

基于基序列构造二元互补序列集

沈炳声*^① 周正春^① 杨洋^② 范平志^①

^①(西南交通大学信息科学与技术学院 成都 611756)

^②(西南交通大学数学学院 成都 611756)

摘要: 互补序列集凭借其理想的非周期自相关函数特性,在通信与感知领域得到广泛应用。针对互补序列集长度受限的问题,该文以基序列为初始序列,利用级联算子和交织算子提出两类二元互补序列集的新构造方法。所提构造填补了二元互补序列集在特定长度上的空白,并解决了由Adhikary和Majhi提出的公开问题。

关键词: 互补序列集; 基序列; 交织算子; 级联算子

中图分类号: TN911.2

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2024)09-3757-06

DOI: 10.11999/JEIT240309

Constructions of Binary Complementary Sequence Set Based on Base Sequences

SHEN Bingsheng^① ZHOU Zhengchun^① YANG Yang^② FAN Pingzhi^①

^①(School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

^②(School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract: Complementary Sequence Sets (CSS) have ideal aperiodic auto-correlation functions and are widely used in the field of communication and sensing. In order to solve the problem of limited length of complementary sequence sets, two new constructions of binary complementary sequence sets are proposed using concatenation operator and interleaving operator, with the base sequence as the initial sequence. The proposed construction fills the gap in the length of the binary complementary sequence set and solves the public problem proposed by Adhikary and Majhi.

Key words: Complementary Sequence Set (CSS); Base sequence; Concatenation operator; Interleaving operator

1 引言

如果一个二元序列对的非周期自相关函数之和是一个冲激函数,则该序列对被称为Golay互补对(Golay Complementary Pair, GCP)^[1]。GCP由Golay研究红外线多缝光谱仪的设计时引入,在工程领域具有重要应用价值,特别是在无线通信领域和雷达感知领域。虽然GCP在工程中被广泛使用,但它长度受限,如:二元GCP的长度形如 $2^a 10^b 26^c$,该类数字也被称为Golay数,其中 a, b, c 是非负整数。为了解决该问题,1972年, Tseng

和Liu^[2]提出互补序列集(Complementary Sequence Set, CSS)的概念。每个CSS中包含多条序列,所有序列的非周期自相关函数之和是一个冲激函数。CSS将GCP作为一种特例,同样在工程领域得到广泛应用,如多普勒容忍雷达波形设计^[3,4]、信道估计^[5]、全向预编码^[6]、通信感知一体化^[7]、免授权非正交多址接入^[8,9]控制峰值平均功率比(Peak-to-Average Power Ratio, PAPR)等^[8-11]。PAPR在正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM)系统中尤为重要,它直接影响系统性能和运行成本。从编码的角度来看,可以采用具有低PAPR的码字对通信数据进行编码,从而降低OFDM信号的PAPR。互补序列正是编码类方案的代表之一。

广义布尔函数是构造互补序列的常用工具。1999年, Davis和Jedwab^[12]首次基于2阶广义布尔函数提出一种GCP的构造方法。随后, Paterson^[10]从广义布尔函数标号图的角度构造了一种集合大小为 2^{k+1} 、长度为 2^m 的CSS。相比于文献^[12]中的工作, Paterson提出的构造可以生成码率更低的

收稿日期: 2024-04-22; 改回日期: 2024-08-28; 网络出版: 2024-09-01

*通信作者: 沈炳声 bssh9527@swjtu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(12401695, U23A20274, 62171389), 四川省自然科学基金创新研究群体(2024NSFTD0015), 中央高校基本科研业务费(2682024CX027)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (12401695, U23A20274, 62171389), Sichuan Natural Science Foundation Innovation Research Group (2024NSFTD0015), The Fundamental Research Funds for the Central Universities (2682024CX027)

