

## 统一混沌系统与其变形系统间的间歇反馈同步控制

孙克辉<sup>①</sup> 尚芳<sup>①</sup> 钟科<sup>①</sup> 盛喆<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(中南大学 物理科学与技术学院 长沙 410083)

<sup>②</sup>(中南大学 数学与统计学院 长沙 410083)

**摘要:** 采用间歇反馈控制方法,研究了统一混沌系统与其变形系统间的同步控制问题。通过合理设计间歇反馈控制器,将同步问题转化为误差动力学系统方程在原点处的收敛问题。根据连续系统的稳定性准则及相关实验,推导出了满足同步条件的同步定理。分析了初始值  $X(0)$  和  $Y(0)$ 、反馈系数  $k$ 、比例因子  $D$ 、步长  $h$  以及统一系统参数  $\alpha$  对同步系统的同步性能的影响。最后,采用间隙反馈同步方案,设计了一个混沌掩盖保密通信系统,并进行了仿真研究。仿真实验研究证明了该同步方法的有效性。

**关键词:** 混沌同步; 间歇反馈控制; 统一混沌系统; 混沌掩盖

中图分类号: TN918

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2009)01-0071-04

## Synchronous Control Between Unified Chaotic System and Its Modified System Based on Intermittent Feedback

Sun Ke-hui<sup>①</sup> Shang Fang<sup>①</sup> Zhong Ke<sup>①</sup> Sheng Zhe<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(School of Physics Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

<sup>②</sup>(School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** The synchronization issue between unified chaotic system and its modified system is studied by employing intermittent feedback control. After properly designing intermittent feedback controller, the practical stability of synchronization systems is equivalent to that of the origin of the error dynamic system equation. A synchronization theorem, which satisfies the synchronization condition, is developed based on the stability theorem of the continuous systems and our simulation experiments. The synchronization performances with different initial value  $X(0)$  and  $Y(0)$ , coefficient  $k$ , ratio  $D$ , step  $h$  and parameter  $\alpha$  are discussed in detail. A security communication system based on chaotic masking method is designed and simulated by applying the scheme of intermittent feedback synchronization. Simulation experiments proved the effectiveness of the synchronization approach.

**Key words:** Chaos synchronization; Intermittent feedback control; Unified chaotic system; Chaotic masking

### 1 引言

自 1990 年 Pecora 和 Carroll<sup>[1]</sup>提出驱动-响应法实现混沌系统同步以后,混沌同步理论及其在保密通信领域的应用成为非线性科学的研究热点。统一混沌系统<sup>[2]</sup>由于具有单参数、全域性等混沌特性,成为研究混沌控制和同步以及混沌保密通信的新模型<sup>[3]</sup>。在多种同步控制方法中,间歇反馈控制方法<sup>[4-9]</sup>由于可用较低的代价获得预定的同步要求,且简单易行而备受关注。文献[9]中讨论了具有不同初值的两个超混沌系统的间歇同步,得到了较好的同步效果。然而基于相同系统的混沌同步,由于传输信道中保密信号的单一性和重复性,以及要求系统参数精确匹配,保密性能不是非常理想<sup>[10]</sup>。近年来,两个不同系统之间的混沌问题引起了人们的广泛重视<sup>[11-13]</sup>。本文研究了两个具有拓扑相似性的异结构混沌系

统间的间歇同步控制问题,讨论了通过调节间歇控制器的比例因子  $D$  和反馈系数  $k$  来改善系统同步性能等问题。理论分析和数值仿真表明了该方案的有效性。

### 2 统一混沌系统与其变形系统间的间歇同步控制原理

现在,研究两个具有拓扑相似性的异结构混沌系统间的间歇同步控制问题。对于统一混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\alpha + 10)(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - (8 + \alpha)x_3 / 3 \end{cases} \quad (1)$$

当参数  $\alpha \in [0, 1]$  时,系统处于混沌态。

对方程的非线性项进行替换<sup>[14]</sup>,在保持系统参数  $\alpha$  不变的同时,用  $x_1^2$  替换掉  $x_1x_2$  项,并改用  $y$  表示变量,就得到统一混沌系统的一种变形系统

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (25\alpha + 10)(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = (28 - 35\alpha)y_1 - y_1y_3 + (29\alpha - 1)y_2 \\ \dot{y}_3 = y_1^2 - (8 + \alpha)y_3/3 \end{cases} \quad (2)$$

