

分数阶忆阻退化Jerk系统的特性分析与DSP实现

孙克辉* 秦川 王会海

(中南大学物理与电子学院 长沙 410006)

摘要: 为了探究分数阶形式下该类系统的动力学特性, 本文将分数阶微积分引入到忆阻退化Jerk系统中, 增加了一个自由度, 提升了系统性能。通过相图、分岔图、李雅普诺夫指数谱、复杂度混沌图等分析了系统的动力学特性, 并采用DSP技术, 实现了该系统的数字电路。研究表明, 系统拓展到分数阶后有两种不同的单涡卷吸引子, 系统随初值变化呈现倍周期分岔路径, 在某些特定初值处系统演化路径出现跃变。系统具有无限多个吸引子共存。

关键词: 忆阻器; 混沌; 分数阶微积分; 吸引子共存; 多稳态

中图分类号: TN601

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)04-0888-07

DOI: [10.11999/JEIT190904](https://doi.org/10.11999/JEIT190904)

Characteristics Analysis and DSP Implementation of Fractional-order Memristive Hypogenetic Jerk System

SUN Kehui QIN Chuan WANG Huihai

(School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha 410006, China)

Abstract: To investigate the dynamic characteristics of this type of system in the fractional-order case, fractional-order calculus is introduced into memristive hypogenetic Jerk system, which adds one degree of freedom and improves system performance. The dynamical characteristics of the system are analyzed by phase diagram, bifurcation diagram, Lyapunov exponent spectrum, complexity chaotic diagram, etc., and the digital circuit of the system is realized by employing DSP technology. The research results show that when the system is extended to the fractional order, the system presents a period doubling bifurcation path with the initial value, and the evolution path of the system changes abruptly at some specific initial values, showing infinite coexistence of attractors.

Key words: Memristor; Chaos; Fractional calculus; Coexistence attractors; Multistability

1 引言

忆阻器是实现磁通与电荷之间关系的电路元件, 虽然从忆阻器概念的提出^[1]到忆阻器实物的问世^[2]经过了很长一段时间。但是近年来, 忆阻器因其特殊的性质而被广泛地研究, 从而推动了忆阻器在电工电子^[3]、通信^[4]、神经网络^[5]、生物仿真^[6]、安全^[7]等各领域的应用。而在混沌相关领域中, 忆阻器由于其丰富的非线性特性曲线成为了研究热点。如通过将具有不同非线性的忆阻器引入到一些现有的动力学系统中, 研究了一些新的更具有特点的混沌或超混沌系统^[8,9]。在混沌电路中采用忆阻替代非线性电阻来得到了新的忆阻混沌电路^[10-13]。而这些研究大部分是基于整数阶微积分系统的, 由于分数阶微积分能够更加精确地描述物理模型, 因

而受到研究人员的重视, 并成为了非线性研究的热点, 其中分数阶忆阻器模型^[14-17]更是学者们重点研究的方向。

在分数阶微积分与忆阻器相结合的系统动力学特性研究中, 更侧重于系统随其控制参数变化的动力学特性分析。研究表明, 许多分数阶忆阻系统具有丰富动力学特性, 如Mou等人^[18]利用参数分析了一个4D超混沌忆阻电路的动力学行为, Li等人^[19]报道了一种基于分数阶忆阻器的具有无限平衡点的4D系统, 但随着研究的深入, 有学者发现系统参数并不是唯一能够影响系统动力学特性的因素。最近, 文献^[20,21]发现某些忆阻系统具有超级多重稳定性, 表现在系统随着初值的变化有着完整的分岔路径, 如文献^[20]提出的基于忆阻器的退化Jerk系统, 显示出无限多个吸引子共存以及与瞬态混沌完全不同的过渡行为等现象。超级多稳定性作为一种特殊的动力学特性也不仅仅只出现在忆阻系统中,

如Wan等人^[22]报道了在离散神经网络中的超级多稳定性。不仅如此, Chen等人^[23]对超级多稳定性做了更加深入的研究, 构建了能保持原始5阶忆阻Chua电路的初始动力学的3阶降维通量电荷模型, 并证实了在磁通量域中可以检测到敏感的超级多稳定性现象。

本文将分数阶微积分引入忆阻退化Jerk系统, 通过ADM算法计算了系统的近似解, 分析了系统随阶数变化以及随初值变化的动力学特性, 并实现了系统的数字电路设计。

2 分数阶忆阻退化Jerk系统求解

文献^[20]报道了通过忆阻器代替电阻产生的具有4线平衡点的退化Jerk系统, 该系统最显著的特

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \\ z(t_0) \\ w(t_0) \end{bmatrix} + J_{t_0}^q \begin{bmatrix} |y| - b \\ \alpha z \\ |x| - y - az - c \\ z \end{bmatrix} + J_{t_0}^q \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta z|w| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