PAPR码本。继Paterson的工作之后,逐渐有学者提出采用高阶广义布尔函数构造CSS。这些研究考虑如何增加码本的码率,但序列长度仍然形如 2^m 。在工程应用中,2的幂次数字因其适用于快速傅里叶变换而广受欢迎,但并非所有通信场景都适宜采用。例如,窄带物联网和3GPP长期演进分别选用长度为11和62的序列作为主同步序列,这些长度与2的幂次并无直接关联。

近年来,研究人员逐渐开始关注非2次幂长的CSS,相关研究可见文献[11,13–17]。多数CSS的构造都以GCP为基础,所涉及的长度与Golay数相关。如: $L+1$, $L+2$, $L+P$ 和 kL 等,其中 L 和 P 是Golay数, k 是某些受限的整数。显然地,CSS在构造方面还存在许多未能解决长度。2019年,Adhikary和Majhi^[13]提出一个公开问题:如何构造集合大小为4、长度为29的二元CSS? 2020年,Wang等人^[15]提出一种互补序列集的级联构造方法,可以生成集合大小为4、长度为29的四元CSS。相比于四元序列,二元序列复杂度低,更适合成本有限的机器型通信设备。截止目前,Adhikary和Majhi遗留的问题仍然未被解决。受此启发,该文基于基序列、级联算子和交织算子,提出两种二元CSS的构造方法。借助于已知的基序列,提出的两种构造都可以生成集合大小为4、长度为29的二元CSS,从而填补部分二元CSS在特定长度上的空白。

2 基本概念

定义1 一条序列 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{L-1})$ 被视为一条长度为 L 的一维行向量。如果 $a_i \in \{1, -1\}$,则称序列为二元序列。该文涉及的序列全为二元序列。

定义2 设 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{L_1-1})$ 和 $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{L_2-1})$ 分别是两条长度为 L_1 和 L_2 的二元序列,它们的非周期互相关函数定义为

$$R_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\tau) = \sum_i a_i b_{i+\tau} \quad (1)$$

式(1)中的求和只考虑 i 属于 $\{0, 1, \dots, L_1 - 1\}$ 和 $i + \tau$ 属于 $\{0, 1, \dots, L_2 - 1\}$ 的项。特别地,当 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 时, $R_{\mathbf{a},\mathbf{a}}(\tau)$ 被称为非周期自相关函数,简记为 $R_{\mathbf{a}}(\tau)$ 。

定义3 对于任意长度为 L 的序列 $\mathbf{a} = (a_0,$

$a_1, \dots, a_{L-1})$,它对应的OFDM信号表示为

$$S_{\mathbf{a}}(t) = \sum_{i=0}^{L-1} a_i \exp(2\pi\sqrt{-1}(f_0 + i\Delta f)t) \quad (2)$$

其中, $0 \leq t < T = 1/\Delta f$, f_0 表示中心子载波频率, Δf 表示子载波间隔。由于 \mathbf{a} 为二元序列,因此信号 $S_{\mathbf{a}}(t)$ 的平均功率为 L 。进一步地,序列 \mathbf{a} 的PAPR定义为

$$\text{PAPR}(\mathbf{a}) = \max_{0 \leq t < T} \frac{|S_{\mathbf{a}}(t)|^2}{L} \quad (3)$$

对于一个序列集 $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{M-1}\}$,它的PAPR定义为

$$\text{PAPR}(\mathbf{A}) = \max_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \text{PAPR}(\mathbf{a}) \quad (4)$$

定义4 设 $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{M-1}\}$ 是一个序列集,其中 $\mathbf{a}_m = (a_{m,0}, a_{m,1}, \dots, a_{m,L-1})$ 。如果

$$R_{\mathbf{A}}(\tau) = \sum_{m=0}^{M-1} R_{\mathbf{a}_m}(\tau) = 0 \quad (5)$$

对任意的 $\tau \neq 0$ 成立,则称序列集 \mathbf{A} 为互补序列集,简记为 (M, L) -CSS。特别地,当 $M = 2$ 时, \mathbf{A} 被称为Golay互补对。

