

## 在小样本条件下直接 LDA 的理论分析

赵武锋<sup>①②</sup> 沈海斌<sup>①</sup> 严晓浪<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(浙江大学超大规模集成电路设计研究所 杭州 310027)

<sup>②</sup>(浙江大学信息与电子工程学系 杭州 310027)

**摘 要:** 直接线性鉴别分析(DLDA)是一种以克服小样本问题而提出的 LDA 扩展方法,被声明利用了包含类内散布矩阵零空间外的所有信息。然而,很多反例表明事实并非如此。为了更深入地了解 DLDA 的特性,该文从理论上对其进行了分析,得出结论:基于传统 Fisher 准则的 DLDA 几乎没利用零空间,将丢失一些有用的鉴别信息;而基于广义 Fisher 准则的 DLDA,若满足一定条件(在高维小样本数据应用中一般都满足)且最优鉴别矢量正交约束,则其等价于零空间 LDA 和正交 LDA。在人脸数据库 ORL 和 YALE 上的比较实验结果亦与理论分析一致。

**关键词:** 模式识别; Fisher 准则; 降维; 线性鉴别分析; 小样本

**中图分类号:** TP391.4

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2009)11-2632-05

## Theoretical Analysis of Direct LDA in Small Sample Size Problem

Zhao Wu-feng<sup>①②</sup> Shen Hai-bin<sup>①</sup> Yan Xiao-lang<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Institute of VLSI Design, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

<sup>②</sup>(Department of Information Science & Electronic Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** Direct LDA (DLDA) is an extension of Linear Discriminant Analysis (LDA) to deal with the small sample size problem, which is previously claimed to take advantage of all the information, both within and outside of the within-class scatter's null space. However, a lot of counter-examples show that this is not the case. In order to better understand the characteristics of DLDA, this paper presents its theoretical analysis and concludes that: DLDA based on the traditional Fisher criterion nearly does not make use of the information inside the null space, thus some discriminative information may be lost; while one based on other variants of Fisher criterion is equivalent to null-space LDA and orthogonal LDA under the orthogonal constraints among discriminant vectors and a mild condition which holds in many applications involving high-dimensional data. The comparative results on the face database, ORL and YALE, also consistent with the theory analysis.

**Key words:** Pattern recognition; Fisher criterion function; Dimensionality reduction; Linear Discriminant Analysis(LDA); Small sample size

### 1 引言

线性鉴别分析(LDA)作为一种监督降维技术被广泛应用于高维数据分类领域,它是将模式数据的可分性为目标,寻找一组最佳鉴别矢量使每类的类内离散度最小,同时使类间的离散度达到最大。传统LDA的计算要求类内离散矩阵可逆(非奇异),可在许多实际应用场合如人脸识别、图像检索等,样本维数往往大于或接近于样本个数,则类内离散矩阵不可逆(奇异)或病态的,传统LDA很难直接计算或不稳定,即碰到所谓的“小样本”(SSS)难题<sup>[1]</sup>。

近年来,相继提出了许多LDA扩展方法以克服奇异性问题,较典型的如Fisherfaces(PCA+LDA)<sup>[2]</sup>,直接LDA(DLDA)<sup>[3]</sup>,零空间LDA

(NLDA)<sup>[4,5]</sup>和正交LDA(OLDLDA)<sup>[6]</sup>等。这些方法的实现一般可分为两个阶段:首先确定基空间,然后在这个基空间寻找使可分性最优的一组鉴别矢量。不同基空间的选择产生了不同的LDA扩展算法。PCA+LDA的基空间是使类内离散矩阵 $S_w$ 非奇异的总体离散矩阵 $S_t$ 列空间,在其上寻找类间类内离散度比最大的鉴别矢量;NLDA的基空间是 $S_w$ 的零空间,在其上寻找类间离散度非零的鉴别矢量,其基本思想是在零空间包含了更多的鉴别信息<sup>[4]</sup>;OLDLDA的基空间是 $S_t$ 的列空间,在其上寻找类间离散度最大的正交鉴别矢量,在满足C1条件下(见式(8)),其等价于NLDA<sup>[7]</sup>;DLDA最初由YU等人<sup>[3]</sup>提出,其文中实际上提出了两种版本算法:第1种版本(以DLDA-SB表示)采用了传统的Fisher准则,它的基空间是类间离散矩阵 $S_t$ 的列空间,在其上寻