对其中的非线性项进行分解, 可得

$$\left. \begin{aligned} A_2^0 &= -\beta(z^0|w^0|) \\ A_2^1 &= -\beta(z^1|w^0| + z^0|w^1|) \\ A_2^2 &= -\beta(z^2|w^0| + z^1|w^1| + z^0|w^2|) \\ A_2^3 &= -\beta(z^3|w^0| + z^2|w^1| + z^1|w^2| + z^0|w^3|) \\ A_2^4 &= -\beta(z^4|w^0| + z^3|w^1| + z^2|w^2| + z^1|w^3| + z^0|w^4|) \\ A_2^5 &= -\beta(z^5|w^0| + z^4|w^1| + z^3|w^2| + z^2|w^3| + z^1|w^4| + z^0|w^5|) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

分解式中上标为ADM分解次数, 给出初始条件, 即 $c_1^0 = x(t_0)$, $c_2^0 = y(t_0)$, $c_3^0 = z(t_0)$, $c_4^0 = w(t_0)$ 。再令 $c_1^0 = x^0$, $c_2^0 = y^0$, $c_3^0 = z^0$, $c_4^0 = w^0$ 。根据式(2)以及分数阶微积分性质^[19]可得

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= (|c_2^0| - b) \frac{(t - t_0)^q}{\Gamma(q + 1)} \\ y^1 &= (\alpha \cdot c_3^0 - \beta \cdot c_3^0 \cdot |c_4^0|) \frac{(t - t_0)^q}{\Gamma(q + 1)} \\ z^1 &= (|c_1^0| - c_2^0 - a \cdot c_3^0 - c) \frac{(t - t_0)^q}{\Gamma(q + 1)} \\ w^1 &= c_3^0 \cdot \frac{(t - t_0)^q}{\Gamma(q + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

再将式(4)的系数值赋给对应变量, 即将第1项系数赋给 c_1^1 , 第2项系数赋给 c_2^1 , 依此类推, 多次迭代后可推得方程的其他5项系数。此时, 该系统的分数阶近似解可表示为

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j(t) &= c_j^0 + c_j^1 \frac{(t - t_0)^q}{\Gamma(q + 1)} + c_j^2 \frac{(t - t_0)^{2q}}{\Gamma(2q + 1)} + c_j^3 \frac{(t - t_0)^{3q}}{\Gamma(3q + 1)} \\ &+ c_j^4 \frac{(t - t_0)^{4q}}{\Gamma(4q + 1)} + c_j^5 \frac{(t - t_0)^{5q}}{\Gamma(5q + 1)} + c_j^6 \frac{(t - t_0)^{6q}}{\Gamma(6q + 1)} \end{aligned} \quad (5)$$

征是其具有4个线平衡点集, 并且表现出与初始条件相关的超级多稳定性, 具有无限多个吸引子共存。将分数阶微积分引入该系统, 则系统的分数阶数学模型为

$$\left. \begin{aligned} D_{t_0}^q x &= |y| - b \\ D_{t_0}^q y &= W(w)z \\ D_{t_0}^q z &= |x| - y - az - c \\ D_{t_0}^q w &= z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $q \in (0, 1]$, 为分数阶阶数, t_0 为系统的起始时间。 x, y, z 是系统状态变量, w 是忆阻器内部无量纲状态变量, a, b, c 为系统控制参数, $W(w) = \alpha - \beta|w|$ 是归一化的磁导函数。采用ADM分解求解算法^[24], 则该系统可表示为

其中 c_j^i 即为通过式(4)所求得的系数。

令系统阶数 $q=0.95$, 系统参数分别取 $a=0.6$, $b=1.3$, $c=2$, $\alpha=1$, $\beta=0.1$, 初值取(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)。利用Matlab仿真得到的分数阶忆阻混沌系统吸引子相图如图1所示。计算在该参数条件下的李雅普诺夫指数为 $LE1=0.459$, $LE2=0$, $LE3=-0.0014$, $LE4=-0.8162$ 。李雅普诺夫指数分布为(+, 0, -, -), 说明系统式(1)是混沌的。

3 动力学特性分析

3.1 随阶数 q 变化的动力学特性

分数阶混沌系统的阶数对系统的状态有着重要的影响, 图2显示了在相同参数下忆阻退化Jerk系统的整数阶与分数阶的吸引子相图, 参数 $a=0.55$, $b=1.3$, $c=2$, $\alpha=1$, $\beta=0.1$, 初值取(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)。图2(a)为 $q=1.00$ 时, 即整数阶时系统的吸引子相图, 显然此时系统处于周期态; 而当 $q=0.75$ 时, 系统则处于较为复杂的混沌态, 如图2(b)所示。可见, 系统阶数直接影响着系统的状态。