引理1^[8] 如果序列集 \mathbf{A} 是一个 (M, L) -CSS,则 $\text{PAPR}(\mathbf{A}) \leq M$ 。

互补序列集的PAPR上界与集合大小相关,通常来说,为了控制PAPR,只关注集合数较小的互补序列集,如 $M = 2, 4, 6, 8$ 等。本文仅研究集合数为4的互补序列集,其PAPR上界为4。

定义5 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 是长度分别为 $L+p, L+p, L, L$ 的二元序列。如果

$$\begin{cases} R_{\mathbf{a}}(\tau) + R_{\mathbf{b}}(\tau) + R_{\mathbf{c}}(\tau) + R_{\mathbf{d}}(\tau) = 0, \tau \in [1, L-1] \\ R_{\mathbf{a}}(\tau) + R_{\mathbf{b}}(\tau) = 0, \tau \in [L, L+p] \end{cases} \quad (6)$$

则序列 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 被称为基序列,简记为BS $(2L+p)$ 。

目前存在许多关于BS $(2L+1)$ 的研究,详情请参阅文献[18–22]。基序列中存在一类特殊的序列,它们存在对称结构,被称为Turyn序列。

定义6 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 是BS $(2L+1)$ 。如果它们满足结构

$$\left. \begin{cases} \mathbf{a} = (+, +, x_2, \dots, x_m, -x_m, \dots, -x_2, -, -) \\ \mathbf{b} = (+, +, y_2, \dots, y_m, -y_m, \dots, -y_2, -, +) \\ \mathbf{c} = (+, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m, z_{m-1}, \dots, z_1, +) \\ \mathbf{d} = (+, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m, t_{m-1}, \dots, t_1, +) \end{cases} \right\}, L = 1 \pmod{2}$$

$$\left. \begin{cases} \mathbf{a} = (+, +, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, +, +) \\ \mathbf{b} = (+, +, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m, y_{m-1}, \dots, y_2, +, -) \\ \mathbf{c} = (+, z_1, \dots, z_{m-1}, -z_{m-1}, \dots, -z_1, -) \\ \mathbf{d} = (+, t_1, \dots, t_{m-1}, -t_{m-1}, \dots, -t_1, -) \end{cases} \right\}, L = 0 \pmod{2} \quad (7)$$

则称 a, b, c, d 为Turyn序列，简记为TS($2L+1$)，其中 $+$ ， $-$ 分别表示1和 -1 。

Turyn序列并非普遍存在，基于计算机搜索，学者们得到部分短长度的Turyn序列，如表1所示。由于Turyn序列存在对称结构，它可以通过迭代构造获得，如引理2所示。

表1 短长度Turyn序列

L	序列	L	序列
1	$\begin{pmatrix} +- \\ ++ \\ + \\ + \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} +++-++ \\ ++--+- \\ +-+--+ \\ ++++-- \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} +++ \\ ++- \\ +- \\ +- \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} +++-+- \\ ++++-- \\ +++-+- \\ ++++-- \\ +++-+- \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} +++- \\ ++-+ \\ +++ \\ +-+ \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} ++++--+-++ \\ +++-+-+-++ \\ +++-+-+-++ \\ +++-+-+-++ \\ +++-+-+-++ \\ +++-+-+-++ \\ +++-+-+-++ \\ +++-+-+-++ \\ +++-+-+-++ \\ +++-+-+-++ \\ +++-+-+-++ \\ +++-+-+-++ \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} ++++ \\ +++- \\ +++- \\ +-+- \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \\ ++++--+-++ \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} +++- \\ ++-+ \\ +-+- \\ ++++ \end{pmatrix}$		

引理2^[19] 如果 a, b, c, d 为TS($2L+1$)，则

$$\begin{aligned} x &= [+ , \text{int}(a, c)], z = \text{int}(b, d) \\ y &= [- , \text{int}(a, c)], w = \text{int}(b, -d) \end{aligned} \tag{8}$$

形成长度分别为 $2L+2, 2L+2, 2L+1, 2L+1$ 的Turyn序列，其中， $[a, b]$ 表示序列级联运算， $\text{int}(a, b)$ 表示序列交织运算。

