

## 抛物方程方法的亚网格模型及其应用研究

张青洪<sup>\*①</sup> 廖成<sup>①</sup> 盛楠<sup>①</sup> 赵朋程<sup>①</sup> 周海京<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(西南交通大学电磁场与微波技术研究所 成都 610031)

<sup>②</sup>(北京应用物理与计算数学研究所 北京 100094)

**摘要:** 该文在抛物方程非均匀网格技术的基础上,提出了抛物方程方法的亚网格模型,并给出了该亚网格模型的具体构建方法,以快速准确地求解大尺度复杂电磁环境中存在关键目标的电波传播问题。通过对存在强散射体的复杂电磁环境中电磁波的分布特性进行模拟,探讨了抛物方程亚网格技术的高效性。结果表明:与细网格相比,亚网格技术使得抛物方程的计算速度提升了 4.57 倍,网格空间数下降了 86.64%,且较非均匀网格具有更高的计算精度。可见,抛物方程的亚网格模型能够极大地提升抛物方程的仿真效率。

**关键词:** 电波传播; 抛物方程; 亚网格技术; 关键目标

**中图分类号:** TN011

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2014)08-2005-05

**DOI:** 10.3724/SP.J.1146.2013.01428

## Study on Subgridding Model of the Parabolic Equation and Its Application

Zhang Qing-hong<sup>①</sup> Liao Cheng<sup>①</sup> Sheng Nan<sup>①</sup> Zhao Peng-cheng<sup>①</sup> Zhou Hai-jing<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(Institute of Electromagnetics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

<sup>②</sup>(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

**Abstract:** In order to rapidly and accurately solve the radio wave propagation problems in a large scale complex electromagnetic environment with key targets, a subgridding model of the Parabolic Equation (PE) method based on the non-uniform mesh technology is presented with the detailed description on how to construct specifically this model. The high efficiency of subgridding technique is verified by computing a complex electromagnetic environment case with a strong scattering object. The results show that the subgridding technique for the parabolic equation can improve the computational speed by 4.57 times and decrease the grid number by 86.64% as compared with the fine grid. It has a higher precision in comparison with the non-uniform mesh, demonstrating that the subgridding model can significantly enhance the simulation efficiency in solving the parabolic equation.

**Key words:** Radio wave propagation; Parabolic Equation (PE); Subgridding technique; Key targets

### 1 引言

电波传播一直是工程电磁场理论和环境电磁特性研究领域中最为人们广泛关注和研究的方之一<sup>[1-5]</sup>。随着现代无线通信的高速发展、战争电子装备的大量使用等,复杂环境下的电波传播预测已经成为一个重要的研究课题。

抛物方程(Parabolic Equation, PE)方法由 Leontovich 和 Fock<sup>[6]</sup>在 20 世纪 40 年代提出,它本身就能体现电波传播的折射和绕射效应,能处理各种复杂环境因素,不但计算简单、计算速度快,计算精度也高。因此,抛物方程方法被广泛应用于复杂电磁环境电波传播问题的研究<sup>[7-9]</sup>。

目前,求解抛物方程的方法主要有分步傅里叶变换法(Split-Step Fourier Transform, SSFT)<sup>[10]</sup>和有限差分法(Finite Difference, FD)<sup>[11]</sup>。SSFT 允许相对较大的水平步长,且在 SSFT 算法中不需要进行矩阵运算,所以 SSFT 算法的计算时间短,速度快。在求解远距离、大范围的电波传播问题时,抛物方程主要采用 SSFT 来进行求解。对区域复杂电磁环境中的关键目标,如建筑物、电子装备等,其结构往往比较精细,在应用抛物方程模拟大区域环境中关键目标区域的电磁特性时,如果采用均匀粗网格来划分整个计算空间,得到的关键目标区域的场值会产生较大的误差,而如果采用均匀细网格则会占用过多的运行时间和计算资源,为此,必须对抛物方程的高效网格技术进行研究,以获得计算速度与计算精度的均衡。文献[12]研究了抛物方程在水平方向上的非均匀网格技术,使得大尺度区域中抛物方程的计算效率得到了有效提升,但是其在高

2013-09-17 收到, 2013-12-18 改回

国家自然科学基金委和中科院联合基金(U1330109), 高等学校博士学科点专项科研基金(20120184110013), 2014 年西南交通大学博士研究生创新基金和中央高校基本科研业务费专项资金资助课题

