

## 4-正则图着色的 Kempe 等价性

刘小青<sup>\*①</sup> 许进<sup>①②</sup>

<sup>①</sup>(北京大学信息科学技术学院 北京 100871)

<sup>②</sup>(北京大学高可信软件技术教育部重点实验室 北京 100871)

**摘要:** 给定一个图  $G$  及它的一个正常顶点着色  $f$ ,  $G$  中任意两种颜色的顶点导出子图称为  $G$  的一个 2-色导出子图, 该 2-色导出子图的分支称为  $G$  的一个 2-色分支. Kempe 变换是指将图  $G$  的某个 2-色分支实施颜色互换. 若两个着色之间可通过若干次 Kempe 变换达到对方, 则这两个着色是 Kempe 等价的. Mohar 猜想当  $k \geq 3$  时, 对于任意的连通  $k$ -正则图  $G$ , 若  $G$  不是完全图, 则  $G$  的所有  $k$ -着色是 Kempe 等价的. Feghali 等人解决了  $k = 3$  时的情况, 当  $k \geq 4$  时, 此猜想尚未解决. 该文研究了  $k = 4$  时的情况, 证明了: (1) 若  $G$  是一个连通度小于 3 的 4-正则图, 则  $G$  的所有 4-着色是 Kempe 等价的; (2) 若  $G$  是 4-正则图, 且含有与 4-轮或近 5-阶完全图同构的子图, 则  $G$  的所有 4-着色是 Kempe 等价的; (3) 若  $G$  是一个 3-连通 4-正则图, 且  $G$  存在一个顶点  $x$  和一个 4-着色  $f$ , 满足  $x$  的邻域中有 3 个或 4 个顶点在  $f$  下着相同颜色, 则  $G$  的所有 4-着色是 Kempe 等价的.

**关键词:** Kempe 等价; Kempe 变换; Kempe 等价类; 4-正则图

**中图分类号:** O157.5

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2017)05-1233-12

**DOI:** 10.11999/JEIT160716

## Kempe Equivalence of Colorings of 4-regular Graphs

LIU Xiaoqing<sup>①</sup> XU Jin<sup>①②</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronic Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China)

<sup>②</sup>(Key Laboratory of High Confidence Software Technologies, Peking University, Beijing 100871, China)

**Abstract:** Given a graph  $G$  and a proper vertex coloring of  $G$ , a 2-coloring induced subgraph of  $G$  is a subgraph induced by all the vertices with one of two colors, a component of a 2-coloring induced subgraph is called a 2-coloring component. To make a Kempe change is to obtain one coloring from another by exchanging the colors of vertices in a 2-coloring component. Two colorings are Kempe equivalent if each one can be obtained from the other by a series of Kempe changes. Mohar conjectured that, for  $k \geq 3$ , all  $k$ -colorings of connected  $k$ -regular graphs that are not complete are Kempe equivalent. Feghali *et al.* addressed the case  $k = 3$ , and it is still an unsolved conjecture for  $k \geq 4$ . This paper considers the case  $k = 4$  by showing that: (1) if  $G$  is a connected 4-regular graph that is not 3-connected, then all 4-colorings of  $G$  are Kempe equivalent; (2) if  $G$  is a connected 4-regular graph that contains an induced subgraph isomorphic to a 4-wheel or a nearly complete graph of order 5, then all 4-colorings of  $G$  are Kempe equivalent; (3) if  $G$  is a 3-connected 4-regular graph with a 4-coloring  $f$  and a vertex  $x$  such that there are three or four neighbors of  $x$  colored with the same color under  $f$ , then all 4-colorings of  $G$  are Kempe equivalent.

**Key words:** Kempe equivalent; Kempe change; Kempe equivalent class; 4-regular graph

### 1 引言

本文所言之图皆指有限简单无向图. 对于给定

图  $G$ , 分别用  $V(G)$ ,  $E(G)$ ,  $d_G(v)$ ,  $N_G(v)$  和  $\bar{N}_G(v)$  来表示图  $G$  的顶点集, 边集, 顶点  $v$  的度数, 顶点  $v$  的邻域 (即与顶点  $v$  相邻的所有顶点构成的集合) 和顶点  $v$  的闭邻域 (即与顶点  $v$  相邻的所有顶点和  $v$  构成的集合), 可分别简记为  $V, E, d(v), N(v), \bar{N}(v)$ . 图  $G$  的阶是  $V(G)$  中元素的个数  $|V(G)|$ . 若  $V' \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E$  且  $E'$  中每条边的两个端点均在  $V'$  中, 则称图  $H = (V', E')$  是图  $G$  的一个子图. 在子图  $H$  中, 如果对于  $\forall u, v \in V(H)$ ,  $u, v$  在  $G$  中相邻当且仅当它们在图  $H$  中相邻, 则称  $H$  为  $G$  的一个由  $V'$  导出的子图, 记为  $G[V']$ . 若  $G$  的任意子图均有度数  $\leq d$  的顶

收稿日期: 2016-07-07; 改回日期: 2017-02-22; 网络出版: 2017-03-20

\*通信作者: 刘小青 ideal2008@126.com

基金项目: 国家 973 计划项目(2013CB329600), 国家自然科学基金(61372191, 61472012, 61472433, 61572046, 61502012, 61572492, 61572153, 61402437)

Foundation Items: The National 973 Program of China (2013CB329600), The National Natural Science Foundation of China (61372191, 61472012, 61472433, 61572046, 61502012, 61572492, 61572153, 61402437)

点, 则称  $G$  为  $d$ -退化图。对于点不交的两个图  $G, H$ , 若将图  $G$  中的每个顶点与图  $H$  中的每个顶点相连边, 则得到的新图称为图  $G$  与图  $H$  的联图, 记为  $G \vee H$ 。用  $K_n$  表示  $n$ -阶完全图。平凡图  $K_1$  与  $n$  阶圈  $C_n$  的联图  $C_n \vee K_1$  称作轮图  $W_n$ 。若图  $G$  的所有顶点的度数均为  $k$ , 则称图  $G$  是  $k$ -正则图。

图  $G$  的一个正常  $k$ -顶点着色, 简称为  $k$ -着色, 是指从图  $G$  的顶点集  $V$  到颜色集  $C(k) = \{1, 2, \dots, k\}$  的一个映射  $f$ , 满足对任意的  $xy \in E(G)$ , 有  $f(x) \neq f(y)$ 。若图  $G$  有一个  $k$ -着色, 则称  $G$  是  $k$ -可着色的。图  $G$  的色数, 记作  $\chi(G)$ , 是指满足图  $G$  有一个  $k$ -着色的最小数值  $k$ 。图  $G$  中所有不同的  $k$ -着色构成的集合用  $C_k(G)$  表示, 若两种着色可通过颜色互换达到对方, 则这两种着色是相同的。

设  $G$  是一个  $k$ -可着色的图,  $f$  是它的一个  $k$ -着色,  $\{1, 2, \dots, k\}$  为颜色集。用  $G_{it}^f$  表示在  $f$  下,  $G$  中所有着颜色  $i$  与颜色  $t$  的顶点构成的顶点子集导出的子图, 并称之为 2-色导出子图, 其中,  $i, t = 1, 2, \dots, k, i \neq t$ 。在不致混淆的情况下, 用  $G_{it}$  来代替  $G_{it}^f$ ;  $G_{it}$  中的分支也称为  $it$ -分支或 2-色分支。

**Kempe 变换**, 简称为 **K-变换**, 是指将图  $G$  中某个 2-色分支实施颜色互换, 并保持其余顶点着色不变。设  $f, f' \in C_k(G)$ , 若从  $f$  出发, 通过若干次 Kempe 变换可获得  $f'$ , 则称  $f$  与  $f'$  是 **Kempe 等价**的。图  $G$  的基于  $f$  的 **Kempe 等价类**是指所有与  $f$  Kempe 等价的着色构成之集。

1879 年, Kempe<sup>[1]</sup>在他著名的 4 色定理“证明”中首次引入了 Kempe 变换。至今, Kempe 变换在很多应用中仍然是一个强大的工具。例如, 时间表<sup>[2]</sup>, 理论物理<sup>[3,4]</sup>及 Markov 链等<sup>[5]</sup>。在 Kempe 变换的理论发展方面, 自 Kempe 之后, 首先对 Kempe 等价类进行研究的是 Fisk, 他在 1977 年文献[6]中证明了: 当一个极大平面图的所有顶点度数均为偶数时, 其所有 4-着色构成一个 Kempe 等价类。后来, Meyniel<sup>[7]</sup>和 Mohar<sup>[8]</sup>扩展了 Fisk 的结论, 其中, Meyniel 证明了任一平面图的所有 5-着色构成一个 Kempe 等价类, Mohar 证明了每个色数小于  $k$  的平面图, 其所有  $k$ -着色是 Kempe 等价的。随后, Vergnas 与 Meyniel 在文献[9]中又扩展了 Meyniel<sup>[7]</sup>的结论, 证明了不可收缩至  $K_5$  的任一简单图的所有 5-着色是一个 Kempe 等价类。Bertschi<sup>[10]</sup>证明了完美收缩图的所有  $k$ -着色是 Kempe 等价的, 从而解决了 Meyniel<sup>[11]</sup>提出的一个猜想。此外, Mohar 提出了下述猜想:

**猜想 1**<sup>[8]</sup> 设  $G$  是一个连通的  $k$ -正则图, 且不为完全图,  $k \geq 3$ 。则  $G$  的所有  $k$ -着色是 Kempe 等价

的。

2015 年, Feghali 等人<sup>[12]</sup>证明了猜想 1 在  $k=3$  时, 除  $K_4$  或三角柱外, 3-正则图的所有 3-着色是 Kempe 等价的。有关边着色的 Kempe 等价类的研究, 可参见文献[8,13,14]。

对于猜想 1, 当  $k \geq 4$  时, 要论证此猜想是否成立被认为是非常困难的<sup>[12]</sup>。本文对猜想 1 在  $k=4$  时的情况展开了研究, 并获得了如下结论: (1)若  $G$  是 4-正则图, 且含有与 4-轮或近 5-阶完全图同构的子图, 则  $G$  的所有 4-着色是 Kempe 等价的; (2)若  $G$  是一个连通度小于 3 的 4-正则图, 则  $G$  的所有 4-着色是 Kempe 等价的; (3)若  $G$  是一个 3-连通 4-正则图, 且  $G$  存在一个顶点  $x$  和一个 4-着色  $f$ , 满足  $x$  的邻域中有 3 个或 4 个顶点在  $f$  下着相同颜色, 则  $G$  的所有 4-着色是 Kempe 等价的。

文中未给出的相关定义、记号与理论参见文献[15,16]。

## 2 含 4-轮或近 5 阶-完全图的 4-正则图的 Kempe 等价性

在给出本节主要结论之前, 先给出需要使用到的定义及引理。将图 1 所示的图称为近 5 阶-完全图, 简称为近  $K_5$ 。设  $x_1, x_2$  是  $G$  中不相同的两个顶点, 对  $x_1, x_2$  实施缩点运算是指: 在  $G$  中用一个新的顶点  $x$  替代  $x_1$  和  $x_2$ , 且原来在  $G$  中分别与  $x_1, x_2$  相邻的顶点变成与  $x$  相邻。

由 Brooks 定理<sup>[17]</sup>, 即, 对于每个连通  $k$ -正则图, 若它不是完全图也不是奇圈, 则它有一个  $k$ -着色, 可直接推出引理 1。

**引理 1** 设  $G$  是一个 4-正则图, 且  $G$  不是完全图, 则  $G$  有一个 4-着色。

**引理 2** 设  $G$  是一个 4-正则图, 4-轮  $H$  是  $G$  的一个顶点导出子图, 其顶点标记如图 2(a)所示。则在  $G$  中对  $v_1, v_3$  实施缩点运算后, 所得之图为 3-退化图。

**证明** 用  $v$  表示对  $v_1, v_3$  实施缩点运算后得到的新顶点, 且用  $G'$  表示对  $v_1, v_3$  实施缩点运算后得到的新图。则在  $G'$  中,  $d(v) = 5, d(x) = d(v_2) = d(v_4)$

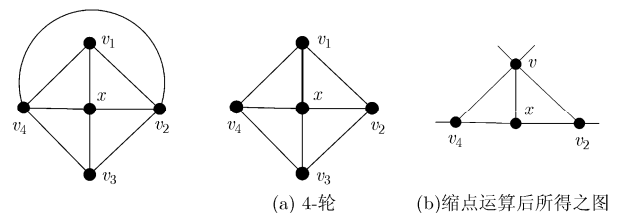


图 1 近 5-阶完全图

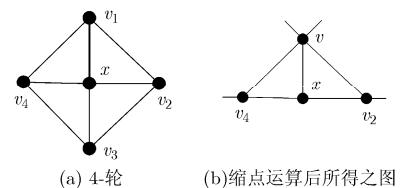


图 2 引理 2 证明示意图, 其中仅含一个端点的线条表示与未画出的一个顶点关联

$= 3$ , 如图 2(b)所示,  $G'$  中其余顶点的度数均为 4。在  $G'$  中删去属于  $\{x, v, v_2, v_4\}$  中任意数目的顶点, 所得之图是 3-退化图; 此外, 在  $G'$  中删除不属于  $\{x, v, v_2, v_4\}$  中任意数目的顶点, 所得之图是 3-退化图。故  $G'$  是 3-退化图。证毕

类似地, 容易推出下述引理。

**引理 3** 设  $G$  是一个 4-正则图, 近  $K_5$  图  $H$  是  $G$  的一个顶点导出子图, 其顶点标记如图 1 所示。则在  $G$  中对  $v_1, v_3$  实施缩点运算后, 所得之图为 3-退化图。

**引理 4**<sup>[8,9]</sup> 设  $d$  和  $k$  是两个整数, 其中  $d \geq 0, k \geq d+1$ 。若  $G$  是一个  $d$ -退化图, 则  $G$  的所有  $k$ -着色是 Kempe 等价的。

**引理 5** 设  $H$  是一个近 5-阶完全图, 则  $\forall f \in C_4(H), H$  中度数为 3 的两个顶点着相同颜色。

**证明** 设  $H$  中顶点标记如图 1 所示, 设  $g$  是  $H$  的任意一个 4-着色。不失一般性, 可设  $g(v_2) = 1, g(x) = 2, g(v_4) = 3$ 。则  $g(v_1) = g(v_3) = 4$ , 故结论成立。证毕

**引理 6** 设  $G$  是一个 4-正则图,  $H$  是  $G$  的一个与 4-轮同构的顶点导出子图,  $u, v$  是  $H$  中的两个不相邻顶点。则  $\exists f \in C_4(G)$ , 使得  $f(u) = f(v)$ 。

**证明** 由引理 1 知,  $G$  是 4-可着色的, 不妨设  $G$  的颜色集为  $\{1, 2, 3, 4\}, g \in C_4(G)$ 。若  $g(u) = g(v)$ , 则  $g$  即为满足定理要求的  $f$ 。现在假设  $g(u) \neq g(v)$ , 下面采用 K-变换的方法, 由  $g$  导出  $f$ 。不失一般性, 设  $g(u) = 1, g(v) = 2$ 。

在  $g$  下, 若  $u$  与  $v$  之间不存在 12-路(即由着颜色 1 的顶点和着颜色 2 的顶点构成的一条路, 下同), 则对  $u$  或  $v$  所在的 12-分支实施 K-变换, 即可得到一个使得  $u$  与  $v$  着相同颜色的 4-着色。下面假设  $u$  与  $v$  之间存在 12-路。

设  $N(u) = \{u_1, x, y, z\}, N(v) = \{u_2, x, y, z\}$ , 如图 3(a)所示。不失一般性, 设  $g(x) = 3$ , 则  $g(y) = 4, g(z) = 3, g(u_1) = 2, g(u_2) = 1$ , 如图 3(b)所示。图中的虚线表示所在的 2-色路含任意数顶点, 下同。则  $u_1$  与  $v$  在  $G_{24}^g$  中不连通, 对  $u_1$  所在 24-分支实施 K-变换, 再将  $u$  换成颜色 2, 所得着色即为  $f$ 。引理成立。证毕

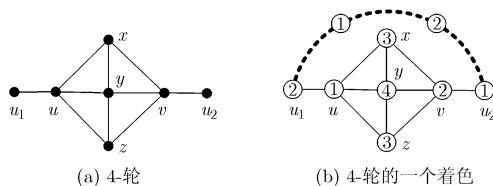


图 3 引理 6 及定理 2 证明示意图

**定理 1** 设  $G$  是一个 4-正则图。若  $G$  含与近  $K_5$  同构的顶点导出子图, 则  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。

**证明** 设  $H$  是  $G$  的一个顶点导出子图, 其为近  $K_5$ , 且顶点标记如图 1 所示。在  $G$  中对  $v_1, v_3$  实施缩点运算, 所得子图记作  $G'$ 。由引理 3 可知,  $G'$  是一个 3-退化图。再根据引理 4 可知,  $C_4(G')$  是一个 Kempe 等价类。由此推出, 在  $G$  中, 对于所有使得  $v_1, v_3$  着相同颜色的 4-着色集, 其为一个 Kempe 等价类。而由引理 5 可知,  $\forall f \in C(G)$ , 有  $f(v_1) = f(v_3)$ , 因此  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。证毕

**定理 2** 设  $G$  是一个 4-正则图。若  $G$  含与 4-轮同构的顶点导出子图, 则  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。

**证明** 设  $H$  是  $G$  的一个顶点导出子图, 其为 4-轮, 且顶点标记如图 2(a)所示。在  $G$  中对  $v_1, v_3$  实施缩点运算, 所得之图记作  $G'$ 。由引理 2 可知,  $G'$  是一个 3-退化图。再根据引理 4 可知,  $C_4(G')$  是一个 Kempe 等价类。由此推出, 在  $G$  中, 对于所有使得  $v_1, v_3$  着相同颜色的 4-着色集, 其为一个 Kempe 等价类。而由引理 6 的证明过程可知, 对于  $C_4(G)$  中任意使得  $g(v_1) \neq g(v_3)$  的  $g$ , 均可通过若干次 K-变换导出  $g'$ , 满足  $g'(v_1) = g'(v_3)$ , 因此  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。证毕