为了研究系统式(2)随阶数 q 变化的动力学特性, 绘制了系统随阶数 q 在[0.5, 1.0]中变化的分岔图和李雅普诺夫指数谱, 如图3所示。其中系统参数设

定为 $a=0.6, b=1.3, c=2, \alpha=1, \beta=0.1$, 初值取 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ 。图3(a)显示系统具有丰富的动力学特性, 随着 q 从0.5开始逐渐增大, 系统从周期态通过3条不同的倍周期分岔路径在 $q=0.59$ 时进入混沌状态, 在经过较短的混沌区间后, 在 $q=0.68$ 时系统变为长周期态, 并通过反向的倍周期分岔路径由混沌逐渐变化为双周期、单周期。随着 q 继续增大, 系统产生了更多的分岔路径, 并在 $q=0.75$ 时再次进入混沌, 此后除去有难以观察的周期窗口, 系统在区间 $[0.75, 1.0]$ 上都是混沌的。图3(b)是对应区间上的李雅普诺夫指数谱, 由于大于0的值较小, 为了能够从图中更加清晰的观察系统的动力学特性, 只

画出了LE1, LE2, LE3, 3个李雅普诺夫指数谱。图3(b)所反映的动力学特性与图3(a)相符。

3.2 随系统参数变化的动力学特性

同样用分岔图和李雅普诺夫指数谱对系统随参数 a 和 b 变化的动力学特性进行具体分析。参数 c 作为系统参数之一同样影响着系统的动力学特性, 但研究发现其影响较小, 故不作具体分析。取阶数 $q=0.95$, 参数 $b=1.3, c=2, \alpha=1, \beta=0.1$, 初值取 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$, 参数 a 在区间 $[0.4, 0.8]$ 变化的分岔图和李雅普诺夫指数谱如图4所示。由图4(a)可见, 随着 a 的减小, 系统通过倍周期分岔进入混沌。当 a 减小到0.561时, 系统突然变为周期态, 同