找类内类间散度比最小的鉴别矢量; 第2种版本(以 DLDA-ST表示)的实现方法与第1种相同, 但采用了修改的广义Fisher准则, 因此它的基空间是总体离散矩阵 $S_t$ 的列空间。随后涌现了一批基于DLDA-SB的线性和非线性扩展方法<sup>[8-10]</sup>, 并在模式识别和计算机视觉领域获得了广泛应用。

文献[3]声明: 相比于NLDA只在 $S_w$ 的零空间上寻找鉴别矢量, DLDA还包括 $S_w$ 的列空间。关于这个声明, 文献[11]举了反例来说明DLDA所获取的鉴别矢量并不一定在 $S_w$ 的零空间, 文献[12]认为DLDA所获取的鉴别矢量仅包括 $S_w$ 的列空间, 但都缺乏理论依据。而文献[13]从贝叶斯判决理论观点出发认为在保留全部的鉴别矢量下, DLDA并不是真正意义上的LDA, 是一种特例, 并反驳了与PCA+LDA统一性的观点。不过, 其分析仅针对DLDA的第1版本(DLDA-SB), 缺乏全面性。

鉴于DLDA的扩展方法都共享DLDA的特性, 本文以DLDA的特性分析着手, 分别对其两种版本, DLDA-SB和DLDA-ST, 进行了更全面、更深入的理论分析并在ORL, YALE人脸库上作了分类能力比较实验。结论如下: DLDA-SB的基空间基本不处在 $S_w$ 的零空间上, 若根据在零空间包含了更多的鉴别信息的思想, 相比于NLDA和OLDA, DLDA-SB并不能获取最优鉴别的变换矩阵; 而DLDA-ST与NLDA, OLDAL类似, 仅约束条件不同, DLDA-ST的最优鉴别矢量是关于 $S_t$ 正交, 而NLDA和OLDAL是相互正交, 若施以正交条件并满足条件C1下, 三者等价。

## 2 传统 LDA 简介

有一包含 $N$ 个样本数据的集合 $\{a_i\}_{i=1}^N \in \mathbb{R}^m$ , 分为 $c$ 类, 每类有样本 $n_i (i \in \{1, \dots, c\})$ 个。定义3个矩阵 $H_w$ 、 $H_b$ 和 $H_t$ 如下:

$$H_w = \frac{1}{\sqrt{N}} [(A_1 - m_1 \mathbf{1}_{n_1}^T), \dots, (A_c - m_c \mathbf{1}_{n_c}^T)] \quad (1)$$

$$H_b = \frac{1}{\sqrt{N}} [\sqrt{n_1}(m_1 - m), \dots, \sqrt{n_c}(m_c - m)] \quad (2)$$

$$H_t = \frac{1}{\sqrt{N}} (A - m \mathbf{1}_N^T) \quad (3)$$

其中 $A = [a_1, \dots, a_N]$ ,  $A_i$ ,  $m_i$ 分别为第 $i$ 类的数据矩阵、样本均值,  $m$ 为总样本均值,  $\mathbf{1}_i$ 为 $i$ 个1的列矢量。则样本数据集的类内离散矩阵 $S_w$ , 类间离散矩阵 $S_b$ 和总体离散矩阵 $S_t$ 可定义如下:

$$S_w = H_w H_w^T, S_b = H_b H_b^T, S_t = H_t H_t^T \quad (4)$$

由式(1)-式(4)可很容易获得如下结果:

$$S_t = S_w + S_b \quad (5)$$

传统LDA寻找线性变换矩阵 $G \in \mathbb{R}^{m \times l} (l < m)$ , 使变换后的 $l$ 维空间的类间散度与类内散度之比最大, 即解答下面传统Fisher准则的最优问题:

$$G = \arg \max_{G \in \mathbb{R}^{m \times l}} \frac{|G^T S_b G|}{|G^T S_w G|} = \arg \max_{G \in \mathbb{R}^{m \times l}} \frac{\text{trace}(G^T S_b G)}{\text{trace}(G^T S_w G)} \quad (6)$$