相应地, 当  $\alpha = 0.8$  时, 系统式(1)和系统式(2)分别称为 Lu 系统和变形 Lu 系统。当初始值为  $[-1, 1, 0]$  时, 其相空间的演化轨迹如图 1 所示。比较图 1(a)和图 1(b)可看出, Lu 系统与变形 Lu 系统的相轨迹曲线具有一定的相似性, 但变形系统在相空间的演化轨迹更加发散, 系统更复杂。

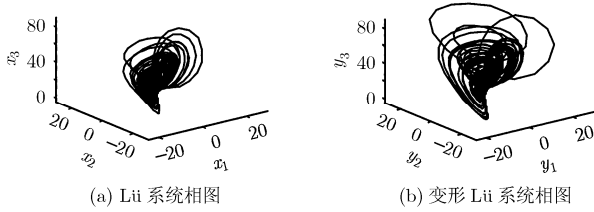


图 1  $\alpha=0.8$  时两系统的相空间演化图

为了实现混沌系统式(1)和变形系统式(2)的同步, 对式(2)加入同步控制信号  $u_i(t)$ , 则(2)式变为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (25\alpha + 10)(y_2 - y_1) + u_1(t) \\ \dot{y}_2 = (28 - 35\alpha)y_1 - y_1y_3 + (29\alpha - 1)y_2 + u_2(t) \\ \dot{y}_3 = y_1^2 - (8 + \alpha)y_3/3 + u_3(t) \end{cases} \quad (3)$$

下面来推导式(1)和式(2)实现同步的条件。

令误差变量为  $e_i = x_i - y_i$ , 则由式(1)和式(3)组成的同步系统的误差系统方程为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (25\alpha + 10)(e_2 - e_1) - u_1(t) \\ \dot{e}_2 = (28 - 35\alpha - x_3)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 - y_1e_3 - u_2(t) \\ \dot{e}_3 = (x_1x_2 - x_1^2) + 2x_1e_1 - e_1^2 - (8 + \alpha)e_3/3 - u_3(t) \end{cases} \quad (4)$$

设控制变量为

$$\begin{cases} u_1(t) = 0 \\ u_2(t) = -x_3e_1p(t) + ke_2p(t) - y_1e_3p(t) \\ u_3(t) = (x_1x_2 - x_1^2) + 2x_1e_1p(t) + ke_3p(t) \end{cases} \quad (5)$$

其中  $p(t)$  是  $D$  (脉冲长度和脉冲周期比值)一定、周期为  $T$  的脉冲信号, 其表达式为

$$p(t) = \begin{cases} 1, & iT \leq t \leq iT + TD \\ 0, & iT + TD < t < (i+1)T \end{cases} \quad (6)$$

可见, 式(5)是由非线性连续反馈与线性间歇反馈构成的复合控制器。这样式(4)变为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (25\alpha + 10)(e_2 - e_1) \\ \dot{e}_2 = (28 - 35\alpha - x_3 + x_3p(t))e_1 + (29\alpha - 1 - kp(t))e_2 - y_1(1 - p(t))e_3 \\ \dot{e}_3 = 2x_1e_1(1 - p(t)) - e_1^2 - (8 + \alpha)e_3/3 - ke_3p(t) \end{cases} \quad (7)$$

若上式在原点处渐近稳定, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$ , 则系统式

(1)和系统式(3)就可实现同步。下面给出两系统的同步定理。

**定理 1** 对于统一混沌系统式(1)及其变形系统式(2), 在如式(5)的控制变量作用下, 当反馈系数  $k$  满足:  $k > 27 - 6\alpha$ , 且  $D \geq 0.4$  时, 受控的变形系统式(3)和统一混沌系统(1)可以实现渐进稳定同步。

**证明** 把误差系统方程式(7)进行分解, 当  $iT \leq t \leq iT + TD$  时,

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_1^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中  $\mathbf{A}_1$  为有控制脉冲时误差系统的 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -25\alpha - 10 & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 - k & 0 \\ 0 & 0 & -(8 + \alpha)/3 - k \end{bmatrix} \quad (9)$$

当  $iT + TD < t < (i+1)T$  时

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e_1^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中  $\mathbf{A}_2$  为无控制脉冲时误差系统的 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -25\alpha - 10 & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha - x_3 & 29\alpha - 1 & -y_1 \\ 2x_1 & 0 & (8 + \alpha)/3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

