滑区域和纹理区域区分开来。此外, 我们还可以看出在 3 个不同子带中信号的能量分布是非常类似的。而图像的这个特性在空域也可以被很好地保持下来。所以就可以在空域对图像进行数学形态学分割来区分平滑区域和纹理区域。

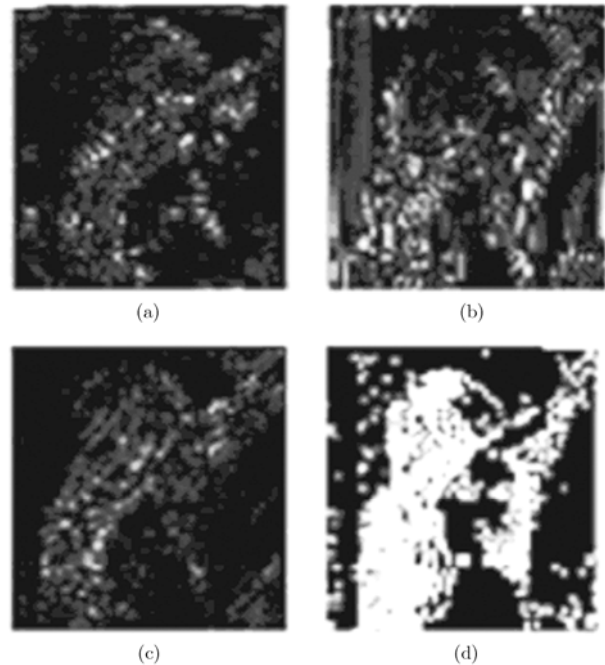


图 2 Lena 图像的小波域分解系数及数学形态学分割结果

对一幅图像  $X$ , 分两步来区分平滑区域和纹理区域。第 1 步对图像做边缘检测, 找出图像的边缘。为了计算简单,

使用常用的拉普拉斯算子( $L(\bullet)$ ), 即  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  对图像

做高通滤波, 接着对滤波后的结果做阈值处理来得到图像的边缘, 即

$$E = \text{Edge}(X) = \left\{ (m, n) : L(m, n) > \text{mean}(L(X)) + \text{std}(L(X)) \right\} \quad (6)$$

其中  $\text{mean}(\bullet)$  和  $\text{std}(\bullet)$  分别代表求矩阵元素的均值和标准差运算。第 2 步对图像的边缘用数学形态学进行处理来区分平滑和纹理区域。

在数学形态学中，两个常用的运算就是开运算和闭运算。开运算一般使对象的轮廓变的光滑，断开狭窄的间断和消除细的突出物。闭运算同样使轮廓线更为光滑，但它能弥补长细的鸿沟消除小的孔洞，并能填补轮廓线中的断裂。根据这些特性，本文首先对图像的边缘进行闭运算使边缘光滑并填补边缘中断裂的部分，然后再去取闭运算后的结果做开运算，这样可以消除由噪声引起的小的区域，而图像不管是平滑区域还是纹理区域大部分都是连在一起的，不会被开运算去除。总的运算可以表示为

$$M = \{(E \bullet B) \circ B\} \quad (7)$$

其中  $\bullet$  和  $\circ$  分别表示闭运算和开运算。在图 2(d)中给出了对图像做数学形态学运算所得到的结果，黑的部分为平滑区域，白的部分为纹理区域。由图 2(d)可以看出，平滑区域和纹理区域被很好地区分开来。

假设  $M(i, j)$  为对图像进行数学形态学运算后的输出结果，即

$$M(i, j) = \begin{cases} 1, & X(i, j) \in \text{平滑区域} \\ 0, & X(i, j) \in \text{纹理区域} \end{cases} \quad (8)$$