\*通信作者: 张青洪 zqh19861020@163.com

度方向上仍是采用均匀网格来划分,且高度网格较大,当我们关心的目标区域结构精细时,抛物方程仿真精度会降低,为此,本文在文献[12]的基础上提出了抛物方程的亚网格模型,以进一步提升抛物方程的仿真效率,并从抛物方程的网格占用量、计算速度、计算精度等方面探讨了该亚网格模型的高效性。

## 2 抛物方程方法简介

在直角坐标系中,设电磁场的时谐因子为  $e^{-i\omega t}$ ,以标量  $\psi$  表示与  $y$  方向无关的任一电磁场分量。在电波传播过程中,  $\psi$  满足 2 维标量波动方程<sup>[13]</sup>:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \psi(x, z) = 0 \quad (1)$$

式(1)中:  $k_0$  为真空中的传播常数;  $n$  为媒质的折射率。

定义沿  $x$  轴正向传播的波函数为

$$u(x, z) = e^{-ik_0 x} \psi(x, z) \quad (2)$$

将其代入式(1)并进行因式分解可得前向抛物方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ik_0(1 - Q)u \quad (3)$$

式(3)中:  $Q$  为伪微分算子,且

$$Q = \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2} \quad (4)$$

对  $Q$  进行不同的近似可以得到不同形式的抛物方程,对其采用 Feit-Fleck 近似<sup>[14]</sup>,可以得到 Feit-Fleck 型宽角 PE 方程为

$$\frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = ik_0 \left[ \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 1} \right] \cdot u(x, z) + ik_0(n-1)u(x, z) \quad (5)$$

Feit-Fleck 型宽角抛物方程 SSFT 解的形式为

$$u(x + \Delta x, z) = e^{ik_0 \Delta x(n-1)} \cdot \mathfrak{S}^{-1} \left\{ e^{i\Delta x(\sqrt{k_0^2 - p^2} - k_0)} \mathfrak{S} [u(x, z)] \right\} \quad (6)$$

式(6)中,  $\mathfrak{S}$  和  $\mathfrak{S}^{-1}$  分别表示傅里叶正变换和逆变换;  $p = k_0 \sin \alpha$  为傅里叶变换的频域变量,  $\alpha$  为每一步进的传播仰角;  $u(x, z)$  为上一步进上的场分布;  $\Delta x$  为步进的网格步长值。由式(6)可知,抛物方程的 SSFT 解法是一个步进求解的过程,由前一个面上的场就可以求得下一步进上的场分布。

## 3 抛物方程的亚网格模型

在抛物方程方法的 SSFT 解法中,根据 Nyquist 准则,高度上的网格大小要满足:

$$\Delta z \leq \frac{\lambda}{2\sin(\alpha_{\max})} \quad (7)$$

其中,  $\Delta z$  为高度网格大小,  $\lambda$  为波长,  $\alpha_{\max}$  为 PE 的最大计算仰角。在大区域环境电波传播特性仿真中,一般取

$$\Delta z = \frac{\lambda}{2\sin(\alpha_{\max})} \quad (8)$$

由式(8)可以看出:抛物方程 SSFT 解法的高度网格大小一般由抛物方程的最大计算仰角决定,且网格的电长度较大。当关键目标结构精细时,抛物方程的仿真将会产生较大误差。由式(7)可知,抛物方程高度网格在满足小于或者等于  $\lambda/(2\sin\alpha_{\max})$  的条件下,可以进行不同的细网格划分,基于此,本文在文献[12]的基础上,提出了抛物方程的亚网格模型,以提高抛物方程的仿真效率。

抛物方程亚网格模型的网格分布如图 1 所示,图中  $A$  区为关键目标区域。

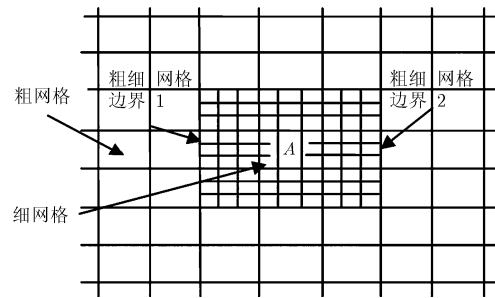


图 1 抛物方程的亚网格示意图

图 1 中,对于关键目标区域,抛物方程在水平方向和高度方向上均采用细网格划分,而在其它区域则采用粗网格来划分。抛物方程具体的仿真流程如图 2 所示,该过程主要包含以下 3 个部分。