### 3 连通度小于 3 的 4-正则图的 Kempe 等价性

设  $G$  是一个图,  $u, v \in V(G), l$  是  $u$  到  $v$  的一条路。称  $u$  和  $v$  为  $l$  的端点, 称  $V(l) \setminus \{u, v\}$  中的顶点为  $l$  的内点。设  $l_1, l_2$  是图  $G$  中的两条路, 若  $V(l_1) \cap V(l_2) \neq \emptyset$ , 且  $V(l_1) \cap V(l_2)$  中含有  $l_1$  或  $l_2$  的内点, 则称  $l_1, l_2$  是相交的。将  $V(l_1) \cap V(l_2)$  中属于  $l_1$  或  $l_2$  的内点的顶点称为  $l_1$  与  $l_2$  的交点。

设  $G$  是一个 4-正则图,  $u, v \in V(G), C_4(G)$  的颜色集为  $\{1, 2, 3, 4\}, f \in C_4(G)$ 。用  $l_f^{it}(u, v)$  表示在  $f$  下,  $u$  到  $v$  的一条  $it$ -路, 在不致混淆时, 简记为  $l^{it}(u, v)$ 。若  $l_f^{it}(u, v)$  中的任意内点  $x$  均满足: 在  $G_x^f$  中的度数为 2,  $N(x)$  中含有分别着颜色  $j, k$  的两个顶点, 且这两个顶点在  $G_{jk}^f$  中连通。则称  $l_f^{it}(u, v)$  是严格的, 其中  $i, t, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq t \neq j \neq k$ 。

**引理 7**<sup>[9]</sup> 设  $G_1, G_2$  是两个图,  $G_1 \cap G_2$  是一个完全图, 整数  $k \geq 1$ 。如果  $C_k(G_1)$  和  $C_k(G_2)$  分别构成一个 Kempe 等价类, 则  $C_k(G_1 \cup G_2)$  是一个 Kempe 等价类。

**引理 8**<sup>[8]</sup> 设图  $G$  是图  $G'$  的一个子图, 整数

$k \geq 1$ , 图  $G'$  的两个  $k$ -着色  $c'_1, c'_2$  在  $G$  中的限制着色分别为  $c_1, c_2$ 。若  $c'_1, c'_2$  是 Kempe 等价的, 则  $c_1, c_2$  也是 Kempe 等价的。

**引理 9** 设  $G$  是一个 4-正则图,  $u, v \in V(G)$ ,  $u, v$  有一个公共邻点,  $G$  不含与 4-轮或近  $K_5$  同构的顶点导出子图。若  $\exists g \in C_4(G)$ , 使得  $g(u) = g(v)$ , 则  $\exists f \in C_4(G)$ , 使得  $f(u) \neq f(v)$ , 且  $f$  与  $g$  是 Kempe 等价的。

**证明** 由引理 1 知,  $G$  有一个正常 4-着色。不妨设  $G$  的颜色集为  $\{1, 2, 3, 4\}$ , 且  $g(u) = g(v) = 1$ 。下面采用 Kempe 变换的方法, 由  $g$  导出  $G$  的另一个 4-着色  $f$ , 使得  $f(u) \neq f(v)$ 。

在  $g$  下, 若  $\exists i \in \{2, 3, 4\}$ , 使得  $u, v$  不在同一个  $1i$ -分支上, 则对  $u$  或  $v$  所在的  $1i$ -分支实施 K-变换, 将所得新的 4-着色记作  $g'$ , 因为  $g'(u) \neq g'(v)$ , 故  $g'$  即为定理所需  $f$ 。因此, 下面假设  $\forall i \in \{2, 3, 4\}$ ,  $u, v$  在同一个  $1i$ -分支上。

设  $l_1(u, v)$  和  $l_2(u, v)$  是  $u$  和  $v$  之间的 2 条 12-路, 若  $l_1(u, v)$  与  $l_2(u, v)$  相交, 设顶点  $w_1$  为它们的一个交点, 如图 4(a)所示。由于  $G$  中每个顶点度数为 4, 则顶点  $w_1$  要么不与着颜色 3 的顶点相邻, 要么不与

着颜色 4 的顶点相邻, 无论是哪种情况,  $f(\overline{N}(w_1))$  的颜色数小于 4, 于是, 可将  $w_1$  换成不同于  $f(\overline{N}(w_1))$  的其它颜色, 且保持其它顶点颜色不变, 所得 4-着色记为  $g'$ 。在  $g'$  下,  $l_1(u, v)$  和  $l_2(u, v)$  不再是 12-路, 且  $u$  与  $v$  之间也不含有异于  $g$  的新的 12-路。

设  $l_3(u, v)$  是  $u$  到  $v$  的一条 12-路,  $w_2 \in l_3(u, v)$ 。将  $N(w_2)$  中不属于  $l_3(u, v)$  的两个顶点分别记为  $w'_2, w''_2$ 。若  $w'_2, w''_2$  中至少有一个顶点的着色属于  $\{1, 2\}$  (图 4(b)给出  $w_2$  不与颜色 4 的顶点相连, 但与颜色 3 的顶点相连的情况), 即,  $f(\overline{N}(w_1))$  的颜色数小于 4, 对此情况, 可将  $w_2$  换成不同于  $f(\overline{N}(w_1))$  的其它颜色, 且保持其它顶点颜色不变, 所得 4-着色记为  $g'$ 。则在  $g'$  下,  $l_3(u, v)$  不再是 12-路, 且  $u$  与  $v$  之间也不含有异于  $g$  的新的 12-路。在  $g$  下, 若  $w'_2, w''_2$  分别着颜色 3 和 4, 但  $w'_2, w''_2$  在  $G_{34}$  中不连通, 则对  $w'_2$  所在 34-分支实施 K-变换, 再将  $w_2$  换成颜色 3, 所得 4-着色记为  $g'$ 。则在  $g'$  下,  $l_3(u, v)$  不再是 12-路, 且  $u$  与  $v$  之间也不含有异于  $g$  的新的 12-路。

综上所述, 在下面的证明中, 我们只需考虑在  $g$

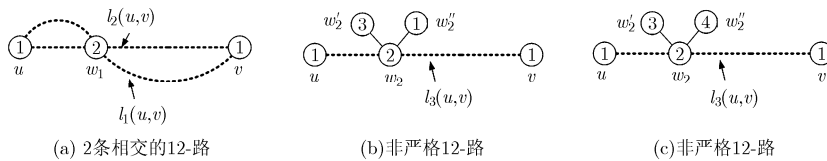


图 4 严格 2-色路与非严格 2-色路

下,  $u$  与  $v$  之间的所有 2-色路均为严格的情况, 且  $u$  与  $v$  之间同时含 12-路, 13-路和 14-路。同理, 在证明过程中, 若需要假设某两个顶点之间有一条 2-色路, 则只需考虑该 2-色路为严格的情形。分两种情况讨论。

**情况 1** 在  $g$  下,  $u$  到  $v$  之间仅含 3 条严格 2-色路。

则这 3 条严格 2-色路分别为 12-路, 13-路和 14-路, 将它们分别记作  $l^{12}(u, v)$ ,  $l^{13}(u, v)$  和  $l^{14}(u, v)$ , 其中上标表示对应 2-色路中所着的两种颜色。为了排除  $u, v$  在同一个与近  $K_5$  或 4-轮同构的导出子图中的情形, 我们需要考虑如下子情况。

**情况 1.1**  $|V(l^{12}(u, v))|=3$ ; 设  $l^{12}(u, v)$  的内点为  $w$ , 如图 5 所示。

**情况 1.1.1**  $|V(l^{13}(u, v))|=3$ ; 设  $l^{13}(u, v)$  上的唯一内点为  $w_1$ 。

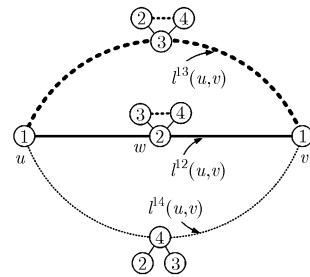


图 5 引理 9 证明示意图, 情况 1.1

**情况 1.1.1.1**  $|V(l^{14}(u, v))|=3$ ; 设  $l^{14}(u, v)$  上的唯一内点为  $w_2$ 。

**情况 1.1.1.1.1**  $w_1 w \in E(G)$ ;

由于  $G$  不含与 4-轮或近  $K_5$  同构的顶点导出子图, 故  $w_2 w, w_1 w_2 \notin E(G)$ 。如图 6(a)所示。

由于  $l^{13}(u, v)$  是严格的, 故  $N(w_1)$  中存在一个着颜色 4 的顶点(记作  $w'_1$ ), 且  $w'_1$  与  $w$  在  $G_{24}$  中连通。类似前面的分析, 只需考虑  $w'_1$  与  $w$  之间存在一条严

格 24-路的情况(若  $w'_1$  与  $w$  间无严格 24-路, 则对  $w'_1$  所在 24-分支实施 K-变换, 再将  $w_1$  换成颜色 4, 可使得  $u, v$  间无 13-路, 对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ )。

**情况 1.1.1.1.1.1** 在  $g$  下,  $w$  与  $w_2$  在  $G_{24}$  中不连通。

对  $w$  所在的 24-分支实施 K-变换, 所得着色记为  $g'$ 。若在  $g'$  下,  $u, v$  间无 12-路, 则对  $u$  或  $v$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