若类内离散矩阵 $S_w$ 可逆, 则上述最优解 $G$ 可以通过计算矩阵 $S_w^{-1} S_b$ 非零特征值相应的特征矢量来获得。然而在许多实际应用场合如人脸识别, 样本维数往往大于或接近于样本个数, 则 $S_w$ 不可逆(奇异)或病态的, 传统LDA很难直接计算, 即碰到所谓的“小样本”(奇异性)难题<sup>[1]</sup>。

## 3 直接 LDA(DLDA)

类似于大多数LDA扩展算法, DLDA也同时对角化离散矩阵以克服奇异性问题, 不同对角化顺序产生了不同版本DLDA。DLDA-SB采用式(6)的Fisher准则, 首先对角化 $S_b$ , 选择 $S_b$ 的列空间作为基空间, 然后将 $S_w$ 投影到此基空间并寻找类间散度与类内散度比最大的线性变换矩阵 $G$ , 实现步骤如下:

(1)确定 $S_b$ 的列空间; 对 $H_b$ 进行奇异值分解, 令 $H_b = B \Sigma_b V^T$ , 其中 $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为正交矩阵,  $\Sigma_b \in \mathbb{R}^{m \times c}$ 为降序排列的对角矩阵, 令 $\Sigma_{b1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 和 $B_1 \in \mathbb{R}^{m \times r}$  ( $r = \text{rank}(H_b)$ 为矩阵 $H_b$ 的秩)为非零奇异值组成的对角矩阵和 $B$ 中相应的列构成的矩阵,  $B_1$ 即为 $S_b$ 列空间的正交基构成的矩阵。令 $Z = B_1 \Sigma_{b1}^{-1}$ , 则有

$$Z^T S_b Z = \Sigma_{b1}^{-T} B_1^T H_b H_b^T \Sigma_{b1}^{-T} = I$$

(2)投影 $S_w$ 至由 $Z$ 的列张成的空间, 并对角化; 经特征值分解, 有

$$Z^T S_w Z = Y \Sigma_w^2 Y^T$$

保留 $Y$ 中较小特征值对应的列, 但为了提取充足的统计量, 一般取 $c-1$ 个特征矢量构成的矩阵 $Y_1$ 及相应对角矩阵 $\Sigma_{w1}$ 。

(3)矩阵 $G = B \Sigma_{b1}^{-1} Y_1 \Sigma_{w1}^{-1}$ 即为DLDA-SB的最优解。

而DLDA-ST采用了下式广义Fisher准则, 即在第1步以 $S_t$ 取代 $S_b$ , 其它同上, 可得最优变换矩阵 $G = U_1 \Sigma_{t1}^{-1} Y_1 \Sigma_{w1}^{-1}$ , 其中 $\Sigma_{t1} \in \mathbb{R}^{t \times t}$ 和 $U_1 \in \mathbb{R}^{m \times t}$  ( $t = \text{rank}(H_t)$ 为矩阵 $H_t$ 的秩)为非零奇异值组成的对角矩阵和相应特征矢量构成的矩阵。

$$G = \arg \max_{G \in \mathbb{R}^{m \times l}} \frac{|G^T S_t G|}{|G^T S_w G|} = \arg \max_{G \in \mathbb{R}^{m \times l}} \frac{\text{trace}(G^T S_t G)}{\text{trace}(G^T S_w G)} \quad (7)$$

## 4 DLDA的理论分析

由于DLDA的最优解中 $\Sigma_{w1}^{-1}$ 项并不影响鉴别矢

量的方向,只改变尺度,对分类的贡献并无实际意义,可以去除。针对DLDA-SB,文献[11-13]通过举反例或从贝叶斯判决理论观点来说明其理论缺陷。为更好地理解在高维小样本情况下DLDA的两种版本的特性,通过结合实际应用场合,本文以代数理论框架对其做了分析。为方便讨论,下以 $R(\mathbf{M})$ 和 $N(\mathbf{M})$ 表示矩阵的列空间和零空间,  $\text{span}(\bullet)$ 表示由矢量张成的空间。