因为此时引导图像的小波系数里面含有较少的噪声，此时在小波域的第  $l$  层各个子带中信号的方差就可以由下式估计：

$$\hat{\sigma}^2(i, j) = \begin{cases} \frac{\sum_{(p,q) \in W} \tilde{S}^2(i+p, j+q) M_l(i+p, j+q)}{\sum_{(p,q) \in W} M_l(i+p, j+q)}, & M(i, j) = 1 \\ \frac{\sum_{(p,q) \in W} \tilde{S}^2(i+p, j+q) (1 - M_l(i+p, j+q))}{\sum_{(p,q) \in W} (1 - M_l(i+p, j+q))}, & M(i, j) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中  $\tilde{s}(i, j)$  是引导图像在第 2 个小波分解下的小波域系数， $M_l(i, j)$  是  $M(i, j)$  下  $2^l$  采样后的结果。理论上，文献[9]算法中使用的方向窗在小波域的某一子带是方向和大小都固定的，其相应的对信号方差的估计是下偏的且偏差比较大。而本文中由于利用了图像的几何结构，由式(9)可见，等价的窗的形状和大小是自适应于小波域子带中待处理点周围的几何结构的，故可以得到比文献[9]中更接近无偏的估计子来更准确地估计信号的方差。

在估计出信号方差以后，对含噪图像再进行一次局部维纳滤波来得到最后的去噪结果：

$$s^*(i, j) = \frac{\hat{\sigma}^2(i, j)}{\hat{\sigma}^2(i, j) + \sigma_\epsilon^2} y_2(i, j) \quad (10)$$

其中  $y_2(i, j)$  为含噪图像在第 2 个小波分解下的小波域系数。

### 3 仿真结果

实验中选用标准的 8bit, 512×512 的灰度图像 ‘Lena’ 和 ‘Barbara’ 进行仿真来验证本文去噪算法的有效性。对图像进行 5 层的下采样小波分解，边界采用对称延拓方式。

参数选择同文献[9]中，即在第 1 重局部维纳滤波中，选用 ‘db4’ 小波对图像进行分解。椭圆型方向窗的参数  $a$  取为 2，窗的尺寸  $r$  从最细尺度到最粗尺度依次取为  $r = 5, 4, 4, 3, 3$ ；在第 2 重结合了数学形态学和椭圆型方向窗的局部维纳滤波中，椭圆型方向窗的参数  $a$  取为 1.5，窗的尺寸  $r$  从最细尺度到最粗尺度依次取为  $r = 3, 2, 2, 1, 1$ 。在数学形态学运算中，结构元素选用半径为 2 的圆形结构元素。在试验中发现结构元素的半径  $r$  在 1 到 5 之间取值时都可以达到很好的去噪效果。噪声的方差通过常用的绝对中值估计子估计得到，即

$$\sigma_\epsilon = \text{Median}(|y(i, j)|) / 0.6745 \quad (11)$$

其中  $y(i, j)$  为含噪图像小波分解后最细尺度对角子带中的系数。

考虑到噪声样本的随机性，输入峰值信噪比 PSNR 表示取 20 次不同噪声样本下输出峰值信噪比的平均值。图 3，图 4 中分别给出了对 ‘Lena’ 图像和 ‘Barbara’ 图像在不同噪声标准差下本文算法与其它几种去噪算法的输出峰值信噪比。图 5 给出了对 ‘Lena’ 图像被标准差为 20 的高斯白噪声污染的情况下本文算法与文献[9]算法的局部去噪效果比较。由图可以看出，由于本文算法更准确地估计了信号在小波域的方差，本文算法的去噪效果不论在 PSNR 还是在去噪后图像的局部视觉效果上都要优于其它算法。