若在  $g'$  下,  $u, v$  间有 12-路, 由于  $G$  是 4-正则图, 故在  $g'$  下, 若  $u, v$  间含 2 条以上的 12-路, 则这些 12-路必然是相交的, 故这些交点的邻域必然不含有颜色 3 或 4 的顶点, 于是分别将这些交点换成颜色 3 或 4, 可使得  $u, v$  间不再有 12-路。故下面只需考虑在  $g'$  下,  $u, v$  间仅含有 1 条 12-路, 且为严格 12-路(记为  $l_1^{12}(u, v)$ )的情况。

显然, 在  $g$  下,  $w$  与  $l_1^{12}(u, v)$  中的某个内点(着颜色 4)存在 24-路。根据前面关于非严格 2-色路的分析, 可假设在  $g$  下,  $w$  仅与  $l_1^{12}(u, v)$  中的一个内点(着颜色 4)有 24-路, 且该路是严格的, 其示意图如图 6(b)所示。则在  $g$  下,  $w_1$  与  $w_2$  间无 34-路, 对  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  在  $G_{13}$  中不连通, 然后对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

**情况 1.1.1.1.1.2** 在  $g$  下,  $w$  与  $w_2$  在  $G_{24}$  中连通。

类似之前的讨论, 可设  $w$  与  $w_2$  之间存在一条严格 24-路, 如图 6(c)所示。显然,  $w_1$  与  $w_2$  在  $G_{34}$  中不连通,  $w_1$  所在的 34-分支仅含顶点  $w_1$  和  $w'_1$ , 且  $N(w'_1)$  中只有一个顶点着颜色 1, 故对  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  在  $G_{13}$  中不连通, 然后对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

**情况 1.1.1.1.2**  $w_1 w \notin E(G)$ ;

此时, 若  $w_2 w \in E(G)$  或者  $w_1 w_2 \in E(G)$ , 则可采用类似情况 1.1.1.1.1 中的证明方法, 得到满足定理要求的 4-着色。因此下面假设  $w_2 w, w_1 w_2 \notin E(G)$ 。

设  $w'_1 \in N(w_1)$  着颜色 4, 则  $w'_1$  与  $u$  在  $G_{14}$  中不连通, 对  $w'_1$  所在 14-分支实施 K-变换, 再将  $w'_1$  换成颜

色 4, 可使得  $u, v$  间无 13-路, 最后对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为满足定理要求的 4-着色。

**情况 1.1.1.2**  $|V(l^4(u, v))| > 3$ ;

设  $u' \in N(u), v' \in N(v)$  且  $u', v' \notin V(l^{12}(u, v) \cup l^{13}(u, v) \cup l^{14}(u, v))$ 。下面根据  $u'$  与  $v'$  的着色分情况讨论。

**情况 1.1.1.2.1**  $g(u') = g(v') = 2$  或 3;

先考察  $g(u') = g(v') = 2$  的情况。若  $w_1$  不与  $l^{14}(u, v)$  上的任意着颜色 4 的顶点间有 34-路, 或者  $w_1$  仅与  $l^{14}(u, v)$  上的一个着颜色 4 的顶点有 34-路, 则将  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换, 可使得  $u$  与  $v$  在  $G_{13}$  中不连通, 于是, 对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

在  $g$  下, 若  $w_1$  与  $l^{14}(u, v)$  中的两个以上的颜色为 4 的顶点有 34-路, 由于  $l^{13}(u, v)$  是严格的, 且  $G$  是 4-正则图, 故这些 34-路相交。在  $g$  下, 分别将这些交点换成其邻域不含的颜色(颜色 1 或 2), 然后对  $w_1$  所在的 34-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间无 13-路, 于是, 对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

当  $g(u') = g(v') = 3$  时, 其证明过程与上述类似, 故略。

**情况 1.1.1.2.2**  $g(u') = g(v') = 4$ ;

若  $w w_1 \notin E(G)$ , 则用  $w'$  表示  $N(w)$  中着颜色 3 的顶点。由于  $g(u') = g(v') = 4$ , 因此,  $w'$  与  $u$  在  $G_{13}$  中不连通。对  $w'$  所在 13-分支实施 K-变换, 然后将  $w$  换成颜色 3, 可使得  $u, v$  间无 12-路, 于是, 对  $u$  或  $v$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。下面假设  $w w_1 \in E(G)$ 。设  $w_2 \in N(u)$ , 且  $w_2 \in V(l^{14}(u, v))$ ; 且  $w_3 \in N(v)$ , 且  $w_3 \in V(l^{14}(u, v))$ , 如图 7 所示。

在  $g$  下, 若  $w_1$  与  $w_2, w_3$  在  $G_{34}$  中均不连通, 对  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换, 所得着色记为  $g'$ 。若在  $g'$  下,  $u, v$  间无 13-路, 则对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

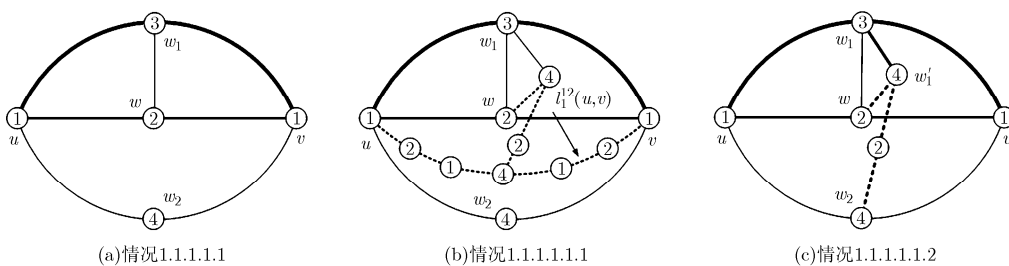


图 6 引理 9 证明示意图, 情况 1.1.1.1.1

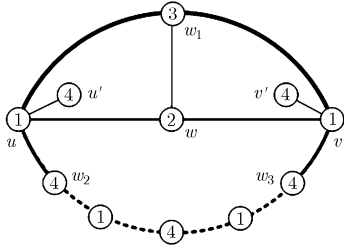


图 7 引理 9 证明示意图, 情况 1.1.1.2.2

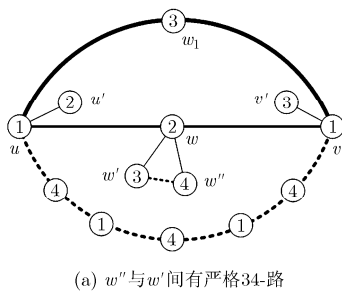
若在  $g'$  下,  $u, v$  间有 13-路, 则对于其中的任一条 13-路,  $u', v'$  必然均为该路的内点, 我们仅需考虑这些 13-路均为严格的情况。设  $l_1^{13}(u, v)$  是在  $g'$  下,  $u, v$  间的一条严格 13-路, 由于  $G$  为 4-正则图, 故  $u, v$  间只有一条 13-路。由此推出, 在  $g$  下,  $w_1$  到  $u'$  及  $v'$  的任意条 34-路均不是严格的, 且这些 34-路均含有满足如下条件的内点: 该内点的邻域中有 3 个以上着色颜色 3 或 4 的顶点。于是在  $g$  下, 将  $w_1$  所在的 34-分支上所有满足上述条件的顶点均换成其邻域不含的颜色(即颜色 1 或 2), 再对  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 13-路, 然后对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。于是, 下面我们仅需再考虑在  $g$  下,  $w_1$  与  $w_2$  在  $G_{34}$  中连通, 或者  $w_1$  与  $w_3$  在  $G_{34}$  中连通的情况。

不失一般性, 设  $w_1$  与  $w_2$  在  $G_{34}$  中连通, 于是, 可假设  $w_1$  与  $w_2$  间有一条严格 34-路, 对  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 13-路, 然后对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

**情况 1.1.1.2.3**  $g(u') = 2$  且  $g(v') = 3$ ; 或者  $g(u') = 3$  且  $g(v') = 2$ ;

先考察  $g(u') = 2, g(v') = 3$  的情况。设  $w', w'' \in N(w)$  且  $g(w') = 3, g(w'') = 4$ 。由假设知,  $w''$  与  $w'$  在  $G_{34}$  中连通。根据前面关于非严格 2-色路的分析, 仅需考虑  $w''$  与  $w'$  间有一条严格 34-路的情况, 如图 8(a)所示。

在  $g$  下, 若  $w''$  与  $u$  在  $G_{14}$  中不连通, 则对  $w''$  所



在 14-分支实施 K-变换, 再将  $w$  换成颜色 4, 可使得  $u, v$  间不再有 12-路, 然后对  $u$  或  $v$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

在  $g$  下, 若  $w''$  与  $u$  在  $G_{14}$  中连通。由于  $G$  为 4-正则图, 且在  $g$  下,  $l^{14}(u, v)$  是严格的, 故  $w'' \in V(l^{14}(u, v))$ , 如图 8(b)所示。则  $w''$  所在 24-分支仅含顶点  $w''$  和  $w$ , 对该分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 12-路, 然后对  $u$  或  $v$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

当  $g(u') = 3, g(v') = 2$  时, 其证明过程与上述类似, 故略。

**情况 1.1.1.2.4**  $g(u') = 2$  且  $g(v') = 4$ ; 或者  $g(u') = 4$  且  $g(v') = 2$ ;

设  $g(u') = 2, g(v') = 4, w_2 \in N(u), w_3 \in N(v)$ , 且  $w_2, w_3 \in V(l^{14}(u, v))$ , 如图 9 所示。