定义7 设 a, b, c, d 是长度分别为 $L, L, L, L-1$ 的二元序列。如果

$$\begin{cases} R_a(\tau) + R_b(\tau) + 2R_c(\tau) + 2R_d(\tau) = 0, \\ \tau \in [1, L-2] \\ R_a(\tau) + R_b(\tau) + 2R_c(\tau) = 0, \\ \tau = L-1 \end{cases} \tag{9}$$

则称 a, b, c, d 为Turyn-type序列，简记为TTS(L)。

Turyn-type序列目前并不存在数学构造，但基于计算机搜索，学者们发现对于 $L \leq 40$ 的偶数都存在，它们可以在文献[23-25]中被找到。Turyn-type序列可用于构造基序列，如引理3所示。

引理3^[25] 如果 a, b, c, d 为TTS(L)，则 $[c, d], [c, -d], a, b$ 是长度分别为 $2L-1, 2L-1, L, L$ 的基序列。

3 主要结论

本节利用基序列、级联算子和交织算子提出两种二元互补序列集的构造方法，并给出两个构造实例，分别得到长度为23和29的二元互补序列集。

定理1 设 a, b, c, d 是4条长度分别为 $L+p, L+p, L, L$ 的二元序列，且

$$\begin{aligned} u &= [a, c], v = [a, -c] \\ s &= [b, d], t = [b, -d] \end{aligned} \tag{10}$$

如果 a, b, c, d 是BS($2L+p$)，则 $A = \{u, v, s, t\}$ 是一个长度为 $2L+p$ 的互补序列集。

证明 序列集 A 是一个互补序列集等价于 $R_A(\tau) = R_u(\tau) + R_v(\tau) + R_s(\tau) + R_t(\tau) = 0$ 对任意的 $1 \leq \tau < 2L+p$ 成立。记 $L_p = L+p$ 。下面，分为以下3种情况讨论 A 的非周期自相关函数之和。

情况1 当 $1 \leq \tau \leq L-1$ 时，根据定义，有

$$\begin{aligned} R_A(\tau) &= R_a(\tau) + R_c(\tau) + R_{c,a}(L_p - \tau) \\ &\quad + R_a(\tau) + R_c(\tau) - R_{c,a}(L_p - \tau) \\ &\quad + R_b(\tau) + R_d(\tau) + R_{d,b}(L_p - \tau) \\ &\quad + R_b(\tau) + R_d(\tau) - R_{d,b}(L_p - \tau) \\ &= 2[R_a(\tau) + R_c(\tau) + R_b(\tau) + R_d(\tau)] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

情况2 当 $L \leq \tau \leq L_p - 1$ 时，根据定义，有

$$\begin{aligned} R_A(\tau) &= R_a(\tau) + R_{c,a}(L_p - \tau) + R_a(\tau) \\ &\quad - R_{c,a}(L_p - \tau) + R_b(\tau) \\ &\quad + R_{d,b}(L_p - \tau) + R_b(\tau) - R_{d,b}(L_p - \tau) \\ &= 2[R_a(\tau) + R_b(\tau)] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

情况3 当 $L_p \leq \tau \leq 2L+p-1$ 时，根据定义，有

$$\begin{aligned} R_A(\tau) &= R_{c,a}(L_p - \tau) - R_{c,a}(L_p - \tau) \\ &\quad + R_{d,b}(L_p - \tau) - R_{d,b}(L_p - \tau) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

综上所述，序列集 A 是一个长度为 $2L+p$ 的互补序列集。证毕

注1 根据基序列的定义，长度分别为 L_1 和 L_2 的Golay互补对同样可以视为基序列。因此，定理1可以将文献[15]中的定理1作为一种特例。

例1 设

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +-+--+--+ \\ +-----+ \\ +---++++- \\ +++-+-+ \end{bmatrix} \tag{14}$$

是TTS(8)。根据引理3，令 $e = [c, d], f = [c, -d]$ ，则 e, f, a, b 是BS(23)。基于定理1生成如下4条长度为23的序列