误差系统的非线性项为  $-e_1^2$ , 因为对所有的  $t$  都满足当  $\|e\| \rightarrow 0$  时,  $\|-e_1^2\|/\|e\| \rightarrow 0$ , 所以误差的演化依赖于  $\mathbf{A}_1$  和  $\mathbf{A}_2$ 。在  $iT \leq t \leq iT + TD$  时间内,  $e$  的演化受  $\mathbf{A}_1$  控制, 因为  $\alpha \in [0, 1]$ , 根据连续系统的稳定性准则计算得, 如果  $k$  满足:  $k > 27 - 6\alpha$  时, 则矩阵  $\mathbf{A}_1$  的特征值都具有负实部, 故此时误差系统的零点渐近稳定。在  $iT + TD < t < (i+1)T$  时间内, 受控系统失去部分外加反馈,  $e$  的演化受  $\mathbf{A}_2$  控制。由于  $\mathbf{A}_2$  不满足稳定条件, 此时两个系统的轨迹将指数度发散, 出现失步。但只要保证  $e$  还在足够小的范围内, 再继续施加控制脉冲, 仍可保证  $e$  不会偏离很远, 使两系统渐进达到同步状态。将连续系统离散化后, 误差的方程可写成

$$\begin{bmatrix} e_1(i) \\ e_2(i) \\ e_3(i) \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_1(t))^{m_1} (\mathbf{A}_2(t))^{m_2} \begin{bmatrix} e_1(i-1) \\ e_2(i-1) \\ e_3(i-1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中  $e(i)$  是第  $i$  个脉冲周期的误差向量。  $DT = m_1h$ ,  $(1-D)T = m_2h$ ,  $h$  是积分步长,  $m_1, m_2$  是有脉冲和无脉冲时对应的积分迭代次数。可见, 由于  $(\mathbf{A}_2)^{m_2}$  的存在, 在同步过程中将产生振荡, 同步过程的稳定性将依赖于整个  $|(\mathbf{A}_1)^{m_1} (\mathbf{A}_2)^{m_2}|$ 。如果满足  $|(\mathbf{A}_1)^{m_1} (\mathbf{A}_2)^{m_2}| = |J| < 1$ , 误差方程将趋于稳定<sup>[9]</sup>。为了获得  $D$  值确切范围, 我们进行了一系列数值实验。对不同的  $\alpha$  值, 都取满足  $k > 27 - 6\alpha$  的最小  $k$

值，数值统计表明，一般只要满足  $D \geq 0.4$ ，就可以保证在 10s 内达到精确同步。 证毕

### 3 同步仿真与性能分析

同步系统性能的研究直接关系到混沌系统的实际应用，开展同步性能的机理研究具有重大意义。通过合理选择系统初值、控制参数可改善系统的同步性能，如缩短同步建立时间，提高同步系统的稳定性和收敛速度，增大同步系统的抗干扰能力等。在 Matlab 6.5 仿真平台上，作者对统一混沌系统及其变形系统的同步控制和性能改善进行了研究。令同步误差信号为  $|e| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ 。下面主要从系统初值、反馈系数  $k$  值、比例因子  $D$ 、步长  $h$  和系统参数  $\alpha$  等方面观察同步建立时间。

#### 3.1 系统初值对同步性能的影响

取  $\alpha = 0.8$ ,  $k = 40$ ,  $T = 0.1s$ ,  $D = 0.6$ ,  $h = 0.001$ , 系统初值 (1)、(2)、(3) 分别为: (1)  $\begin{cases} x(0) = [20, 20, 20] \\ y(0) = [-2, 1, 0] \end{cases}$ , (2)  $\begin{cases} x(0) = [10, 10, 10] \\ y(0) = [-2, 1, 0] \end{cases}$ , (3)  $\begin{cases} x(0) = [5, 5, 5] \\ y(0) = [-2, 1, 0] \end{cases}$  时, 系统的同步误差

收敛曲线如图 2 所示。可见, 两系统在 1.5s 内就能建立同步; 同步建立过程中出现振荡现象, 这与  $A_2$  的特征值有关, 因在刚开始的  $iT + TD < t < (i + 1)T$  时间内, 误差  $e$  还未达到稳定状态。此外, 初值(3)的振荡最小, 初值(1)的振荡最大, 可见, 两系统的初值差越大, 产生的振荡越大, 建立精确同步的时间越长。但总体来说, 即使在初值差较大的情况下, 也能达到令人满意的同步效果。

#### 3.2 不同 $k$ 值, $D$ 值和步长 $h$ 对系统同步性能的影响

取  $\alpha = 0.8$ ,  $T = 0.1s$ ,  $D = 0.8$ ,  $h = 0.0001$ , 初值  $x(0) = [5, 5, 5]$ ,  $y(0) = [-2, 1, 0]$ , 当  $k_1, k_2, k_3$  值分别为 42, 32, 27 (此时  $k$  满足  $k > 27 - 6\alpha$ ) 时, 系统的同步误差收敛曲线如图 3 所示。可见, 不同  $k$  值对应的曲线平滑程度是不一样的,  $k = 27$  收敛最慢,  $k = 42$  收敛最快。因此, 同步建立时间随着  $k$  增大而减小, 这是与理论分析相符合的。因此, 满足  $k > 27 - 6\alpha$  的前提下, 可通过调节  $k$  的大小来调节同步建立时间。实际应用中, 考虑到成本和实现难易等因素,  $k$  也不应取得过大。