- (1)应用粗网格抛物方程步进计算至粗细网格边界 2 处,并得到粗细网格边界 1 处的粗网格场值;
- (2)由边界 1 上的粗网格场求解细网格区域的初始场值,并在细网格空间应用抛物方程对关键目标区域的电磁场进行精确模拟;

(3)通过边界 2 处细网格上的场值来对该边界上的粗网格场进行修正,再用修正后的粗网格场继续步进求解边界 2 右边整个区域的电磁场分布。

通过以上 3 个步骤就可以对整个空间的电磁场分布特性进行求解。

在通过粗网格场求解细网格上的初始场值时,本文采用了线性插值的方法,具体的插值方法为

$$u(x, H) = \frac{H-h}{\Delta z} u(x, h+\Delta z) + \frac{h+\Delta z-H}{\Delta z} u(x, h) \quad (9)$$

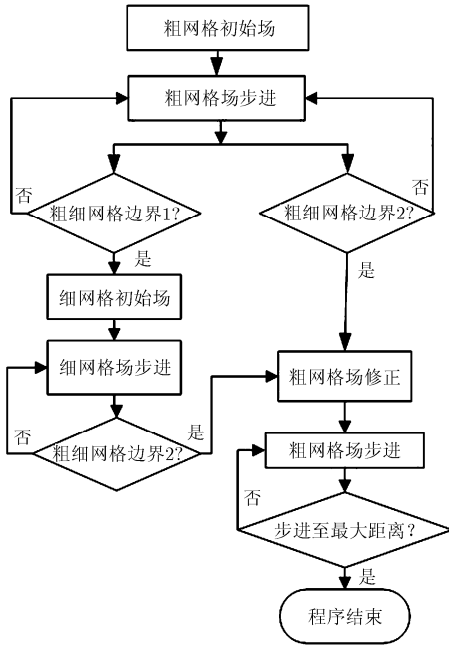


图 2 抛物方程亚网格模型仿真流程图

其中， $H$  为要计算的细网格点所在高度； $h$  为细网格下方靠近细网格的粗网格点所处高度； $\Delta z$  为粗网格大小。抛物方程的 SSFT 解法是一个步进求解的过程，通过插值方法得到细网格点上的初始场后，就可以对整个关键目标区域的场值进行更精确的求解。

为了提高粗细网格边界 2 右边区域电磁场的求解精度，必须用边界 2 上的细网格场来对该处粗网格场进行修正。由于该处粗网格正好位于细网格上，因此本文直接采用细网格的场值来修正粗网格场。

### 4 数值算例

#### 4.1 水平地面电波传播特性模拟及分析

本文首先应用抛物方程的亚网格模型仿真了电波在水平地面上的传播特性，并将仿真结果与均匀粗网格和均匀细网格抛物方程的结果进行对比，以验证抛物方程高度网格取值条件的正确性及亚网格技术的有效性。

算例设置：发射天线频率为 1 GHz，方向图采用高斯方向图，能量的 3 dB 宽度为  $3^\circ$ ，水平极化，天线高为 25 m；大气为折射率为 1 的均匀大气，地表采用 PEC 边界。

本算例的亚网格设置为在距离 1.0~1.1 km 的空间划分细网格，其它区域划分粗网格。采用两种不同的亚网格设置，分别为细网格在高度上和水平方向上均为粗网格大小的 1/4 和 1/8，高度粗网格大小为 0.225 m，水平粗网格大小为 1 m。

图 3 为电波传播 1.1 km 处不同高度上的场实部对比图，其中 1/4 亚网格和 1/8 亚网格分别代表亚网格模型中细网格在高度上和水平方向上均为粗网格大小的 1/4 和 1/8。

在本算例中，高度网格大小均满足式(7)，由图可知：不同高度网格划分时，抛物方程的仿真结果基本相同，由此说明了抛物方程高度网格取值条件即细网格取值条件的正确性。同时，通过亚网格抛物方程仿真的结果与均匀细网格抛物方程模拟的结果基本一致，由此验证了本文抛物方程亚网格技术的可行性和正确性。