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & - & - & + & + & + & - & + & + & + & - & + & + & - & + & + & - & + & - & + & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & + & - & + & + & + & - & + & + & - & - & - & + & - & + & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & + & - & - & - & - & + & - & - & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - & + \\ + & - & - & + & + & + & - & - & - & - & + & - & - & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & - \end{bmatrix} \quad (15)$$

易验证，它们的非周期自相关函数之和是一个冲激函数，形成一个长度为23的二元互补序列集。

注2 截止目前，尚未有文献报道过长度为23、集合大小为4的互补序列集。

定理2 设 a, b, c, d 是4条长度分别为 $L+1, L+1, L, L$ 的二元序列，且

$$\begin{aligned} u &= \text{int}(a, c), \quad v = \text{int}(a, -c) \\ s &= \text{int}(b, d), \quad t = \text{int}(b, -d) \end{aligned} \quad (16)$$

如果 a, b, c, d 是 $BS(2L+1)$ ，则 $A = \{u, v, s, t\}$ 是一个长度为 $2L+1$ 的互补序列集。

证明 序列集 A 是一个互补序列集等价于 $R_A(\tau) = R_u(\tau) + R_v(\tau) + R_s(\tau) + R_t(\tau) = 0$ 对任意的 $1 \leq \tau < 2L+1$ 成立。下面，分为以下3种情况讨论 A 的非周期自相关函数之和。

情况1 当 $\tau = 2L$ 时，根据定义，有

$$R_A(\tau) = 2[R_a(L) + R_b(L)] = 0 \quad (17)$$

情况2 当 $1 \leq \tau < 2L$ 且 $\tau = 2k$ 是一个偶数时，

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & + & - & + & + & + & - & + & - & - & + & + & - & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & - & - & + & - & + & + & + & - & - & + & - & - & + & + & + & - & + & + & + \\ + & + & + & - & + & - & - & - & + & - & - & + & - & - & + & + & + & - & + & + & + & - & - \\ + & - & + & + & + & + & - & + & + & + & - & - & + & - & - & + & - & - & + & - & - & + & - \end{bmatrix} \quad (21)$$

易验证，它们的非周期自相关函数之和是一个冲激函数，形成一个长度为29的互补序列集。采用文献[26]的信号模型，设置载波频率 $f_0 = 800$ MHz、子载波间隔为 $\Delta f = 15$ kHz、符号持续时间 $T = 66.7$ μ s。图1展示了由序列 u, v, s, t 生成的OFDM信号的瞬时平均功率比曲线。

注3 例2首次给出集合大小为4、长度为29的二元互补序列集，解决了由Adhikary和Majhi遗留的公开问题。

注4 对于任意的 $L_1 \in \{1, 2, \dots, 38\} \cup \{2^a 10^b 26^c :$

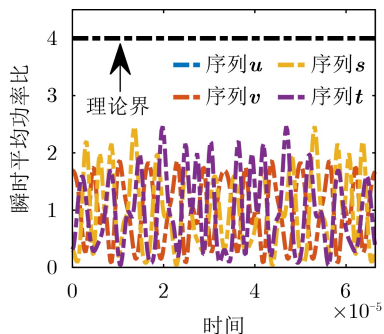


图1 瞬时平均功率比曲线

根据定义，有

$$R_A(\tau) = 2[R_a(k) + R_b(k) + R_c(k) + R_d(k)] = 0 \quad (18)$$

情况3 当 $1 \leq \tau < 2L$ 且 $\tau = 2k+1$ 是一个奇数时，根据定义，有

$$\begin{aligned} R_A(\tau) &= 2[R_{a,c}(k+1) - R_{a,c}(k+1) + R_{b,d}(k+1) \\ &\quad - R_{b,d}(k+1)] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