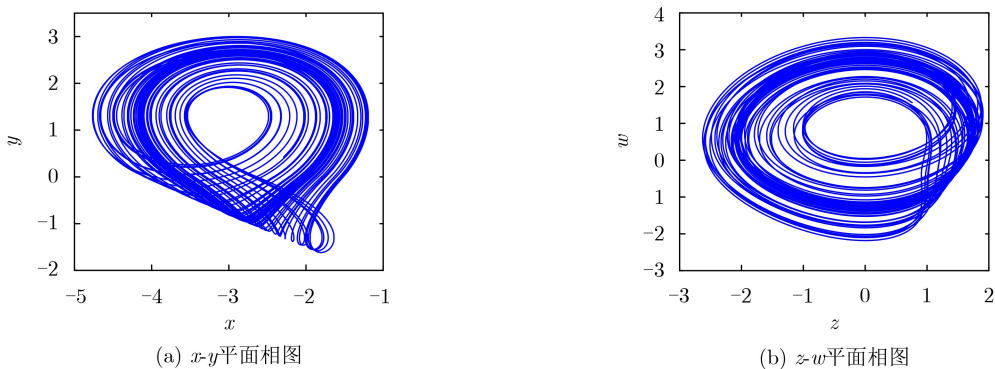


图1 系统式(1)不同平面的吸引子相图

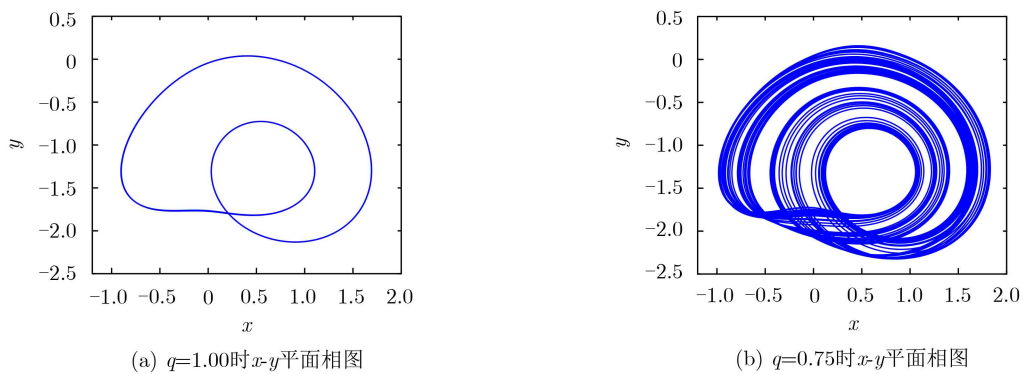


图2 不同阶数下的吸引子相图

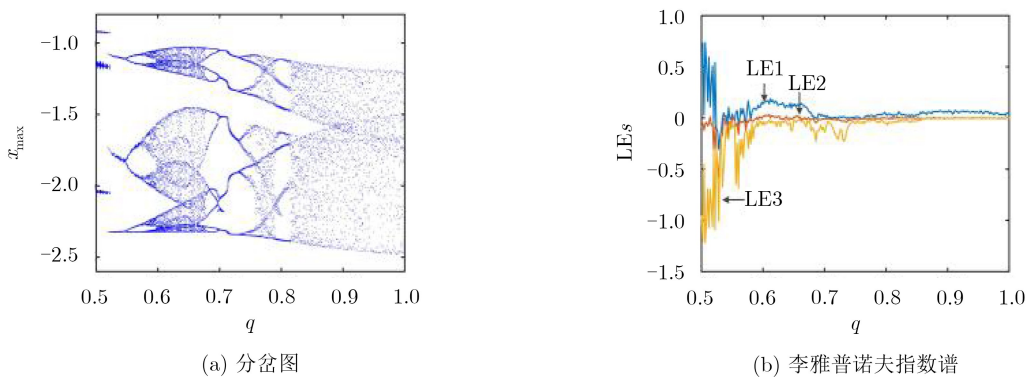


图3 系统阶数 q 变化时的动力学特性

时分岔路径出现跳变，在经过短暂的多周期后系统再次进入混沌。而当 a 减小到0.42时，系统发散。从图4(b)可见，最大李雅普诺夫指数大于0的两个混沌区间，与图4(a)一致。

取阶数 $q=0.95$ ，参数 $a=0.6, c=2, \alpha=1, \beta=0.1$ ，初值取 $(0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ ，参数 b 在区间 $[0.5, 3]$ 变化的分岔图和李雅普诺夫指数谱如图5所示。可见，随参数 b 从3.0开始减小，系统由倍周期分岔进入混沌，减小到特定参数后分岔区域也会发生跃变现象。不同的是，在进入混沌后，在分岔图中并没有出现明显的周期窗口。从图5(b)可见，系统在大部分区间内都是混沌的，除了在 $b=1.1$ 附近有一个小的周期窗口。

混沌图是一种在参数空间中反映混沌系统动力学特性的综合方法。图6显示了系统在参数 a - b 平面上基于谱熵(SE)复杂度^[25]的混沌图。红色区域表示高复杂度，系统在该参数区域内是混沌的，淡黄色区域则复杂度较低，表明系统在该参数区域内是周期的。而白色区域意味着无法计算其复杂度，所以系统是收敛或者发散的。从整体来，系统混沌区域集中在参数 a 或参数 b 较小时，这与图4、图5分叉图在各自分叉参数较小时无分叉现象相吻合。

3.3 随初值变化的动力学特性

为了探究分数阶忆阻退化Jerk系统随初值变化的动力学特性，在相同的参数设置下，分别绘制系

统随初值变化的分岔图以及李雅普诺夫指数谱，以分析其动力学特性。

设置系统的控制参数 $a=0.6, b=1.3, c=2, \alpha=1, \beta=0.1$ ，取初值 $x(0), z(0), w(0)$ 为0.1，阶数 $q=0.95$ ，当 $y(0)$ 在区间 $[-3, 3]$ 改变时，状态变量 x 的分岔图以及对应的李雅普诺夫指数谱如图7所示。从图7(a)可见，随着 $y(0)$ 从-3开始逐渐增加时，系统在 $y(0)=-1.2$ 以及 $y(0)=-0.6$ 附近经历了两个短暂的多周期状态后再次进入混沌态，值得一提的是，在 $y(0)=-0.332$ 时，分岔路径出现跃变，并继续演化，这说明随着初值的变化，系统出现了与之前不同的混沌状态，即多稳态，存在着共存吸引子。随着 $y(0)$ 值得继续增加，系统进入反向的倍周期分岔现象。并且在倍周期分岔过程中，再次出现了短暂的跃变。从图7(b)也可以确定在 $y(0)=-1.2$ 以及 $y(0)=-0.6$ 附近的短暂周期窗口。

同样地，设置系统参数为 $a=0.6, b=1.3, c=2, \alpha=1, \beta=0.1$ ，用忆阻器初始条件 $w(0)$ 作为分岔参数，使它在区间 $[-3, 3]$ 逐渐增大，其余初值都设置为0.1，在此条件下得到的分岔图和李雅普诺夫指数谱如图8所示。随着 $w(0)$ 从-3开始逐渐增加，系统由倍周期分岔路径而进入混沌，期间系统可产生周期1、周期2、周期3等现象，进入混沌后产生单涡卷混沌吸引子，在 $w(0)=-1$ 附近又出现了周期