在  $g$  下, 若  $w_2$  与  $w_1$  在  $G_{34}$  中不连通, 则对  $w_2$  所在 34-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 14-路, 然后对  $u$  或  $v$  所在 14-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

在  $g$  下, 若  $w_2$  与  $w_1$  在  $G_{34}$  中连通。类似前面分析, 仅需考虑  $w_2$  与  $w_1$  间有一条严格 34-路的情况, 因此  $w_3$  与  $w_1$  在  $G_{34}$  中不连通。对  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 13-路, 然后对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

当  $g(u') = 4$  且  $g(v') = 2$  时, 其证明过程与上述类似, 故略

**情况 1.1.1.2.5**  $g(u') = 4$  且  $g(v') = 3$ ; 或者  $g(u') = 3$  且  $g(v') = 4$ ;

此情况的证明方法与情况 1.1.1.2.4 类似, 故略。

**情况 1.1.2**  $|V(l^{13}(u, v))| > 3$ ;

若  $V(l^{14}(u, v)) = 3$ , 则类似与情况 1.1.1.2 类似, 故下面只考虑  $V(l^{14}(u, v)) > 3$  的情况。设  $u' \in N(u), v' \in N(v)$  且  $u', v' \notin V(l^{12}(u, v) \cup l^{13}(u, v) \cup l^{14}(u, v))$ 。下面根据  $u'$  与  $v'$  的着色分情况讨论。

**情况 1.1.2.1**  $g(u') = g(v') = 2$ ;

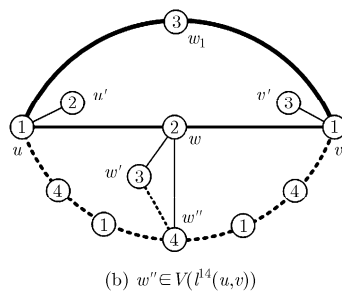


图 8 引理 9 证明示意图, 情况 1.1.1.2.3

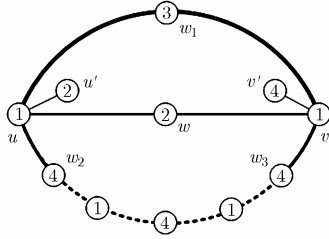


图 9 引理 9 证明示意图, 情况 1.1.1.2.4

设  $w_1, w_2 \in N(u)$ , 且  $w_1 \in V(l^{13}(u, v))$ ,  $w_2 \in V(l^{14}(u, v))$ , 如图 10 所示。在  $g$  下, 若  $w_1$  与  $w_2$  间无 34-路, 则对  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 13-路, 然后对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。在  $g$  下, 若  $w_1$  与  $w_2$  间有 34-路, 则我们仅需考虑  $w_1$  与  $w_2$  间有一条严格 34-路的情况。由于  $l^{13}(u, v)$ ,  $l^{14}(u, v)$  是严格的, 故对  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换后,  $u, v$  间不再有 13-路, 也不再有 14-路, 在此基础上, 对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

**情况 1.1.2.2**  $g(u') = g(v') = 3$  或 4;

先考察  $g(u') = g(v') = 3$  的情况。设  $w_1 \in N(u)$ ,  $w_2 \in N(v)$ , 且  $w_1, w_2 \in V(l^{14}(u, v))$ , 如图 11 所示。

在  $g$  下, 若  $w$  与  $w_1$  间无 24-路, 则对  $w_1$  所在 24-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 14-路, 在此基础上, 对  $u$  或  $v$  所在 14-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

于是, 下面假设在  $g$  下,  $w$  与  $w_1$  间有 24-路。类似之前分析, 我们仅需考察  $w$  与  $w_1$  有一条严格 24-路的情况。由于在  $g$  下,  $l^{12}(u, v)$ ,  $l^{14}(u, v)$  是严格的, 故  $w$  与  $w_2$  间无 24-路。此时, 对  $w_2$  所在 24-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 14-路, 在此基础上, 对  $u$  或  $v$  所在 14-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

当  $g(u') = g(v') = 4$  时, 其证明过程与上述类似, 故略。

**情况 1.1.2.3**  $g(u') = 2, g(v') = 3$ ; 或  $g(u') = 3, g(v') = 2$ ; 或  $g(u') = 2, g(v') = 4$ ; 或  $g(u') = 4,$

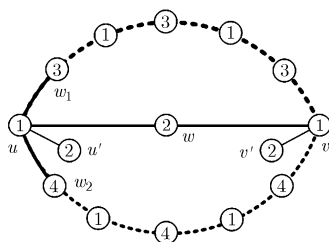


图 10 引理 9 证明示意图, 情况 1.1.2.1

$g(v') = 2$ ;

先考察  $g(u') = 2, g(v') = 3$  的情况。设  $w' \in N(w)$ , 且  $g(w') = 4$ 。若  $w' \notin V(l^{14}(u, v))$ , 由于  $l^{14}(u, v)$  是严格的, 因此,  $w'$  与  $u$  在  $G_{14}$  中不连通, 对  $w'$  所在 14-分支实施 K-变换, 再将  $w$  换成颜色 4, 可使得  $u, v$  间不再有 12-路, 在此基础上, 对  $u$  或  $v$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。若  $w' \in V(l^{14}(u, v))$ , 则在  $g$  下,  $w'$  所在 24-分支仅含顶点  $w'$  和  $w$ , 对该分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 12-路, 在此基础上, 对  $u$  或  $v$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

当  $g(u') = 3, g(v') = 2$  或  $g(u') = 2, g(v') = 4$  或  $g(u') = 4, g(v') = 2$  时, 可以采用类似上述方法予以证明, 故略。

**情况 1.1.2.4**  $g(u') = 3, g(v') = 4$  或  $g(u') = 4, g(v') = 3$ ;

在  $g$  下, 若  $w$  不与  $l^{14}(u, v)$  中任意着颜色 4 的顶点间有 24-路, 则对  $w$  所在 24-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 12-路, 在此基础上, 对  $u$  或  $v$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。下面假设在  $g$  下,  $w$  与  $l^{14}(u, v)$  中的某个颜色 4 的顶点(记为  $w_1$ )间有 24-路。类似上述分析, 我们仅需考察  $w$  与  $w_1$  间有一条严格 24-路的情形, 设为  $l^{24}(w, w_1)$ 。由于  $G$  为 4-正则图, 故  $w$  仅与  $l^{14}(u, v)$  中的一个着颜色 4 的顶点(即  $w_1$ )有 24-路。又由于  $V(l^{14}(u, v)) > 3$ , 且  $l^{14}(u, v)$ ,  $l^{12}(u, v)$ ,  $l^{24}(w, w_1)$  分别是严格的, 故对  $w$  所在 24-分支实施 K-变换后,  $u, v$  间不再有 12-路, 在此基础上, 对  $u$  或  $v$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

当  $g(u') = 4, g(v') = 3$  时, 证明过程与上述类似, 故略。

**情况 1.2**  $V(l^{12}(u, v)) > 3$ ;

设  $u' \in N(u), v' \in N(v)$  且  $u', v' \notin V(l^{12}(u, v) \cup l^{13}(u, v) \cup l^{14}(u, v))$ , 我们根据  $u'$  与  $v'$  的着色分情况讨论。

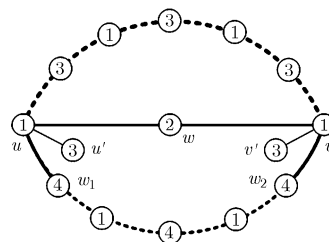


图 11 引理 9 证明示意图, 情况 1.1.2.2

**情况 1.2.1**  $g(u') = g(v')$ ;

由于  $l^{12}(u, v)$ ,  $l^{13}(u, v)$ ,  $l^{14}(u, v)$  所含内点数均不止一个, 故不失一般性, 可设  $g(u') = g(v') = 2$ 。设  $w_1, w_2 \in N(u)$ , 且  $w_1 \in V(l^{13}(u, v))$ ,  $w_2 \in V(l^{14}(u, v))$ , 如图 12 所示。

在  $g$  下, 若  $w_1, w_2$  在  $G_{34}$  中不连通, 则对  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换, 可使得  $u, v$  间不再有 13-路, 在此基础上, 对  $u$  或  $v$  所在 13-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

在  $g$  下, 若  $w_1, w_2$  在  $G_{34}$  中连通。由之前讨论可知, 仅需考虑  $w_1, w_2$  间有一条严格 34-路的情况。故此时除  $w_1$  外,  $w_2$  不与  $l^{13}(u, v)$  上任意着颜色 3 的顶点有 34-路; 除  $w_2$  外,  $w_1$  不与  $l^{14}(u, v)$  上任意着颜色 4 的顶点有 34-路。当对  $w_1$  所在 34-分支实施 K-变换后,  $u, v$  间不再有 13-路, 也不再有 14-路, 在此基础上, 对  $u$  或  $v$  所在 13-分支或 14-分支实施 K-变换, 所得 4-着色即为  $f$ 。