综上所述，序列集 A 是一个长度为 $2L+1$ 的互补序列集。证毕

例2 设

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} + & + & - & + & + & + & - & + & - & + & + & + & - & + & + \\ + & + & + & - & + & + & - & - & - & + & + & - & + & + & - \\ + & + & + & + & - & - & + & - & + & + & - & - & - & - & - \\ + & - & - & - & - & + & - & + & - & + & + & + & + & + & - \end{bmatrix} \quad (20)$$

是TS(29)。基于定理2，生成如下4条长度为29的序列

$a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ ，存在 $BS(2L_1+1)$ ，请参考文献[18-23]。因此，基于定理1和定理2，可构造参数形如 $(4, 2L_1+1)$ 的二元互补序列集。

注5 基于表1和引理2，存在 $TS(2^k L_2 + 2^k - 1)$ ，其中 $L_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14\}$ ， k 是任意正整数。因此，基于定理1和定理2，可构造参数形如 $(4, 2^k L_2 + 2^k - 1)$ 的二元互补序列集。

注6 对于任意的 $L_3 \leq 40$ 且 L_3 是偶数，存在 $TTS(L_3)$ ，请参考文献[23-25]。因此，基于定理1和引理3，可构造参数形如 $(4, 3L_3 - 1)$ 的二元互补序列集。

4 与已知构造比较

目前非2次幂长互补序列集的构造方法有许多，但是只有文献[11,13-15]中提出的构造可以生成集合大小为4的二元互补序列集。文献[11]对部分二元标准Golay互补对进行截断，得到长度为 $2^{m-1} + 2^v$ 的二元互补序列集，其中 $v \leq m-1$ 。文献[13]向二元Golay互补对中插入一个或者两个元素，得到长度为 $L+1$ 或 $L+2$ 的二元互补序列集，其中 L 是Golay数。文献[14]以二元Golay互补对作

为初始序列, 偶移位互补对作为级联规则, 提出长度为 kL 的二元互补序列集构造框架, 其中 k 是二元偶移位互补对存在的长度。本文利用基序列、级联算子和交织算子提出两种二元互补序列集的构造方法。表2列出了所有集合大小为4的二元互补序列集已知参数, 不难看出, 本文提出的构造可以填补许多长度的空白。

表2 集合大小为4的二元互补序列集

来源	长度	限制
文献[11]	$2^{m-1} + 2^v$	$m \geq 2, v \leq m - 1$
文献[13]	$L + 1, L + 2$	L 的Golay数
文献[14]	kL	k 是偶移位互补对存在的长度, L 是Golay数
文献[15]	$L_1 + L_2$	L_1 和 L_2 都是Golay数
注4(本文)	$2L + 1$	$L \in \{1, 2, \dots, 38\} \cup \{x : x \text{是Golay数}\}$
注5(本文)	$2^k L + 2^k - 1$	$L \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 14\}, k \geq 1$
注6(本文)	$3L - 1$	$L \in \{x : 2 \leq x \leq 40 \text{且} x \text{是偶数}\}$

5 结束语

本文利用基序列、级联算子和交织算子给出两种集合大小为4的二元互补序列集的构造方法。基于基序列的存在性, 提出的两种构造可以填补许多二元互补序列集长度的空白。特别地, Turyn序列可以通过迭代方法产生, 因此所提构造可以生成长度形如 $2^k L + 2^k - 1$ 的二元互补序列集, 这是以前从未报道的新长度。未来, 一个可能的工作是利用基序列构造完备互补码, 以解决当前二元完备互补码长度受限的问题。