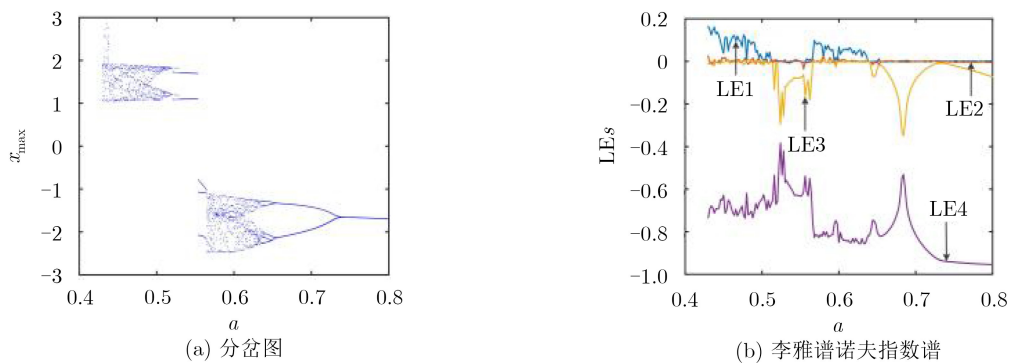


图4 系统参数 a 变化时的动力学特性

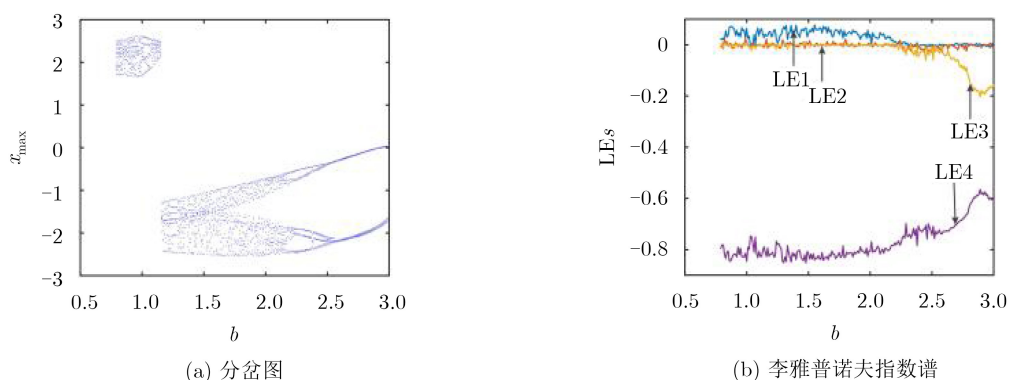


图5 系统参数 b 变化时的动力学特性

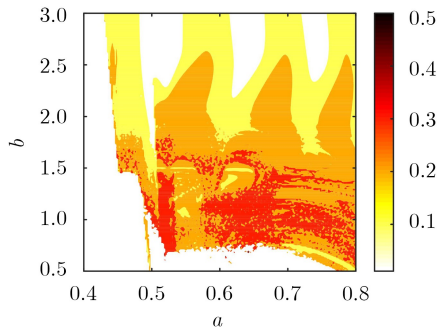
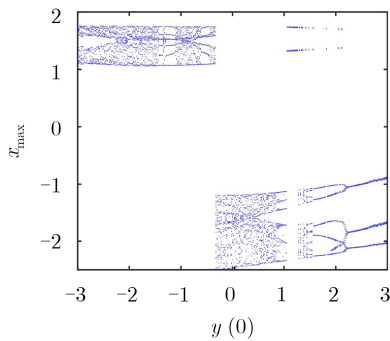
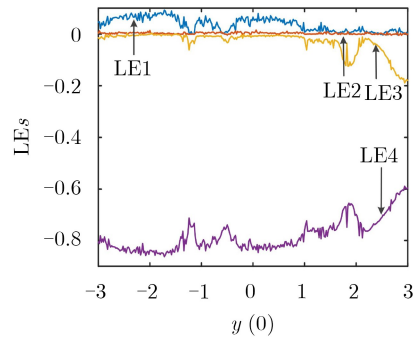