**情况 1.2.2**  $g(u') \neq g(v')$ ;

由于  $l^{12}(u, v)$ ,  $l^{13}(u, v)$ ,  $l^{14}(u, v)$  所含内点数均不止一个, 故不失一般性, 可设  $g(u') = 2$ ,  $g(v') = 3$ 。设  $w_1, w_2 \in N(u)$ , 且  $w_1 \in V(l^{13}(u, v))$ ,  $w_2 \in V(l^{14}(u, v))$ 。对此情况, 可采用类似情况 1.2.1 中给出的方法获得  $f$ , 故略。

**情况 2** 在  $g$  下,  $u$  与  $v$  之间含 4 条严格 2-色路;

不失一般性, 设  $u$  与  $v$  之间有两条严格 14-路, 其余两条严格 2-色路为 12-路和 13-路, 分别记作  $l_1^4(u, v)$ ,  $l_2^4(u, v)$ ,  $l^{12}(u, v)$  和  $l^{13}(u, v)$ , 其中上标表示对应 2-色路中所着的两种颜色。

**情况 2.1**  $|V(l^{12}(u, v))| = 3$ ; 设  $l^{12}(u, v)$  上内点记作  $w$ , 如图 13 所示; 具体分如下子情况。

**情况 2.1.1**  $|V(l^{13}(u, v))| = 3$ ; 设  $l^{13}(u, v)$  上的唯一内点为  $w_1$ 。

**情况 2.1.1.1**  $|V(l_1^4(u, v))| = 3$  或  $|V(l_2^4(u, v))|$

$= 3$ ;

不妨设  $|V(l_1^4(u, v))| = 3$ , 用  $w_2$  表示  $l_1^4(u, v)$  上的唯一内点, 则此情况与情况 1.1.1.1 类似, 故略。

**情况 2.1.1.2**  $|V(l_1^4(u, v))| > 3$ , 且  $|V(l_2^4(u, v))| > 3$ ; 此情况与情况 1.1.1.2 类似, 故略。

**情况 2.1.2**  $|V(l^{13}(u, v))| > 3$ ;

此情况与情况 1.1.2 类似, 故略。

**情况 2.2**  $|V(l^{12}(u, v))| > 3$ ;

此情况类似于情况 1.2, 故略。

综上所述, 本结论成立。

证毕

基于引理 4, 7~9, 可得到如下结论。

**定理 3** 设  $G$  是一个连通的 4-正则图。若它的连通度小于 3, 且不含与 4 轮或近  $K_5$  同构的顶点导出子图, 则  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。

**证明** 设  $G$  是一个连通 4-正则图, 且它的连通度小于 3。因为  $G$  是 4-正则图, 故  $G$  至少有 5 个顶点。又因为  $G$  不是 3-连通的, 所以  $G$  有一个顶点割集  $S$ , 且  $|S| \leq 2$ 。设  $S$  是  $G$  的一个最小的顶点割集, 满足  $G = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = S$ 。因为  $S$  中的每个顶点在  $G_i$  中的度数小于等于 3, 且  $G$  是 4-正则图, 故  $G_1, G_2$  是 3-退化图。因此, 由引理 4 知,  $C_4(G_1)$  和  $C_4(G_2)$  分别构成一个 Kempe 等价类。如果  $S$  是一个团, 则由引理 7 知, 结论成立。证毕

下面我们假设  $G$  中的任意最小割集均不是团。因此  $S = \{x, y\}$ , 其中,  $x, y$  为不同的两个顶点,  $xy \notin E(G)$ 。

因为  $S$  是最小割集,  $x, y$  不相邻且  $G$  为 4-正则图, 故  $d_{G_i}(x) \in \{1, 2, 3\}, d_{G_i}(y) \in \{1, 2, 3\}, i = 1, 2$ 。设  $N_i(x)$  和  $N_i(y)$  分别为  $x$  和  $y$  在  $G_i$  中的邻域,  $i = 1, 2$ 。于是我们有  $|N_1(x)| = 1, |N_2(x)| = 3$ , 或者  $|N_1(x)| = 3, |N_2(x)| = 1$ , 或者  $|N_1(x)| = 2, |N_2(x)| = 2$ ; 同样地, 有  $|N_1(y)| = 1, |N_2(y)| = 3$ , 或者  $|N_1(y)| = 3, |N_2(y)| = 1$ , 或者  $|N_1(y)| = 2, |N_2(y)| = 2$ 。

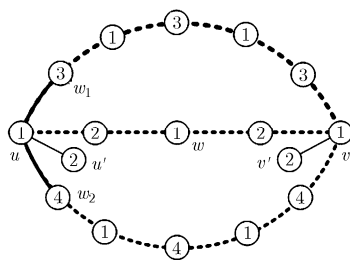


图 12 引理 9 证明示意图, 情况 1.2.1

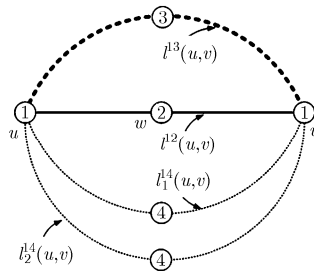


图 13 引理 9 证明示意图, 情况 2.1

我们可以假设对于任意的  $i \in \{1,2\}$ ,  $|N_i(x)|, |N_i(y)|$  不同时为 1, 也同时为 3。若  $|N_1(x)| = |N_1(y)| = 1$  或 3, 不失一般性, 假设  $N_1(x) = \{x_1\}, |N_1(y)| = 1$ , 则  $\{x_1, y\}$  是  $G$  的一个割集。根据之前的假设,  $G$  不含有为团的最小割集, 于是  $\{x_1, y\}$  为一个最小割集且  $x_1 y \notin E(G)$ 。因为  $G$  是 4-正则的, 故  $x_1$  在  $V(G_1) \setminus \{x_1, x\}$  中有 3 个邻点。又因为  $|N_1(y)| = 1$  且  $x_1$  与  $y$  不相邻, 故  $y$  在  $V(G_1) \setminus \{x_1, x\}$  中仅有 1 个邻点。因此可以用  $\{x_1, y\}$  来代替  $S = \{x, y\}$  以作为假定的一个顶点割集。因此可以假设对于任意的  $i \in \{1,2\}, |N_i(x)|, |N_i(y)|$  不同时为 1, 也同时为 3。

注意到,  $C_4(G)$  中所有使得  $x, y$  着不同颜色的 4-着色是 Kempe 等价的。其证明过程如下。

在  $G$  中的  $x, y$  间连一条边  $e$ 。我们先证明  $C_4(G+e)$  是一个 Kempe 等价类。因为  $|N_1(x)| = |N_1(y)| = 2$  或者  $|N_1(x)|, |N_1(y)|$  中有一个为 1, 另一个为 3, 故  $G_i + e$  是 3-退化图,  $i = 1, 2$ 。因此, 根据引理 4 知,  $C_4(G_i + e)$  是一个 Kempe 等价类,  $i = 1, 2$ 。又根据引理 7 知,  $C_4(G+e)$  是一个 Kempe 图。再由引理 8 知,  $C_4(G)$  中所有使得  $x, y$  着不同颜色的 4-着色是 Kempe 等价的。

根据引理 9 知, 对于  $C_4(G)$  中任意使得  $x, y$  着相同颜色的 4-着色  $g$ , 均存在一个 4-着色  $f \in C_4(G)$ , 使得  $f(x) \neq f(y)$ , 且  $g$  与  $f$  是 Kempe 等价的。因此  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类, 本定理成立。

证毕

由定理 1 和定理 2 可知, 对于任意一个连通 4-正则图  $G$ , 若它含与 4-轮或近  $K_5$  同构的顶点导出子图, 则  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。再由定理 3 知, 任意不含与 4-轮或近  $K_5$  同构的顶点导出子图, 且连通度小于 3 的 4-正则图  $G$ , 其对应的  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。基于上述, 可直接推出下述结论。

**推论 1** 设  $G$  是一个连通度小于 3 的 4-正则图,  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。

### 4 3-连通 4-正则图 Kempe 等价性的讨论

前面我们讨论了连通度小于 3 的 4-正则图的 Kempe 等价性, 本节将进一步讨论 3-连通 4-正则图的 Kempe 等价性问题。为此, 先引入引理 10。

**引理 10**<sup>[12]</sup> 设  $G$  是一个最大度为  $k$  的 3-连通图,  $xyz$  是  $G$  的一条 2-长路,  $f \in C_k(G)$  满足  $f(x) = f(z)$ 。若  $\exists g \in C_k(G)$  满足  $g(x) = g(z)$ , 且  $g \neq f$ , 则  $f$  与  $g$  是 Kempe 等价的。

设  $G$  是一个 4-正则非完全图, 则  $G$  一定含有一个如图 14(a)所示的子图  $H$ 。  $\forall f \in C_4(G)$ ,  $H$  在  $f$  下的限制着色必然属于  $\{g_1, g_2, \dots, g_{14}\}$  中的一个, 如图 14(a)~14(n)所示。用  $C_4^G(H)$  表示  $H$  在  $C_4(G)$  下的所有限制 4-着色构成之集。设  $f, f' \in C_4(G)$  为 Kempe 等价的, 若  $H$  在它们限制下的着色不相同, 则由引理 8 知, 这两个限制着色也为 Kempe 等价的。

**定理 4** 设  $G$  是一个 3-连通 4-正则非完全图,  $H$  是  $G$  的一个如图 14(a)所示的子图。若  $g_1 \in C_4^G(H)$ , 则  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。