#### 4.2 包含强散射体的复杂环境中电磁特性的模拟及分析

本算例应用抛物方程的亚网格模型对一个包含强散射体、大气波导结构等因素的复杂环境中电磁波的传播特性进行了模拟，并从抛物方程的计算精度、网格占用量、计算时间等方面探讨了该亚网格技术的高效性。

算例源参数设置与上一节相同，大气采用表面波导，其修正折射率随高度的变化如图 4 所示；地表的相对介电常数为 20，导电率为 0.08 S/m；地面存在一无限长的圆柱强散射体，圆柱圆心的距离为 1.01 km，高度为 5 m，半径为 5 m。仿真的最大距离为 1.5 km。

本文分别采用抛物方程的非均匀网格模型、亚网格模型以及细网格模型仿真了空间电磁波的传播特性，并对比了各模型的仿真结果及性能。算例中

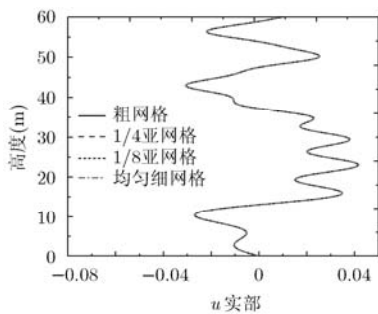


图 3 电波传播 1.10 km 处不同高度上的场分布图

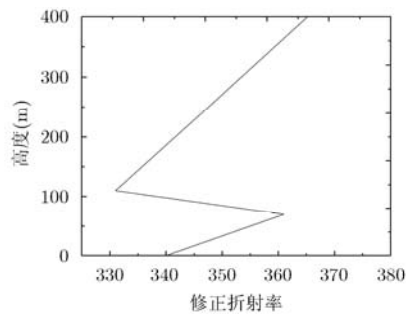


图 4 表面波导修正折射率分布图

非均匀网格模型在距离 1.00~1.02 km 处水平网格大小设置为 1 m, 其余水平网格大小设置为 10 m, 在高度上均划分粗网格, 大小为 0.225 m; 亚网格设置为在距离 1.00~1.02 km 处在水平方向和高度方向均划分细网格, 其中高度细网格为非均匀网格模型中高度网格大小的 1/8, 水平细网格为非均匀网格模型的 1/4, 其余设置与非均匀网格相同; 细网格模型为在非均匀网格的基础上, 对高度方向均划分为细网格, 且在距离 1.00~1.02 km 处在水平方向上也采用细网格划分。

图 5 和图 6 分别为采用非均匀网格和亚网格抛物方程计算得到的空间传播因子伪彩图, 图 7 为电波传播 1.02 km 处不同高度上的传播因子输出。

从图 5 与图 6 可以看出, 和抛物方程非均匀网格模型相比, 亚网格模型能够更好地描述圆柱散射体的物理边界, 当关键目标结构变化较快时, 抛物方程亚网格模型的优势将会更加明显。由于空间存在圆柱散射体, 从散射体绕射到散射体后面的波会在地面发生反射, 并与直达的绕射波发生相干叠加, 由图 7 可知, 在低于 10 m 的高度上, 抛物方程采用非均匀网格仿真的结果基本呈线性变化, 没有出现明显的空间场相干叠加现象, 而采用亚网格以及细网格仿真的结果中可以看到电磁波的相干叠加现象明显, 且亚网格抛物方程结果与细网格的结果吻合较好, 可见, 相对于非均匀网格, 抛物方程亚网格模型的计算结果更加准确。

图 8 为采用粗网格场修正后的抛物方程计算得到的电波传播至不同距离时传播因子随高度的变化曲线, 并将结果与未修正的粗网格抛物方程以及细网格抛物方程的结果进行了对比。

由图 8 可知: 在离散射体较近的距离处, 未修正粗网格抛物方程仿真的结果会带来一定误差, 而在距离较远处, 未修正粗网格抛物方程带来的误差很小。这是因为在距离散射体较近距离处, 较低高度上的波受强散射体的影响较大, 因此未修正粗网

格抛物方程的仿真结果误差较大, 在较远距离处, 到达的电磁波主要是发射源的直达波和发射源直达波被地面反射后的电磁波到达, 而由散射体绕射的波几乎为 0, 因此未修正粗网格抛物方程的仿真结果误差很小, 几乎可以忽略。图 8 中, 不同传播距离处, 粗网格场修正后的抛物方程仿真结果与细网格抛物方程的仿真结果均吻合很好。由此可见, 采用细网格场对粗网格场进行修订后, 能够在一定范围内有效地提升抛物方程的计算精度。