图6 系统参数a-b平面SE复杂度混沌图

态，随后迅速进入混沌态，之后在较大的区间内系统都保持着混沌状态。当增大到 $w(0)=1.65$ 时，分岔区域突然发生跳变。由图8(b)的李雅普诺夫指数

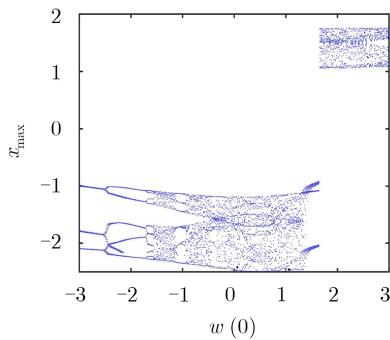


(a) 分岔图

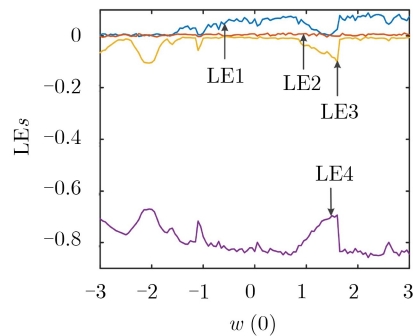


(b) 李雅普诺夫指数谱

图7 系统初值y(0)变化时的动力学特性



(a) 分岔图



(b) 李雅普诺夫指数谱

图8 系统初值w(0)变化时的动力学特性

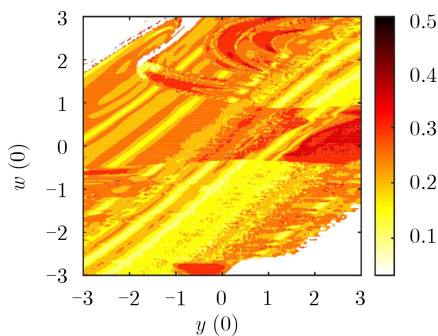


图9 系统初值y(0)-w(0)平面SE复杂度混沌图

谱可知，系统在 $w(0)=1.3$ 附近LE1减小到0，出现了一个短的周期窗口。

为了进一步分析初值系统关于初值的动力学特性，选取动力学特性较丰富的初值 $y(0)$ 以及 $w(0)$ 绘制 $y(0)-w(0)$ 平面的复杂度混沌图，如图9所示。相比于图7，在初值平面的混沌图高复杂度区域更加分散，并且图中各颜色区域分布更加不规则或无序。较小的初值改变就可能会从浅色层变化到深色层，意味着混沌状态的改变(从周期到混沌)，所以初值对该系统的影响较大。

3.4 共存吸引子

选取系统不同状态的初值点，画出这些点处的吸引子如图10所示。

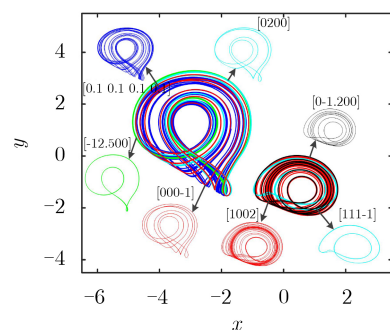


图10 分数阶式(3)系统的多吸引子共存现象

图10中用不同颜色对吸引子进行了区分, 为了更加清晰地观察, 同时单独给出了各个初值下的共存吸引子。可以明显的从图中看到在不同的区域内共存吸引子发生了重叠, 两个区域内分别为不同的单涡卷吸引子, 从单独画出的吸引子相图可看出, 左边区域有4个不同的吸引子共存, 为该单涡卷吸引子的单周期(绿色)、2周期(浅蓝)、多周期(红色)和混沌(蓝色)4种状态共存。同样地, 右边区域为另一个单涡卷吸引子的单周期(浅蓝)、多周期(黑色)和混沌(红色)3种状态共存。图10展示了两个不同单涡卷吸引子的非对称共存现象, 以及在两个单涡卷吸引子内部的单周期、多周期和混沌态共存的现象。

3.5 分数阶忆阻退化Jerk系统的DSP实现

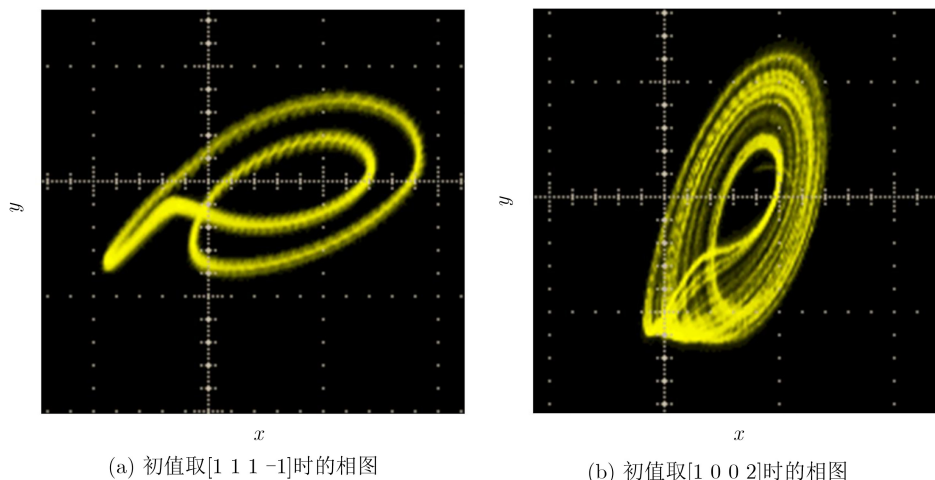
为了验证分数阶忆阻退化Jerk系统的动力学特性, 设计了该系统的数字电路。在DSP平台的软件部分设置步长 $h=0.01$, 阶数 $q=0.95$, 以及与数值仿真一致的系统参数。DSP系统经过初始化后, 初值通过迭代式开始计算, 计算出的结果经过数据处理后替代初始值, 如果设定的迭代已经完成, 则输出此结果, 如果未完成, 则继续迭代计算直到完

成。输出的结果通过D/A转换器(DAC8552)转换后输出到示波器(Tektronix MSO 4102B-L), 两路输出分别输入到示波器的X和Y通道, 通过调试后即能得到系统式(1)的电路实验相图。