#### 4.1 高维小样本数据的一些特性

文献[7]的定理5.3证明:独立采样的高维小样本数据(如人脸识别中的人脸图像)满足条件

$$\text{C1: } \text{rank}(\mathbf{S}_t) = \text{rank}(\mathbf{S}_b) + \text{rank}(\mathbf{S}_w) \quad (8)$$

由式(5)可知,  $N(\mathbf{S}_t) = N(\mathbf{S}_b) \cap N(\mathbf{S}_w)$ , 因此 $N(\mathbf{S}_t)$ 并不包含任何鉴别信息,可以移除。若令 $\mathbf{U}_1$ 为 $R(\mathbf{S}_t)$ 正交基构成的矩阵,则投影到 $R(\mathbf{S}_t)$ 的3个离散矩阵 $\mathbf{S}_w^* = \mathbf{U}_1^T \mathbf{S}_w \mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{S}_b^* = \mathbf{U}_1^T \mathbf{S}_b \mathbf{U}_1$ 和 $\mathbf{S}_t^* = \mathbf{U}_1^T \mathbf{S}_t \mathbf{U}_1$ 有以下特性:

$$\text{rank}(\mathbf{S}_t^*) = \text{rank}(\mathbf{S}_t) = t, \text{rank}(\mathbf{S}_w^*) = \text{rank}(\mathbf{S}_w) = s,$$

$$\text{rank}(\mathbf{S}_b^*) = \text{rank}(\mathbf{S}_b) = r \quad (9)$$

满足C1条件等价于满足 $\text{rank}(\mathbf{S}_t^*) = \text{rank}(\mathbf{S}_b^*) + \text{rank}(\mathbf{S}_w^*)$ 或 $t = r + s$ , 且有

$$\dim(N(\mathbf{S}_w^*)) = \text{rank}(\mathbf{S}_b^*) = r \quad (10)$$

一般来说,若模式数据维数大于训练样本数,有 $t = N - 1, r = c - 1, s = N - c$ 。

#### 4.2 DLDA-SB中 $R(\mathbf{S}_b)$ 与 $N(\mathbf{S}_w)$ 的关系

如前述,NLDA的基空间是 $N(\mathbf{S}_w)$ ,在其上寻找鉴别矢量使 $R(\mathbf{S}_b)$ 在 $N(\mathbf{S}_w)$ 上投影非零;而DLDA-SB的基空间是 $R(\mathbf{S}_b)$ ,在其上寻找鉴别矢量使 $N(\mathbf{S}_w)$ 在 $R(\mathbf{S}_b)$ 上投影最小。因此, $R(\mathbf{S}_b)$ 和 $N(\mathbf{S}_w)$ 的关系对分析DLDA-SB的特性很关键。由于 $N(\mathbf{S}_t)$ 并不包含任何鉴别信息,也不影响分析结果,可从 $R(\mathbf{S}_b^*)$ 和 $N(\mathbf{S}_w^*)$ 的关系分析着手,有以下结论:

**定理1** 在满足C1条件下, $R(\mathbf{S}_b^*)$ 并不正交 $N(\mathbf{S}_w^*)$ 。

**证明** (反证法)若 $N(\mathbf{S}_w^*)$ 有部分或全部正交 $R(\mathbf{S}_b^*)$ ,令 $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\} \in \mathbb{R}^t$ 为 $N(\mathbf{S}_w^*)$ 中正交 $R(\mathbf{S}_b^*)$ 的 $k$ 个正交基, $k$ 不为零,扩展至 $r$ 个使 $N(\mathbf{S}_w^*) = \text{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_r)$ ,令 $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_r] = [\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2]$ ,其中 $\mathbf{W}_1 = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k]$ , $\mathbf{W}_2 = [\mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_r]$ ,将3个离散矩阵 $\mathbf{S}_w^*$ 、 $\mathbf{S}_b^*$ 和 $\mathbf{S}_t^*$ 投影到 $N(\mathbf{S}_w^*)$ ,有