表 1 为细网格抛物方程和亚网格抛物方程的计算时间及空间网格数对比。

表 1 计算时间和网格空间对比

	计算时间(s)	网格数
细网格	17.113	$7.471 \times 6$
亚网格	3.744	$9.953 \times 5$

由表 1 可知: 在本算例中, 细网格抛物方程的计算时间为 17.113 s, 亚网格抛物方程的计算时间为 3.744 s, 相对于细网格抛物方程, 亚网格抛物方程的计算速度提高了 4.57 倍; 同样, 由表 1 可知, 相对于细网格, 亚网格抛物方程的网格数下降了 86.64%, 这极大地减少了抛物方程仿真所需的计算机资源。

由以上分析可知: 本文的亚网格技术在保证抛物方程仿真精度的同时, 极大地减少了计算所占的资源和计算时间, 具有综合优势。在实际包含关键目标的大区域环境电波传播问题, 特别是 3 维问题中, 随着仿真范围的增加和目标区域环境因素的复杂化, 亚网格技术对抛物方程仿真效率的提升将会更明显。

## 5 结束语

在预测大区域复杂电磁环境中的电波传播特性时, 对于本文关心的目标区域, 需要获得更精确的

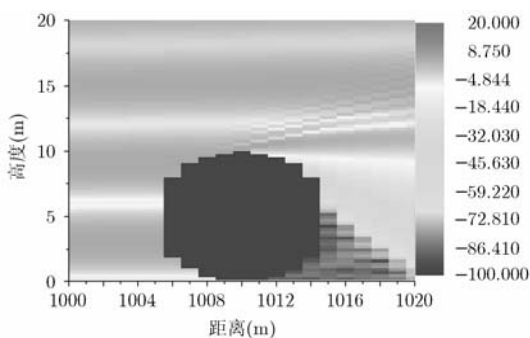


图 5 非均匀网格抛物方程仿真结果

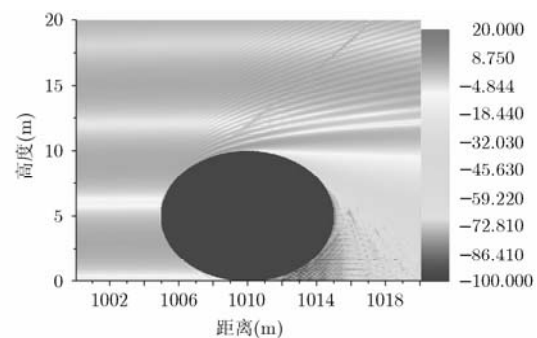


图 6 亚网格抛物方程仿真结果

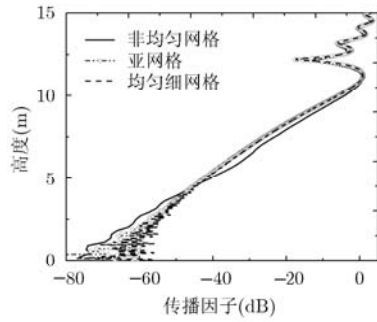
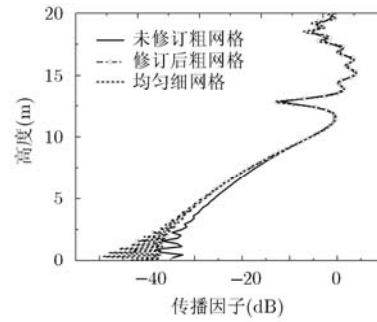
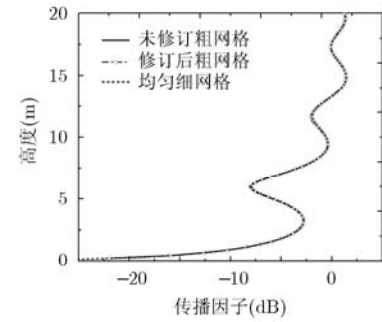


图7 电波传播 1.02 km 时不同高度上的传播因子分布图



(a) 传播距离 1.03 km



(b) 传播距离 1.50 km

图8 不同传播距离时传播因子随高度变化图

电磁场分布, 为此, 本文基于抛物方程的非均匀网格技术构建了抛物方程的亚网格模型, 并对亚网格模型的具体构建方法及其高效性进行了探讨。仿真结果表明: 与非均匀网格相比, 亚网格抛物方程能够更好地描述关键目标的边界, 其仿真结果更准确, 且与细网格相比大大减少了计算所需的时间和计算机资源, 具有高效性。