**证明** 因为  $g_1(v_1) = g_1(v_2) = g_1(v_3) = g_1(v_4)$ , 若  $C_4^G(H) = \{g_1\}$ , 则说明  $\forall f \in C_4(G)$ , 均有  $f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = f(v_4)$ , 由引理 10 知,  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。若  $C_4^G(H) \supset \{g_1\}$ , 令  $C_4^{g_1}(G)$  为  $C_4(G)$  中在  $H$  上的限制着色为  $g_1$  的所有 4-着色构成之集, 则由引理 10 知,  $C_4^{g_1}(G)$  是一个 Kempe 等价类, 且  $C_4(G) \setminus C_4^{g_1}(G)$  中的所有 4-着色均与  $C_4^{g_1}(G)$  是 Kempe 等价的, 故  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。

证毕

假设  $G$  是一个 4-正则非完全图, 定理 4 证明了当  $G$  存在一个顶点  $x$  及 4-着色  $f$ , 使得  $x$  邻域中所有 4 个顶点着相同颜色时,  $G$  的所有 4-着色构成一个 Kempe 等价类。下面我们考察  $x$  邻域中仅有 3 个顶点在  $f$  下着相同颜色时  $G$  的 Kempe 等价性。

**引理 11** 设  $G$  是一个 3-连通 4-正则非完全图,

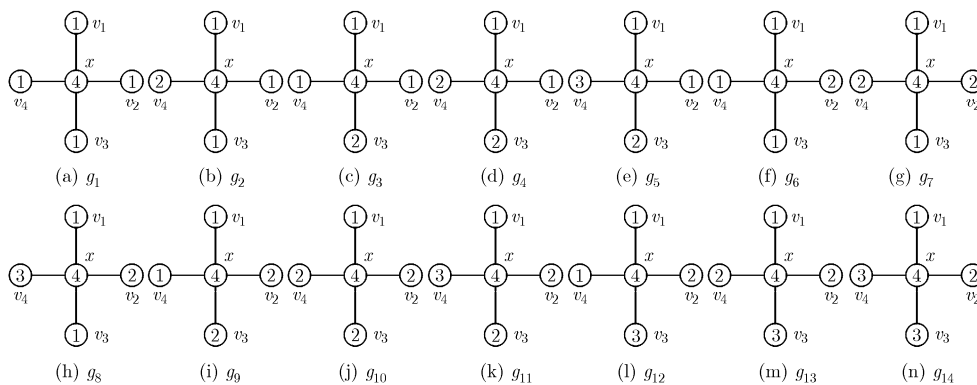


图 14  $H$  在  $f$  限制下的所有可能着色

$H$  是  $G$  的一个如图 14(a)所示的子图。则

(1)若  $C_4^G(H) \supseteq \{g_2, g_{12}\}$ , 则  $f_2, f_{12}$  是 Kempe 等价的;

(2)若  $C_4^G(H) \supseteq \{g_2, g_{13}\}$ , 则  $f_2, f_{13}$  是 Kempe 等价的;

(3)若  $C_4^G(H) \supseteq \{g_2, g_{14}\}$ , 则  $f_2, f_{14}$  是 Kempe 等价的。其中,  $f_i \in C_4(G)$ , 且  $H$  在  $f_i$  下的限制着色为  $g_i$ 。

**证明** 对于(1), 下面采用 K-变换的方法, 从  $f_{12}$  出发, 导出  $f_2$  或者与  $f_2$  为 Kempe 等价的一个 4-着色。

注意到  $f_2(v_1) = f_2(v_2) = f_2(v_3)$ , 因此,  $v_1, v_2, v_3$  在  $G$  中互不相邻。在  $f_{12}$  下, 若  $v_1, v_2$  间无 12-路, 则对  $v_2$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得着色记作  $f_{12}^1$ , 显然,  $f_{12}^1$  与  $f_{12}$  是 K-等价的。又因为  $f_{12}^1(v_1) = f_{12}^1(v_2)$ , 故由引理 10 知,  $f_{12}^1$  与  $f_2$  是 K-等价的。

下面假设在  $f_{12}$  下,  $v_1$  与  $v_2$  之间存在 12-路。由引理 9 的证明过程中关于非严格 2-色路的分析可知, 我们仅需考虑在  $f_{12}$  下,  $v_1$  与  $v_2$  之间的所有 12-路是严格的情形。

在  $f_{12}$  下, 设  $v_1$  与  $v_2$  间的一条严格 12-路为  $l^{12}(v_1, v_2)$ ; 同理, 设  $v_1$  与  $v_3$  间有一条严格 13-路(记作  $l^{13}(v_1, v_3)$ ),  $v_2$  与  $v_3$  间有一条严格 23-路(记作  $l^{23}(v_2, v_3)$ )。设  $N(v_1) = \{v_1^1, v_1^2, v_1^3, x\}$ ,  $N(v_2) = \{v_2^1, v_2^2, v_2^3, x\}$ ,  $N(v_3) = \{v_3^1, v_3^2, v_3^3, x\}$ , 且  $v_1^1, v_2^1 \in l^{12}(v_1, v_2), v_1^2, v_3^1 \in l^{13}(v_1, v_3), v_2^2, v_3^2 \in l^{23}(v_2, v_3)$ , 如图 15(a)所示。则  $f_{12}(v_1^3) = 2$  或 3 或 4;  $f_{12}(v_3^3) = 1$  或 2 或 4。下面根据  $v_1^3, v_3^3$  的着色分情况讨论。

**情况 1**  $f_{12}(v_1^3) = 2, f_{12}(v_3^3) = 1$ ;

此时,  $x$  所在 34-分支仅含顶点  $x$  和  $v_3$ , 对该分支实施 K-变换, 再将  $v_1$  换成颜色 4, 所得着色记作  $f_{12}^1$ , 显然,  $f_{12}^1$  与  $f_{12}$  是 Kempe 等价的。又因为  $f_{12}^1(v_1) = f_{12}^1(v_3)$ , 故由引理 10 知,  $f_{12}^1$  与  $f_2$  是 K-等价的。

**情况 2**  $f_{12}(v_1^3) = 2, f_{12}(v_3^3) = 2$ ;

此情况与情况 1 的证明方法相同, 故略。

**情况 3**  $f_{12}(v_1^3) = 2, f_{12}(v_3^3) = 4$ ;

此时,  $v_1$  所在的 13-分支即为  $l^{13}(v_1, v_3)$ , 对该分支实施 K-变换, 所得着色记作  $f_{12}^1$ , 如图 15(b)所示。若在  $f_{12}^1$  下,  $v_1$  与  $v_2$  间无 23-路, 则对  $v_1$  所在的 23-分支实施 K-变换, 所得着色与  $f_2$  是 Kempe 等价的。若在  $f_{12}^1$  下,  $v_1$  与  $v_2$  间有 23-路, 由于在  $f_{12}$  下,  $l^{12}(v_1, v_2), l^{13}(v_1, v_3)$  和  $l^{23}(v_2, v_3)$  是严格的, 故  $f_{12}^1(v_2^3) = 3$ , 且在  $f_{12}^1$  下,  $v_3$  与  $v_2$  间无 12-路, 于是, 对  $v_2$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得着色与  $f_2$  是 Kempe 等价的。

**情况 4**  $f_{12}(v_1^3) = 3, f_{12}(v_3^3) = 1$ ;

此情况与情况 1 的证明方法相同, 故略。

**情况 5**  $f_{12}(v_1^3) = 3, f_{12}(v_3^3) = 2$ ;

此情况与情况 1 的证明方法相同, 故略。

**情况 6**  $f_{12}(v_1^3) = 3, f_{12}(v_3^3) = 4$ ;

若  $f_{12}(v_2^3) \neq 1$ , 则  $v_1$  所在的 12-分支即为  $l^{12}(v_1, v_2)$ , 对该分支实施 K-变换, 所得着色记作  $f_{12}^1$ , 如图 15(c)所示。由于在  $f_{12}$  下,  $l^{12}(v_1, v_2), l^{13}(v_1, v_3)$  和  $l^{23}(v_2, v_3)$  是严格的, 故在  $f_{12}^1$  下,  $v_3$  与  $v_1$  间无 23-路, 对  $v_3$  所在 23-分支实施 K-变换, 所得着色与  $f_2$  是 K-等价的。

若  $f_{12}(v_2^3) = 1$ , 则在  $f_{12}$  下,  $v_3$  所在的 23-分支即为  $l^{23}(v_3, v_2)$ , 对该分支实施 K-变换, 所得着色记作  $f_{12}^1$ , 如图 15(d)所示。由于在  $f_{12}$  下,  $l^{12}(v_1, v_2), l^{13}(v_1, v_3)$  和  $l^{23}(v_2, v_3)$  是严格的, 故在  $f_{12}^1$  下,  $v_3$  与  $v_1$  间无 12-路, 对  $v_3$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得着色与  $f_2$  是 K-等价的。