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \mathbf{S}_t^* \mathbf{W} &= \mathbf{W}^T \mathbf{S}_b^* \mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{S}_w^* \mathbf{W} = \mathbf{W}^T \mathbf{S}_b^* \mathbf{W} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_2^T \mathbf{S}_b^* \mathbf{W}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

因矩阵 $\mathbf{W}^T \mathbf{S}_t^* \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 满秩,而 $k$ 为大于零的整数,式(11)矛盾,因此 $R(\mathbf{S}_b^*)$ 并不正交 $N(\mathbf{S}_w^*)$ 。证毕

其实,定理1正是NLDA算法的理论依据,即在满足C1条件下,从 $N(\mathbf{S}_w^*)$ 中能获得全部 $r$ 个类间散度非零的鉴别矢量。那么,在 $R(\mathbf{S}_b^*)$ 空间, $\mathbf{S}_w^*$ 在其上的投影又如何呢?按文献[3]所声明的DLDA-SB不仅利用了 $\mathbf{S}_w$ 的零空间还包括列空间,即等价于 $R(\mathbf{S}_b^*) \cap N(\mathbf{S}_w^*) \neq \{\mathbf{0}\}$ ,在满足C1条件下,最理想的情况应是 $R(\mathbf{S}_b^*) = N(\mathbf{S}_w^*)$ 。由于 $N(\mathbf{S}_w^*)$ 与 $R(\mathbf{S}_b^*)$ 的计算直接跟所选择的训练数据有关,很难定量分析,本文采用人脸识别中人脸图像数据来进行分析。

令 $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\} \in \mathbb{R}^t$ 为 $N(\mathbf{S}_w^*)$ 与 $R(\mathbf{S}_b^*)$ 交空间的 $k$ 个正交基,扩展至 $r$ 个使 $R(\mathbf{S}_b^*) = \text{span}(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_r)$ ,令 $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k, \mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_r] = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2]$ ,其中 $\mathbf{B}_1 = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k]$ , $\mathbf{B}_2 = [\mathbf{b}_{k+1}, \dots, \mathbf{b}_r]$ , $\mathbf{S}_w^*$ 在 $R(\mathbf{S}_b^*)$ 上的投影:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{S}_w^* \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} \mathbf{S}_w^* [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2^T \mathbf{S}_w^* \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

由式(12)可得, $k$ 越接近 $r$ ,使类间散度为零的鉴别矢量个数越多,就越理想。本文在大量的高维数据库(YALE, ORL和AR人脸库)上随机选择不同数目的数据作为训练样本,计算式(12),并获得矩阵的秩。运行结果显示由式(12)计算出的矩阵都接近满秩,即 $k \approx 0$ ,由此可得出结论:DLDA-SB在高维小样本情况下 $R(\mathbf{S}_b^*)$ 基本不相交于 $N(\mathbf{S}_w^*)$ ,文献[3]所声明并不正确。

#### 4.3 DLDA-ST与OLDA、NLDA的关系

DLDA-ST采用的是式(7)Fisher准则,其基空间是 $R(\mathbf{S}_t)$ ,包含了 $N(\mathbf{S}_w^*)$ ,分析也发现在一定条件下,DLDA-ST、OLDA和NLDA具有等价关系,现总结如下:

**定理2** 在满足C1条件下,且有鉴别矢量正交约束,DLDA-ST,OLDA和NLDA三者等价。

**证明** 回顾第3节DLDA-ST最优变换矩阵为 $\mathbf{U}_1 \Sigma_{t1}^{-1} \mathbf{Y}_1$ ,观察 $\mathbf{Y}_1$ 的计算过程(符号定义不变):

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^T \mathbf{S}_w \mathbf{Z} &= \Sigma_{t1}^{-T} \mathbf{U}_1^T \mathbf{S}_w \mathbf{U}_1 \Sigma_{t1}^{-1} = \Sigma_{t1}^{-T} \mathbf{S}_w^* \Sigma_{t1}^{-1} \\ &= \mathbf{Y} \Sigma_w^2 \mathbf{Y}^T = \mathbf{Y}_2 \Sigma_{w2}^2 \mathbf{Y}_2^T + \mathbf{Y}_1 \Sigma_{w1}^2 \mathbf{Y}_1^T \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_1] \in \mathbb{R}^{t \times t}$ 为正交矩阵, $\Sigma_w^2 = \begin{bmatrix} \Sigma_{w2}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{w1}^2 \end{bmatrix}$ 为特征值以降序排列的对角方阵。因