参考文献

- [1] GOLAY M. Complementary series[J]. *IRE Transactions on Information Theory*, 1961, 7(2): 82–87. doi: [10.1109/TIT.1961.1057620](https://doi.org/10.1109/TIT.1961.1057620).
- [2] TSENG C C and LIU C. Complementary sets of sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1972, 18(5): 644–652. doi: [10.1109/TIT.1972.1054860](https://doi.org/10.1109/TIT.1972.1054860).
- [3] LI Yuke, ZHOU Yongxing, LI Xueru, et al. Unimodular complete complementary sequence with optimal trade-off between auto- and cross-ambiguity functions for MIMO radars[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2024. doi: [10.1109/TIV.2024.3384435](https://doi.org/10.1109/TIV.2024.3384435).
- [4] ZHU Jiahua, SONG Yongping, JIANG Nan, et al. Enhanced Doppler resolution and sidelobe suppression performance for golay complementary waveforms[J]. *Remote Sensing*, 2023, 15(9): 2452. doi: [10.3390/rs15092452](https://doi.org/10.3390/rs15092452).
- [5] ZHOU Yajing, ZHOU Zhengchun, LIU Zilong, et al.

- Symmetrical Z-Complementary code sets for optimal training in generalized spatial modulation[J]. *Signal Processing*, 2023, 208: 108990. doi: [10.1016/j.sigpro.2023.108990](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2023.108990).
- [6] MEN Xinyu, LIU Tao, LI Yubo, et al. Constructions of 2-D Golay complementary array sets with flexible array sizes for omnidirectional precoding in massive MIMO[J]. *IEEE Communications Letters*, 2023, 27(5): 1302–1306. doi: [10.1109/LCOMM.2023.3263860](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2023.3263860).
- [7] 赵羚岚, 杨奕冉, 刘喜庆, 等. 基于完全互补码扩频的通信雷达一体化系统[J]. *无线电通信技术*, 2023, 49(1): 118–125. doi: [10.3969/j.issn.1003-3114.2023.01.014](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-3114.2023.01.014).
ZHAO Linglan, YANG Yiran, LIU Xiqing, et al. Integrated communication and radar system based on complete complementary code spread spectrum[J]. *Radio Communications Technology*, 2023, 49(1): 118–125. doi: [10.3969/j.issn.1003-3114.2023.01.014](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-3114.2023.01.014).
- [8] LIU Kaiqiang, ZHOU Zhengchun, ADHIKARY A R, et al. New sets of non-orthogonal spreading sequences with low correlation and low PAPR using extended Boolean functions[J]. *Designs, Codes and Cryptography*, 2023, 91(10): 3115–3139. doi: [10.1007/s10623-023-01247-z](https://doi.org/10.1007/s10623-023-01247-z).
- [9] 李玉博, 王亚会, 于丽欣, 等. 免调度非正交多址接入上行链路的非2幂次长度二元扩频序列[J]. *电子与信息学报*, 2022, 44(4): 1402–1411. doi: [10.11999/JEIT210293](https://doi.org/10.11999/JEIT210293).
LI Yubo, WANG Yahui, YU Lixin, et al. Binary spreading sequences of lengths non-power-of-two for uplink grant-free non-orthogonal multiple access[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2022, 44(4): 1402–1411. doi: [10.11999/JEIT210293](https://doi.org/10.11999/JEIT210293).
- [10] PATERSON K G. Generalized Reed-Muller codes and power control in OFDM modulation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2000, 46(1): 104–120. doi: [10.1109/18.817512](https://doi.org/10.1109/18.817512).
- [11] CHEN Chaoyu. Complementary sets of non-power-of-two length for peak-to-average power ratio reduction in OFDM[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2016, 64(12): 7538–7545. doi: [10.1109/TIT.2016.2613994](https://doi.org/10.1109/TIT.2016.2613994).
- [12] DAVIS J A and JEDWAB J. Peak-to-mean power control in OFDM, Golay complementary sequences, and Reed-Muller codes[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999, 45(7): 2397–2417. doi: [10.1109/18.796380](https://doi.org/10.1109/18.796380).
- [13] ADHIKARY A R and MAJHI S. New constructions of complementary sets of sequences of lengths non-power-of-two[J]. *IEEE Communications Letters*, 2019, 23(7): 1119–1122. doi: [10.1109/LCOMM.2019.2913382](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2019.2913382).
- [14] SHEN Bingsheng, YANG Yang, and ZHOU Zhengchun. A construction of binary Golay complementary sets based on even-shift complementary pairs[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 29882–29890. doi: [10.1109/ACCESS.2020.2972598](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2972598).