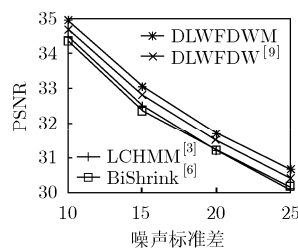


图 3 ‘Lena’ 的去噪效果比较

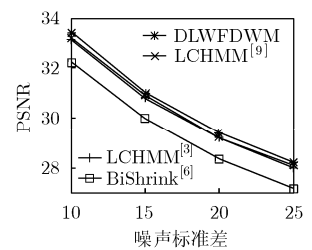


图 4 ‘Barbara’ 的去噪效果比较

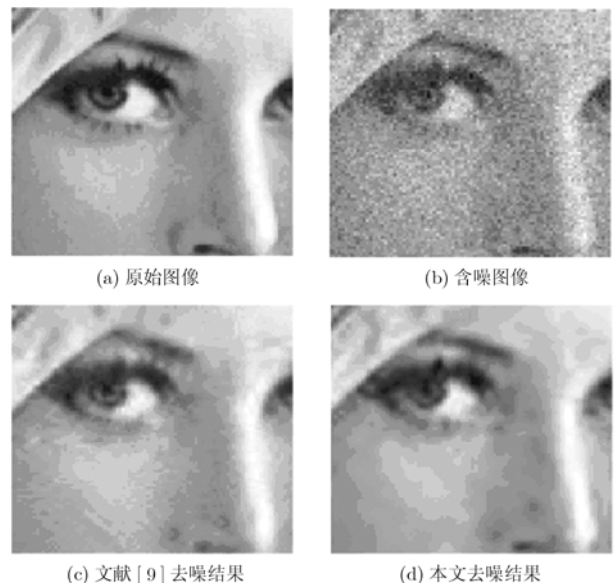


图 5 ‘Lena’ 图像的局部去噪效果比较

#### 4 结束语

本文提出了一种新的小波域双重局部维纳滤波图像去噪算法。该算法同时利用了小波域子带的方向特性和图像本身所固有的几何特性, 首先使用数学形态学把图像分成纹理区域和光滑区域两部分, 然后结合椭圆型方向窗去更准确地估计小波域方向子带中每一点的信号的方差, 最后使用双重维纳滤波器对含噪图像进行去噪。实验结果表明本文的算法优于目前已有的采用二维可分离实小波进行去噪的算法。

#### 参考文献

- [1] Eom I K and Kim Y S. Wavelet-based denoising with nearly arbitrarily shaped windows. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(12): 937-940.
- [2] Kazubek M. Wavelet domain image denoising by thresholding and Wiener filtering. *IEEE Signal Processing Letters*, 2003, 10(11): 324-326.
- [3] Fan G and Xia X G. Image denoising using local contextual hidden Markov model in the wavelet domain. *IEEE Signal Processing Letters*, 2001, 8(5): 125-128.
- [4] Mihçak M K, Kozinsev I, and Ramchandran K, *et al.* Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients. *IEEE Signal Processing Letters*, 1999, 7(6): 300-303.
- [5] Chang S G, Yu B, and Vetterli M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2000, 9(9): 1522-1531.
- [6] Sendur L and Selesnick I W. Bivariate shrinkage with local variance estimation. *IEEE Signal Processing Letters*, 2002, 9(12): 438-441.
- [7] Ghael S P, Sayeed A M, and Baraniuk R G. Improved wavelet denoising via empirical Wiener filtering. *Proceedings of SPIE, San Diego*, 1997: 389-399.
- [8] Portilla J, Strela V, and Wainwright M J, *et al.* Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2003, 12(11): 1338-1351.
- [9] Shui P L. Image denoising algorithm via doubly local wiener filtering with directional windows in wavelet domain. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 10(12): 681-684.
- [10] Eom I K and Kim Y S. Spatially adaptive denoising based on mixture modeling and interscale dependencies of wavelet coefficients. *IEEE Int. Conf. Neural Networks & Signal Processing*. Nanjing, China, 2003: 14-17.
- [11] Gonzalez R C and Woods E W. *Digital Image Processing*. MA, Addison-Wesley, Reading, 1992: 519-560.

周祚峰: 男, 1982年生, 博士生, 研究方向为小波理论及其在图像去噪、图像恢复和滤波器设计等方面的应用。

水鹏朗: 男, 1967年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为小波理论及其应用、信号检测、时频分析、滤波器设计等。