$\Sigma_{t1}^{-1} \in \mathbb{R}^{t \times t}$ 满秩,在满足C1条件下,有 $\text{rank}(\mathbf{Z}^T \mathbf{S}_w \mathbf{Z}) = \text{rank}(\mathbf{S}_w^*) = \text{rank}(\Sigma_w^2) = s$ , $\Sigma_w^2$ 主对角元有 $t - s = r = c - 1$ 个零,即 $\Sigma_{w1}^2 = \mathbf{0}$ 。由式(13)可知: $\Sigma_{t1} \mathbf{Y}_1$ 的列矢量为 $N(\mathbf{S}_w^*)$ 的基。由于白化 $\mathbf{S}_t$ ,所以原

始DLDA-ST的最优鉴别矢量是关于  $S_i$  正交的。若对鉴别矢量施以正交约束, 则可由QR分解获得, 即  $\Sigma_1 Y_1 = QR$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{t \times r}$  为  $N(S_w^*)$  标准正交基构成的矩阵,  $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$  为上三角矩阵, 则  $G = U_1 Q$  即为施以正交约束后DLDA-ST的最优解, 同时也为OLDA的最优解。若令  $W$  为  $N(S_w^*)$  中另一标准正交基构成的矩阵, 则必有  $Q = WV$ ,  $V \in \mathbb{R}^{r \times r}$  为正交矩阵, 因此有:

$$\begin{aligned} \text{trace}(Q^T U_1^T S_i U_1 Q) &= \text{trace}(V^T W^T U_1^T S_i U_1 W V) \\ &= \text{trace}(W^T U_1^T S_i U_1 W) \end{aligned} \quad (14)$$

式(14)说明  $N(S_w^*)$  中标准正交基的选择并不影响最优问题的解答结果, 因此, 在满足C1条件下, 且有鉴别矢量正交约束, DLDA-ST, OLDALDA和NLDA三者等价。 证毕

### 5 实验结果和讨论

以验证上述分析结果, 对上述5种LDA扩展算法分别在YALE人脸图像库(<http://cvc.yale.edu/projects/yalefaces/yalefaces.html>)和ORL人脸图像库(<http://www.uk.research.att.com/facedatabase>).

html)上进行了比较实验。为了结果的可比性和客观性, 采用了统一的图像预处理(位置配准, 亮度标准化, 下采样至32×32大小)和最近邻分类器, 随机抽取库中人脸图像作训练样本, 其余作测试, 并运行20次获得平均正确识别率。

#### 5.1 数据库介绍

YALE标准人脸库拥有15人, 11幅/每人, 包括了如: 光照角度、表情变化和有无如眼镜等附着物。ORL标准人脸库有40人, 10幅/每人, 共400幅人脸灰度图像, 其中包括姿态、光照和表情的差别。

#### 5.2 仿真结果

在YALE库随机抽取每人5幅作训练, 其余作测试; 在ORL库随机抽取每人5幅作训练, 其余作测试; 表1列出了运行20次所获得的平均正确识别率(R)。

#### 5.3 讨论

观察表1的实验结果发现, NLDA和OLDALDA识别率相同且最优, DLDA-ST和PCA+LDA次之, DLDA-SB最差。这是因为: 人脸识别属于高维小样本的情况, 其一般满足C1条件, 所以NLDA等价于OLDALDA<sup>[7]</sup>, 且能充分利用类内离散矩阵的零空间; 而

表 1 5 种 LDA 扩展算法在 YALE 和 ORL 上的识别率(%)