为了满足同步,  $D$  的调节同样至关重要。数值实验研究

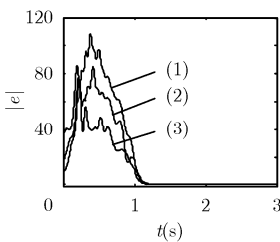


图 2 不同初值条件下的同步误差收敛曲线

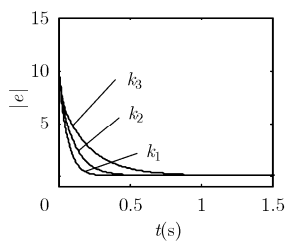


图 3 不同 k 值条件下的同步误差收敛曲线

表明, 与  $k$  值相似, 同步建立时间同样随着  $D$  增大而减小。进一步实验还证明, 选取的步长  $h$  越小, 振荡时间越小, 误差曲线收敛速度越快。

#### 3.3 参数值 $\alpha$ 对系统同步性能的影响

取  $k = 45$ ,  $T = 0.1s$ ,  $D = 0.6$ ,  $h = 0.0001$ , 初值  $x(0) = [15, 15, 15]$ ,  $y(0) = [-15, -15, -15]$ , 建立精确同步的时间  $tb$  随参数值  $\alpha$  变化的关系如图 4 所示。可见, 当  $\alpha \in [0, 1]$  时, 在此条件下, 统一混沌系统与其变形系统基本都能在 4s 内实现同步, 且同步建立时间随参数  $\alpha$  的增加而减小。总体来说, 当参数  $\alpha$  取不同值时, 同步性能良好。

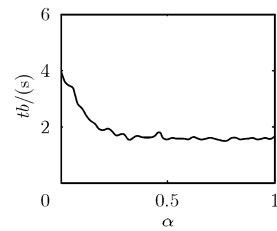


图 4 同步建立时间  $tb$  与参数  $\alpha$  的关系图

## 4 工程案例研究以及探讨

采用本文提出的间隙同步方案设计混沌掩盖保密通信系统, 保密系统原理框图如图 5 所示。发送端由统一混沌系统产生混沌信号, 并对待传输信号进行掩盖调制, 接收端通过控制变形系统的同步来解调出有用信号。设待传输信号为  $m(t) = 15 \sin(0.4t)$ , 压缩比率为 0.02, 则调制后的信号为  $z(t) = 0.02m(t) + x_3(t)$ , 系统参数为  $\alpha = 0.8$ ,  $D = 0.4$ ,  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = 10$ ,  $x_3(0) = 10$ ,  $y_1(0) = -2$ ,  $y_2(0) = 1$ ,  $y_3(0) = 0$ ,  $k = 30$ 。

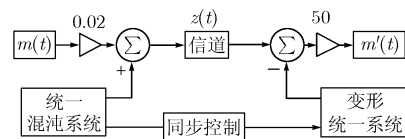
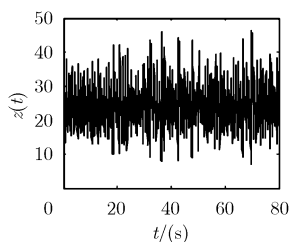
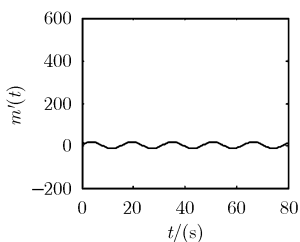


图 5 保密通信系统原理框图

信道中的传输信号与接收端解调后的信号分别如图 6 和图 7 所示。由图 6 可见, 信道中传输的信号为随机信号, 很好地掩盖了有用信息, 实现保密通信。从图 7 可见, 系统能很快实现同步, 并能正确恢复信息信号, 解调后的有用信号与原信号一致。但是在实现同步之前, 信号严重失真, 这与初始值的差值大小有关。仿真实验证明, 初值差越大, 则初始失真越大, 这也对混沌系统同步性能提出了更高的要求。

由于以往的保密通信方案大多基于相同系统, 本文中同步方案的发送端和接收端的混沌系统不同, 就使保密通信方案可以更为灵活。例如, 可以把发送端的系统在原系统和其变形系统间切换, 即通过相同系统或不同系统的同步切换来