示波器显示了具有不同参数的分数阶忆阻退化Jerk系统的吸引子相图, 如图11所示。系统的周期态与混沌态吸引子都通过DSP完成了实现。

4 结束语

本文通过相图、分岔图、李雅普诺夫指数谱等分析方法, 研究了分数阶忆阻退化Jerk混沌系统的动力学特性, 并采用DSP技术实现了系统的数字电路。研究发现, 该系统不仅随着阶数 q 的改变有着丰富的动力学特性, 并且随着初值的改变也有着从单周期到多周期, 最终进入混沌的完整的倍周期分岔路径, 而且在某些特定初值下分岔路径还会发生跳变, 在该系统中这种跳变表现在吸引子上是从一种单涡卷吸引子变为了另一种完全不同的单涡卷吸引子, 并通过相图分析, 发现两个不同单涡卷吸引子的非对称共存现象, 以及在两个单涡卷吸引子内部的单周期、多周期和混沌态共存的现象。下一步将研究该分数阶混沌系统的控制与应用。



(a) 初值取[1 1 1 -1]时的相图

(b) 初值取[1 0 0 2]时的相图

图 11 不同初值下系统式(1)电路实验相图

参考文献

- [1] CHUA L. Memristor-the missing circuit element[J]. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1971, 18(5): 507-509. doi: [10.1109/TCT.1971.1083337](https://doi.org/10.1109/TCT.1971.1083337).
- [2] STRUKOV D B, SNIDER G S, STEWART D R, et al. The missing memristor found[J]. *Nature*, 2008, 453(7191): 80-83. doi: [10.1038/nature06932](https://doi.org/10.1038/nature06932).
- [3] YALAGALA B, and KHANDELWAL S. Wirelessly destructible MgO-PVP-Graphene composite based flexible transient memristor for security applications[J]. *Materials Science in Semiconductor Processing*, 2019, 104: 104673. doi: [10.1016/j.mssp.2019.104673](https://doi.org/10.1016/j.mssp.2019.104673).
- [4] 张刚, 陈和祥, 张天骐. 多用户降噪差分混沌键控通信方案[J]. *电子与信息学报*, 2019, 41(2): 362-368. doi: [10.11999/JEIT171173](https://doi.org/10.11999/JEIT171173).
ZHANG Gang, CHEN Hexiang, and ZHANG Tianqi. A multiuser noise reduction differential chaos shift keying system[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(2): 362-368. doi: [10.11999/JEIT171173](https://doi.org/10.11999/JEIT171173).
- [5] ZHANG Weiwei, CAO Jinde, WU Ranchao, et al. Novel results on projective synchronization of fractional-order neural networks with multiple time delays[J]. *Chaos*,