	PCA+LDA	DLDA-SB	DLDA-ST	NLDA	OLDALDA
R(YALE)	93.3	91.7	93.8	94.3	94.3
R(ORL)	94.1	93.6	95.2	95.6	95.6

DLDA-ST尽管与OLDALDA、NLDA相似, 但其最优矢量组是关于  $S_i$  正交的, 所提取的特征可能包含更多的冗余信息; PCA+LDA在PCA降维阶段可能会丢失一部分有用信息, 但其最优解包含了类内离散矩阵的所有空间; 而DLDA-SB基本上都不在  $N(S_w)$  空间中提取鉴别矢量, 丢失了很多对分类有益的鉴别信息。

### 6 结束语

通过对DLDA的两个版本, DLDA-SB和DLDA-ST, 全面的理论分析并得出结论: DLDA-SB并不符合文献[3]所声明的“DLDA利用了包含类内离散矩阵零空间的所有信息”, 存在理论缺陷。根据零空间中包含了更多鉴别信息的思想, DLDA-SB及其相应线性非线性扩展方法并不能获得最优的鉴别矢量。而DLDA-ST与NLDA、OLDALDA相似, 在小样本情况下仅利用了类内离散矩阵的零空间, 若满足C1条件和正交约束, 三者具有等价性关系。在人脸库上做的分类比较实验也证实了理论分析所得出的结论。

### 参 考 文 献

- [1] Krzanowski W J, Jonathan P, and Mccarthy W V, *et al.* Discriminant analysis with singular covariance matrices: methods and applications to spectroscopic data. *Applied Statistics*, 1995, 44(11): 101-115.
- [2] Belhumeur P N, Hespanha J P, and Kriegman D J. Eigenfaces vs. Fisherfaces: Recognition using class specific linear projection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(7): 711-720.
- [3] Yu Hua and Yang Jie. A direct LDA algorithm for high-dimensional data-with application to face recognition. *Pattern Recognition*, 2001, 34(10): 2067-2070.
- [4] Chen L F, Liao H Y M, and Ko M T, *et al.* A new LDA-based face recognition system which can solve the small sample size problem. *Pattern Recognition*, 2000, 33(10): 1713-1726.
- [5] Huang R, Liu Q, and Lu H, *et al.* Solving the small sample size problem of LDA. *Proceedings of International Conference on Pattern Recognition, USA, 2002*, 3: 29-32.
- [6] Ye Jie-ping. Characterization of a family of algorithms for

- generalized discriminant analysis on undersampled problems. *Journal of Machine Learning Research*, 2005, 6(Apr.): 483-502.
- [7] Ye Jie-ping and Xiong Tao. Computational and theoretical analysis of null space and orthogonal linear discriminant analysis. *Journal of Machine Learning Research*, 2006, 7(Jul.): 1183-1204.
- [8] Zheng Yujie, Guo Zhibo, and Yang Jian, *et al.* DLDA/QR: A robust direct LDA algorithm for face recognition and its theoretical foundation. *Lecture Notes in Computer Science*, 2007, 4426: 379-387.
- [9] Park C H and Lee M. On applying linear discriminant analysis for multi-labeled problems. *Pattern Recognition Letter*, 2008, 29(7): 878-887.
- [10] 厉小润, 赵光宙, 赵辽英. 改进的核直接Fisher描述分析与人脸识别. *浙江大学学报(工学版)*, 2008, 42(4): 583-589.  
Li Xiao-run, Zhao Guang-zhou, and Zhao Liao-ying. Improved kernel direct Fisher discriminant analysis and face recognition. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2008, 42(4): 583-589.
- [11] Cevikalp H, Neamtu M, and Wilkes M, *et al.* Discriminative common vector method with kernels. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006, 17(6): 1550-1565.
- [12] Park H and Park C H. A comparison of generalized linear discriminant analysis algorithms. *Pattern Recognition*, 2008, 41(3): 1083-1097.
- [13] Gao Hui and Davis J W. Why direct LDA is not equivalent to LDA. *Pattern Recognition*, 2006, 39(5): 1002-1006.
- 赵武锋: 男, 1974年生, 讲师, 博士生, 从事信号处理、图像检索、模式识别等方面的研究.
- 沈海斌: 男, 1967年生, 副教授, 从事多媒体安全技术研究.
- 严晓浪: 男, 1947年生, 教授, 博士生导师, 从事 ICCAD 研究.