### 参考文献

- [1] 杨宏春, 阮成礼, 杨春, 等. 脉冲波形对其轴线能量传播特性影响的研究[J]. 电子与信息学报, 2003, 25(10): 1430-1435.  
Yang Hong-chun, Ruan Cheng-li, Yang Chun, *et al.* The study of axial energy decaying property influenced by pulse waveform[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2003, 25(10): 1430-1435.
- [2] Chee K L, Torrico S A, and Kürner T. Radiowave propagation prediction in vegetated residential environments[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2013, 62(2): 486-499.
- [3] 巨汉基, 方广有, 纪奕才, 等. 离散复镜像法在海水极低频电磁波传播计算中的应用[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(4): 922-926.  
Ju Han-ji, Fang Guang-you, Ji Yi-cai, *et al.* Application of DCIM on extremely low frequency electromagnetic wave propagation calculation in sea water[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(4): 922-926.
- [4] 王红光, 吴振森, 朱庆林. 大气折射对雷达低仰角跟踪误差的影响分析[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(8): 1893-1896.  
Wang Hong-guang, Wu Zhen-sen, and Zhu Qing-lin. Influence analysis of atmospheric refraction on low-angle radar tracking errors[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(8): 1893-1896.
- [5] 霍羽, 徐钊, 刘逢雪. 融合波模和射线理论的矿井电波传播模型[J]. 电子学报, 2013, 41(1): 110-116.  
Huo Yu, Xu Zhao, and Liu Feng-xue. A wave propagation model combined the modal theory and ray theory in coal mine tunnels[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2013, 41(1): 110-116.
- [6] Leontovich M A and Fock V A. Solution of propagation of electromagnetic waves along the earth's surface by the method of parabolic equation[J]. *Journal of Physics, USSR*, 1946, 10(1): 13-24.
- [7] Donohue D J and Kuttler J R. Propagation modeling over terrain using the parabolic wave equation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2000, 48(2): 260-277.
- [8] Apaydin G and Sevgi L. Calibration of three-dimensional parabolic-equation propagation models with the rectangular waveguide problem[J]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2012, 54(6): 102-116.
- [9] 黄小毛, 张永刚, 王华, 等. 蒸发波导中电磁波异常传播特征研究及其应用[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(8): 1508-1512.  
Huang Xiao-mao, Zhang Yong-gang, Wang Hua, *et al.* Study on anomalous propagation characteristics of electromagnetic waves in evaporation duct environments and its application [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2006, 28(8): 1508-1512.
- [10] Janaswamy R. Path loss predictions in the presence of buildings on flat terrain: a 3-D vector parabolic equation approach[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2003, 51(8): 1716-1728.
- [11] 陈大明, 吴先良. 基于抛物线方程求解二维电磁散射问题[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2005, 28(11): 1477-1479.  
Chen Da-ming and Wu Xian-liang. 2-D electromagnetic scattering calculations with the parabolic equation[J]. *Journal of Hefei University of Technology (Natural Science)*, 2005, 28(11): 1477-1479.
- [12] 张青洪, 廖成, 盛楠, 等. 抛物方程方法非均匀网格技术研究[J]. 电波科学学报, 2013, 28(4): 635-640.  
Zhang Qing-hong, Liao Cheng, Sheng Nan, *et al.* Non-uniform mesh technique for parabolic equation[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2013, 28(4): 635-640.
- [13] Levy M. Parabolic Equation Methods for Electromagnetic Wave Propagation[M]. London: IEEE, 2000: 5.
- [14] Feit M D and Fleck J A. Light propagation in graded-index fibers[J]. *Applied Optics*, 1978, 17(24): 3990-3998.
- [15] Barrios A E. A terrain parabolic equation model for propagation in the troposphere[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1994, 42(1): 90-98.

张青洪: 男, 1986年生, 博士生, 研究方向为计算电磁学与电波传播。  
廖成: 男, 1964年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算电磁学、电磁散射与逆散射和天线理论及应用。  
盛楠: 男, 1986年生, 博士生, 研究方向为计算电磁学与电波传播。