**情况 7**  $f_{12}(v_1^3) = 4, f_{12}(v_3^3) = 1$ ;

此情况与情况 6 的证明方法相同, 故略。

**情况 8**  $f_{12}(v_1^3) = 4, f_{12}(v_3^3) = 2$ ;

此情况与情况 3 的证明方法相同, 故略。

**情况 9**  $f_{12}(v_1^3) = 4, f_{12}(v_3^3) = 4$ ;

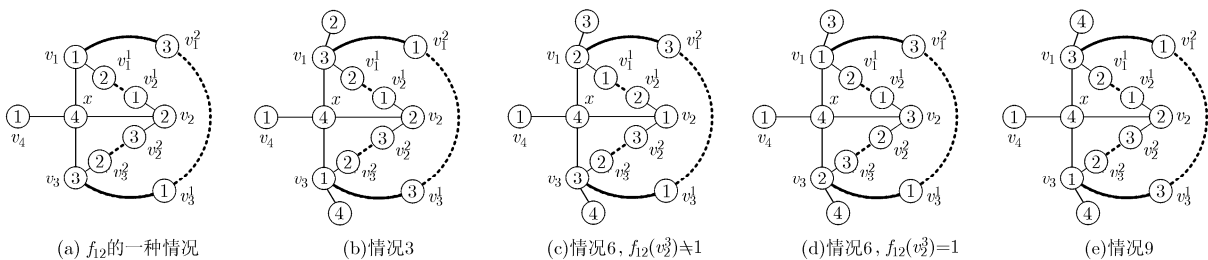


图 15 引理 11 证明示意图

此时,  $v_1$  所在的 13-分支即为  $l^{13}(v_1, v_3)$ 。若  $f_{12}(v_2^3) \neq 1$ , 对  $v_1$  所在的 13-分支实施 K-变换, 所得着色记作  $f_{12}^1$ , 如图 15(e)所示。由于在  $f_{12}$  下,  $l^{12}(v_1, v_2)$ ,  $l^{13}(v_1, v_3)$  和  $l^{23}(v_2, v_3)$  是严格的, 且  $f_{12}(v_2^3) \neq 1$ , 因此在  $f_{12}^1$  下,  $v_3$  与  $v_2$  间无 12-路, 于是, 对  $v_2$  所在 12-分支实施 K-变换, 所得着色与  $f_2$  是 K-等价的。

若  $f_{12}(v_2^3) = 1$ , 则在  $f_{12}$  下, 对  $v_1$  所在的 13-分支实施 K-变换, 所得着色记作  $f_{12}^1$ , 如图 15(e)所示。由于在  $f_{12}$  下,  $l^{12}(v_1, v_2)$ ,  $l^{13}(v_1, v_3)$  和  $l^{23}(v_2, v_3)$  是严格的, 且  $f_{12}(v_2^3) = 1$ , 因此在  $f_{12}^1$  下,  $v_1$  与  $v_2$  间无 23-路, 于是, 对  $v_2$  所在 23-分支实施 K-变换, 所得着色与  $f_2$  是 K-等价的。

另外, 可采用类似于(1)中给出的证明方法来证明(2)和(3), 故本结论成立。证毕

**定理 5** 设  $G$  是一个 3-连通 4-正则非完全图,  $H$  是  $G$  的一个如图 14(a)所示的子图。若  $g_2 \in C_4^G(H)$ , 则  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。

**证明** 在  $g_2$  下,  $g_2(v_1) = g_2(v_2)$ , 若  $C_4^G(H) = \{g_2\}$ , 则说明  $\forall f \in C_4(G)$ , 均有  $f(v_1) = f(v_2)$ , 由引理 10 知,  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。下面考察  $C_4^G(H) \supset \{g_2\}$  的情况。

由引理 10 知,  $f_2$  与  $f_1$ ,  $f_3 \sim f_{11}$  是 Kempe 等价的, 且由引理 11 知,  $f_2$  与  $f_{12} \sim f_{14}$  是 Kempe 等价的, 因此,  $C_4(G)$  是一个 Kempe 类。本定理成立。

证毕

采用类似与引理 11 及定理 5 中给出的证明方法, 可得到如下结论。

**定理 6** 设  $G$  是一个 3-连通 4-正则非完全图,  $H$  是  $G$  的一个如图 14(a)所示的子图。若  $g_3$ ,  $g_6$  或  $g_{10}$  属于  $C_4^G(H)$ , 则  $C_4(G)$  是一个 Kempe 等价类。

## 5 结束语

确定一个  $k$ -色图的  $k$ -着色的 Kempe 等价性一直是图着色理论研究中的难点与热点问题。目前虽然在此领域中已有不少学术论文, 但是, 判断一般  $k$ -色图的  $k$ -着色的 Kempe 等价性, 即使是某一类特殊图, 这个问题仍是非常困难的。本文对 4-正则图着色的 Kempe 等价性展开了研究, 证明了: (1)若  $G$  是 4-正则图, 且含有与 4-轮或近 5-阶完全图同构的子图, 则  $G$  的所有 4-着色是 Kempe 等价的; (2)若  $G$  是一个连通度小于 3 的 4-正则图, 则  $G$  的所有 4-着色是 Kempe 等价的; (3)若  $G$  是一个 3-连通 4-正则

图, 且  $G$  存在一个顶点  $x$  和一个 4-着色  $f$ , 满足  $x$  的邻域中有 3 个或 4 个顶点在  $f$  下着相同颜色, 则  $G$  的所有 4-着色是 Kempe 等价的。基于本文的工作, 我们只需再进一步研究满足如下条件 3-连通 4-正则图  $G$  的 Kempe 等价性: 对于任意的顶点  $x$  及任意的 4-着色  $f$ ,  $x$  的邻域中着相同颜色的顶点数小于 3, 且  $G$  不含与 4-轮或近 5-阶完全图同构的子图, 即可获得一般 4-正则图着色的 Kempe 等价性的结论。

## 参考文献

- [1] KEMPE A B. On the geographical problem of the four colors[J]. *American Journal of Mathematics*, 1879, 2(3): 193-200. doi: 10.2307/2369235.
- [2] MUHLENTHALER M and WANKA R. The connectedness of clash-free timetables[C]. 10th International Conference of the Practice and Theory of Automated Timetabling, York, United Kingdom, 2014: 26-29.
- [3] WANG J S, SWENDSEN R H, and KOTECKY R. Antiferromagnetic potts models[J]. *Physical Review Letters*, 1989, 63(2): 109-112. doi: 10.1103/PhysRevLett.63.109.
- [4] WANG J S, SWENDSEN R H, and KOTECKY R. Three-state antiferromagnetic potts models: A Monte Carlo study[J]. *Physical Review B*, 1990, 42(4): 2465-2474. doi: 10.1103/PhysRevB.42.2465.
- [5] VIGODA E. Improved bounds for sampling colorings[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2000, 41(3): 51-59. doi: 10.1063/1.533196.
- [6] FISK S. Geometric coloring theory[J]. *Advances in Mathematics*, 1977, 24(3): 298-340. doi: 10.1016/0001-8708(77)90061-5.
- [7] MEYNIEL H. Les 5-colorations d'un graphe planaire forment une classe de commutation unique[J]. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 1978, 24(3): 251-257. doi: 10.1016/0095-8956(78)90042-4.
- [8] MOHAR B. Kempe Equivalence of Colorings[M]. *Graph Theory in Paris*. Birkhäuser Basel, 2006: 287-297. doi: 10.1007/978-3-7643-7400-6\_22.
- [9] VERGNAS M L and MEYNIEL H. Kempe classes and the Hadwiger conjecture[J]. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 1981, 31(1): 95-104. doi: 10.1016/S0095-8956(81)80014-7.
- [10] BERTSCHI M E. Perfectly contractile graphs[J]. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 1990, 50(2): 222-230. doi: 10.1016/0095-8956(90)90077-D.
- [11] MEYNIEL H. The graphs whose odd cycles have at least two chords[J]. *Annals of Discrete Mathematics*, 1984, 88(21): 115-119. doi: 10.1016/S0304-0208(08)72927-X.
- [12] FEGHALI C, JOHNSON M, and PAULUSMA D. Kempe

- equivalence of colourings of cubic graphs[J]. *European Journal of Combinatorics*, 2017, 59(2): 1-10. doi: 10.1016/j.ejc.2016.06.008.
- [13] MCDONALD J, MOHAR B, and SCHEIDE D. Kempe equivalence of edge-colorings in subcubic and subquartic graphs[J]. *Journal of Graph Theory*, 2012, 70(2): 226-239. doi: 10.1002/jgt.20613.
- [14] BELCASTRO S M and HAAS R. Counting edge-Kempe-equivalence classes for 3-edge-colored cubic graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2014, 325(13): 77-84. doi: 10.1016/j.disc.2014.02.014.
- [15] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(2)多米诺构形与扩缩运算[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(6): 1271-1327. doi: 10.11999/JEIT160224.
- XU J. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (2) Domino configurations and extending-contracting operations[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(6): 1271-1327. doi: 10.11999/JEIT160224.
- [16] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(4)  $\sigma$ -运算与Kempe等价类[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(7): 1557-1585. doi: 10.11999/JEIT160483.
- XU J. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (4):  $\sigma$ -operations and Kempe equivalent classes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(7): 1557-1585. doi: 10.11999/JEIT160483.
- [17] BROOKS R L. On colouring the nodes of a network[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1941, 37(2): 194-197. doi: <http://dx.doi.org/10.1017/S030500410002168X>.
- 刘小青: 女, 1986年生, 博士生, 研究方向为图论与组合优化.
- 许进: 男, 1959年生, 教授, 研究方向为图论与组合优化、生物计算机、社交网络与信息安全等.