图6 信道中的传输信号  $z(t)$ 图7 接收端解调后恢复的有用信号  $m'(t)$ 

实现保密通信,增加了破译的难度。另一方面,与连续控制方法相比,间歇性的控制方法可以用较低的代价达到预期的同步要求,同步效果好,实现容易。

## 5 结束语

本文以统一混沌系统及其变形系统为例,研究了具有拓扑相似性的异结构混沌系统间的歇反馈同步控制方法,并从理论和数值仿真实验两方面证明了该方法的有效性。研究表明,可以通过调节反馈系数  $k$ , 脉冲的比例因子  $D$ , 步长  $h$  等来改善同步系统的同步性能。最后,通过实际的工程案例验证和讨论了其在保密通信中的应用。

## 参考文献

- [1] Pecora L M and Carroll T L. Synchronization in chaotic system [J]. *Physical Review Letter*, 1990, 64(8): 821-824.
- [2] Lü J H, Chen G R, and Cheng D Z, et al. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(12): 2917-2926.
- [3] Lu J A, Wu X Q, and Lü J H. Synchronization of an unified chaotic system and the application in secure communication [J]. *Physical Letter A*, 2002, 305: 365-370.
- [4] 罗晓曙, 方锦清, 王力虎. 一种基于间歇性正比于系统参量的脉冲微扰控制混沌方法[J]. *物理学报*, 1999, 48(12): 2196-2201.
- Luo X S, Fang J Q, and Wang L H. A method of controlling chaos based on intermittent proportional pulse perturbation to the system parameters [J]. *Acta Physica Sinica*, 1999, 48(12): 2196-2201.
- [5] 李国辉, 周世平, 徐得名, 等. 间歇线性反馈控制混沌[J]. *物理学报*, 2000, 49(11): 2123-2127.
- Li G H, Zhou S P, and Xu D M, et al. The chaotic control of intermittent nonlinear feedback [J]. *Acta Physica Sinica*, 2000, 49(11): 2123-2127.
- [6] 戴栋, 马西奎. 基于间歇性参数自适应控制的混沌同步[J]. *物理学报*, 2001, 50(7): 1237-1240.
- Dai D and Ma X K. Chaos synchronization on using intermittent parametric adaptive control [J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50(7): 1237-1240.
- [7] 刘扬正, 李平. 利用间歇非线性时滞反馈控制一维 Logistic 系统的混沌运动[J]. *南京师范大学学报*, 2002, 25(3): 53-57.
- Liu Y Z and Li P. The Chaotic control of logistic map based on the occasional nonlinear time-deayed feedback [J]. *Journal of Nanjing Normal University*, 2002, 25(3): 53-57.
- [8] 马军, 廖高华, 莫晓华. 超混沌系统的间歇同步与控制[J]. *物理学报*, 2005, 54(12): 5585-5590.
- Ma J, Liao G H, and Mo X H. Hyperchaos synchronization and control using intermittent feedback[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(12): 5585-5590.
- [9] 翁贻方, 翁莉娟, 张蕾. 提高混沌同步保密通讯安全性的设计方案研究[J]. *电子与信息学报*, 2004, 26(7): 1057-1063.
- Wen Y F, Wen L J, and Zhang L. Research on chaotic synchronized secure communication schemes to improve security [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2004, 26(7): 1057-1063.
- [10] Yassen M T. Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 23: 131-140.
- [11] 陈骏, 刘曾荣. 不同系统之间的部分同步[J]. *应用数学与力学*, 2005, 26(9): 1033-1037.
- Chen J and Liu Z R. Partial synchronization between different Systems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, 26(9): 1033-1037.
- [12] Sun F Y. Global chaos synchronization between two new different chaotic systems via active control [J]. *Chinese Physics Letter*, 2006, 23(1): 32-34.
- [13] 刘扬正, 费树岷. Sprott\_B 和 Sprott\_C 系统之间的耦合混沌同步[J]. *物理学报*, 2006, 55(3): 1035-1039.
- Liu Y Z and Fei S M. Chaos synchronization between the Sportt\_B and Sprott\_C with linear coupling [J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(3): 1035-1039.
- 孙克辉: 男, 1968 年生, 博士, 教授, 研究领域为混沌理论及其应用.
- 尚芳: 女, 1983 年生, 硕士生, 研究领域为混沌同步与多媒体加密.
- 钟科: 男, 1981 年生, 硕士生, 研究领域为宽带无线通信.
- 盛喆: 女, 1987 年生, 本科生, 研究兴趣为加密算法与数值仿真.