- Solitons & Fractals*, 2018, 117: 76–83. doi: [10.1016/j.chaos.2018.10.009](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.10.009).
- [6] LUNELLI L, COLLINI C, JIMENEZ-GARDUÑO A M, *et al.* Prototyping a memristive-based device to analyze neuronal excitability[J]. *Biophysical Chemistry*, 2019, 253: 106212. doi: [10.1016/j.bpc.2019.106212](https://doi.org/10.1016/j.bpc.2019.106212).
- [7] 闵富红, 王珠林, 王恩荣, 等. 新型忆阻器混沌电路及其在图像加密中的应用[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(10): 2681–2688. MIN Fuhong, WANG Zhulin, WANG Enrong, *et al.* New memristor chaotic circuit and its application to image encryption[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(10): 2681–2688.
- [8] RAJAGOPAL K, LAAREM G, KARTHIKEYAN A, *et al.* Fractional order memristor no equilibrium chaotic system with its adaptive sliding mode synchronization and genetically optimized fractional order PID synchronization[J]. *Complexity*, 2017, 2017: 1892618. doi: [10.1155/2017/1892618](https://doi.org/10.1155/2017/1892618).
- [9] CHEN Mo, FENG Yang, BAO Han, *et al.* Hybrid state variable incremental integral for reconstructing extreme multistability in memristive Jerk system with cubic nonlinearity[J]. *Complexity*, 2019, 2019: 8549472. doi: [10.1155/2019/8549472](https://doi.org/10.1155/2019/8549472).
- [10] XU Birong, WANG Guangyi, IU H H C, *et al.* A memristor-meminductor-based chaotic system with abundant dynamical behaviors[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96(1): 765–788. doi: [10.1007/s11071-019-04820-1](https://doi.org/10.1007/s11071-019-04820-1).
- [11] 李志军, 曾以成. 基于文氏振荡器的忆阻混沌电路[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(1): 88–93. doi: [10.3724/SP.J.1146.2013.00332](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2013.00332).
LI Zhijun and ZENG Yicheng. A memristor chaotic circuit based on Wien-bridge oscillator[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(1): 88–93. doi: [10.3724/SP.J.1146.2013.00332](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2013.00332).
- [12] RAJAGOPAL K, LI Chunbiao, NAZARIMEHR F, *et al.* Chaotic dynamics of modified Wien bridge oscillator with fractional order memristor[J]. *Radioengineering*, 2019, 28(1): 165–174. doi: [10.13164/re.2019.0165](https://doi.org/10.13164/re.2019.0165).
- [13] RUAN Jingya, SUN Kehui, MOU Jun, *et al.* Fractional-order simplest memristor-based chaotic circuit with new derivative[J]. *The European Physical Journal Plus*, 2018, 133(1), No.3: 1–12. doi: [10.1140/epjp/i2018-11828-0](https://doi.org/10.1140/epjp/i2018-11828-0).
- [14] GUO Zhang, SI Gangquan, XU Xiang, *et al.* Generalized modeling and character analyzing of composite fractional-order memristors in series connection[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(1): 101–115. doi: [10.1007/s11071-018-4553-y](https://doi.org/10.1007/s11071-018-4553-y).
- [15] SI Gangquan, DIAO Lijie, and ZHU Jianwei. Fractional-order charge-controlled memristor: Theoretical analysis and simulation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(4): 2625–2634. doi: [10.1007/s11071-016-3215-1](https://doi.org/10.1007/s11071-016-3215-1).
- [16] YANG Ningning, XU Cheng, WU Chaojun, *et al.* Fractional-order cubic nonlinear flux-controlled memristor: Theoretical analysis, numerical calculation and circuit simulation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(1): 33–44. doi: [10.1007/s11071-019-04920-y](https://doi.org/10.1007/s11071-019-04920-y).
- [17] YANG Ningning, CHENG Shucan, WU Chaojun, *et al.* Dynamic behaviors analysis of a chaotic circuit based on a novel fractional-order generalized memristor[J]. *Complexity*, 2019, 2019: 6083853. doi: [10.1155/2019/6083853](https://doi.org/10.1155/2019/6083853).
- [18] MOU Jun, SUN Kehui, WANG Huihai, *et al.* Characteristic analysis of fractional-order 4D hyperchaotic memristive circuit[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 2017: 2313768. doi: [10.1155/2017/2313768](https://doi.org/10.1155/2017/2313768).
- [19] LI Ruihong and HUANG Dongmei. Stability analysis and synchronization application for a 4D fractional-order system with infinite equilibria[J]. *Physica Scripta*, 2019, 95(1): 015202. doi: [10.1088/1402-4896/ab3ed2](https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab3ed2).
- [20] CHEN Chengjie, CHEN Jingqi, BAO Han, *et al.* Coexisting multi-stable patterns in memristor synapse-coupled Hopfield neural network with two neurons[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(4): 3385–3399. doi: [10.1007/s11071-019-04762-8](https://doi.org/10.1007/s11071-019-04762-8).
- [21] BAO Han, WANG Ning, BAO Bochong, *et al.* Initial condition-dependent dynamics and transient period in memristor-based hypogenetic jerk system with four line equilibria[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, 57: 264–275. doi: [10.1016/j.cnsns.2017.10.001](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.10.001).
- [22] WAN Peng, SUN Dihua, ZHAO Min, *et al.* Multistability and attraction basins of discrete-time neural networks with nonmonotonic piecewise linear activation functions[J]. *Neural Networks*, 2020, 122: 231–238. doi: [10.1016/j.neunet.2019.10.005](https://doi.org/10.1016/j.neunet.2019.10.005).
- [23] CHEN Mo, SUN Mengxia, BAO Han, *et al.* Flux-charge analysis of two-memristor-based Chua's circuit: Dimensionality decreasing model for detecting extreme multistability[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, 67(3): 2197–2206. doi: [10.1109/TIE.2019.2907444](https://doi.org/10.1109/TIE.2019.2907444).
- [24] 贺少波, 孙克辉, 王会海. 分数阶混沌系统的Adomian分解法求解及其复杂性分析[J]. 物理学报, 2014, 63(3): 030502. doi: [10.7498/aps.63.030502](https://doi.org/10.7498/aps.63.030502).
HE Shaobo, SUN Kehui, and WANG Huihai. Solution of the fractional-order chaotic system based on Adomian decomposition algorithm and its complexity analysis[J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(3): 030502. doi: [10.7498/aps.63.030502](https://doi.org/10.7498/aps.63.030502).
- [25] 孙克辉, 贺少波, 何毅, 等. 混沌伪随机序列的谱熵复杂性分析[J]. 物理学报, 2013, 62(1): 010501. doi: [10.7498/aps.62.010501](https://doi.org/10.7498/aps.62.010501).
SUN Kehui, HE Shaobo, HE Yi, *et al.* Complexity analysis of chaotic pseudo-random sequences based on spectral entropy algorithm[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, 62(1): 010501. doi: [10.7498/aps.62.010501](https://doi.org/10.7498/aps.62.010501).
- 孙克辉: 男, 1968年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为混沌理论与应用、非线性电路与系统。
- 秦川: 男, 1996年生, 硕士生, 主要研究方向为混沌动力学分析, 分数阶混沌系统与应用。
- 王会海: 男, 1978年生, 博士, 副教授, 主要研究方向为混沌理论及其应用、嵌入式系统应用。