- [15] WANG Gaoxiang, ADHIKARY A R, ZHOU Zhengchun, *et al.* Generalized constructions of complementary sets of sequences of lengths non-power-of-two[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, 27: 136–140. doi: [10.1109/LSP.2019.2960155](https://doi.org/10.1109/LSP.2019.2960155).
- [16] SHEN Bingsheng, YANG Yang, FAN Pingzhi, *et al.* New Z-complementary/complementary sequence sets with non-power-of-two length and low PAPR[J]. *Cryptography and Communications*, 2022, 14(4): 817–832. doi: [10.1007/s12095-021-00550-7](https://doi.org/10.1007/s12095-021-00550-7).
- [17] SHEN Bingsheng, MENG Hua, YANG Yang, *et al.* New constructions of Z-complementary code sets and mutually orthogonal complementary sequence sets[J]. *Designs, Codes and Cryptography*, 2023, 91(2): 353–371. doi: [10.1007/s10623-022-01112-5](https://doi.org/10.1007/s10623-022-01112-5).
- [18] COHEN G, RUBIE D, SEBERRY J, *et al.* A survey of base sequences, disjoint complementary sequences and $OD(4t; t, t, t, t)$ [J]. *JCMCC*, 1989, 5: 69–104.
- [19] KOUKOUVINOS C, KOUNIAS S, and SOTIRAKOGLU K. On base and Turyn sequences[J]. *Mathematics of Computation*, 1990, 55(192): 825–837. doi: [10.1090/S0025-5718-1990-1023764-7](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1990-1023764-7).
- [20] KOUKOUVINOS C, KOUNIAS S, SEBERRY J, *et al.* Multiplication of sequences with zero autocorrelation[J]. *Australasian Journal of Combinatorics*, 1994, 10: 5–15.
- [21] EDMONDSON G M, SEBERRY J, and ANDERSON M R. On the existence of Turyn sequences of length less than 43[J]. *Mathematics of Computation*, 1994, 62(205): 351–362. doi: [10.2307/2153414](https://doi.org/10.2307/2153414).
- [22] ĐOKOVIĆ D Ž. On the base sequence conjecture[J]. *Discrete Mathematics*, 2010, 310(13/14): 1956–1964. doi: [10.1016/j.disc.2010.03.007](https://doi.org/10.1016/j.disc.2010.03.007).
- [23] TURYN R J. Hadamard matrices, Baumert-Hall units, four-symbol sequences, pulse compression, and surface wave encodings[J]. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 1974, 16(3): 313–333. doi: [10.1016/0097-3165\(74\)90056-9](https://doi.org/10.1016/0097-3165(74)90056-9).
- [24] BEST D, ĐOKOVIĆ D Ž, KHARAGHANI H, *et al.* Turyn-type sequences: Classification, enumeration, and construction[J]. *Journal of Combinatorial Designs*, 2013, 21(1): 24–35. doi: [10.1002/jcd.21318](https://doi.org/10.1002/jcd.21318).
- [25] LONDON S. Constructing new Turyn type sequences, T-sequences and Hadamard matrices[D]. [Ph. D. dissertation], University of Illinois at Chicago, 2013.
- [26] PAI Chengyu, LIN Y J, and CHEN Chaoyu. Optimal and almost-optimal Golay-ZCZ sequence sets with bounded PAPRs[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2023, 71(2): 728–740. doi: [10.1109/TCOMM.2022.3228932](https://doi.org/10.1109/TCOMM.2022.3228932).
- 沈炳声：男，博士，研究方向为序列编码设计、通信雷达一体化。
- 周正春：男，教授，研究方向为编码理论、通信/雷达波形设计、电子信息对抗。
- 杨洋：男，教授，研究方向为序列编码设计、通信/雷达波形设计。
- 范平志：男，教授，研究方向为高移动性宽带无线通信、信号设计与处理、信息理论与编码、无线频谱资源管理。

责任编辑：马秀强