

# 稀疏信号结构性噪声干扰下的感知矩阵优化

李如春 程云霄\* 覃亚丽

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

**摘要:** 针对具有结构性噪声干扰的稀疏信号处理问题, 该文提出一种基于贝叶斯理论的感知矩阵优化设计方法。结合具有加性干扰的稀疏信号模型, 通过对感知矩阵进行能量约束, 最小化信号的后验协方差矩阵的迹, 实现感知矩阵的优化设计。仿真不同信号稀疏度和重构算法时, 感知矩阵优化对信号重构误差和重构时间的影响; 分析信号先验信息存在偏差时, 感知矩阵优化对重构效果的影响。仿真结果表明, 优化后的感知矩阵能够更好地获取稀疏信号中的重要信息, 信号重构精度的均方误差减小约15~25 dB, 重构时间减少约40%。

**关键词:** 感知矩阵优化; 稀疏贝叶斯理论; 稀疏信号模型; 结构性噪声

中图分类号: TN919.4

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)04-0911-06

DOI: 10.11999/JEIT180513

## Sensing Matrix Optimization for Sparse Signal under Structured Noise Interference

LI Ruchun CHENG Yunxiao QIN Yali

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract:** To solve sparse signal processing problem with structural noise interference, a method of sensing matrix optimization design based on sparse Bayesian theory is proposed. Combining the sparse signal model with additive interference, the design of the sensing matrix is realized by minimizing the trace of the posterior covariance matrix and the energy constraint of sensing matrix. The effects of sensing matrix optimization on the reconstruction error and reconstruction time are simulated using difference sparse signal and reconstruction algorithms, and the effects of the sensing matrix optimization on the reconstruction effect are analyzed when there is a bias in the prior information. The simulation results show that the optimized sensing matrix can obtain the important information in the sparse signal, the mean square error of the signal reconstruction accuracy is reduced by about 15~25 dB, and the reconstruction time is reduced by about 40%.

**Key words:** Sensing matrix optimization; Sparse Bayesian theory; Sparse signal model; Structural noise

### 1 引言

压缩感知(Compressive Sensing, CS)理论<sup>[1]</sup>的核心思想是将信号的采样和压缩合并, 有效解决奈奎斯特采样定理对最低数据采样量的限制问题。贝叶斯压缩感知<sup>[2]</sup>将贝叶斯理论和CS理论相结合, 从统计的角度出发, 结合信号的先验信息, 通过最大似然估计, 迭代优化进行信号的重构。对于雷达等随机信号的稀疏重构, 贝叶斯压缩感知具有利用信号先验信息的优势。

在CS理论中, 信号模型一般不含有干扰噪声,

但在信号处理的一些应用中, 例如通信、雷达和信道估计等, 观测获得的信号往往包含有用信号、干扰噪声以及测量噪声, 应充分考虑存在结构性噪声干扰情况下信号的测量。

测量矩阵的设计和优化在CS理论的研究中至关重要, 目的是更好地获取稀疏信号中的重要信息, 提高重构精度和重构效率。在测量矩阵的优化过程中<sup>[3]</sup>, 常用的衡量测度是测量矩阵与稀疏矩阵乘积列的互相关系数, 即通过降低感知矩阵列的互相关系数实现测量矩阵优化, 获取重要的测量信息。但在贝叶斯压缩感知中, 可以结合随机信号先验信息, 通过最大化后验概率分布, 实现感知矩阵的优化设计。

有关感知矩阵的优化, 前期有诸多文献对此做了相关研究。文献<sup>[4]</sup>将最小化后验协方差的迹等价于最小均方差, 对感知矩阵的行向量进行能量约束,

收稿日期: 2018-05-25; 改回日期: 2018-11-13; 网络出版: 2018-11-22

\*通信作者: 程云霄 com\_xd@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61675184)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61675184)

最小化后验协方差的迹进行感知矩阵的优化,但是未考虑结构性干扰可能造成的影响。文献[5]对感知矩阵进行分块,通过最小化感知矩阵的分块之间相干性和分块内部相干性的加权和进行感知矩阵优化,但是该方法增加运算复杂度,耗时更长。文献[6]采用具有结构性干扰噪声的信号模型,并应用到波达方向追踪上进行仿真分析,但是模型中将信号与干扰矩阵进行独立分析,将两个矩阵并行排列为一个矩阵,这在实际的应用中是很难实现的,从理论上增加数据存储量,对硬件有更高的要求。文献[7]提出一种稀疏贝叶斯学习的稀疏处理方法,通过在已知感知矩阵上叠加满足高斯分布的随机矩阵的方法,降低感知矩阵的扰动对信号测量的影响。该方法虽然对感知矩阵进行了优化设计,但是没有考虑所叠加的随机矩阵的参数与信号各分量先验信息之间的相关性,同时增加运算的复杂度。文献[8]提出一种利用高斯逆伽马分层先验的分层贝叶斯字典学习模型,在字典和噪声方差上也设置适当的非信息先验设计字典,以提高信号表示的稀疏性,以便可以从数据中可靠地估计它们。但是其仅对噪声的先验信息进行了合理的设置,没有考虑信号以及干扰的先验信息对信号稀疏测量以及重构的影响,对先验信息的利用不充分。

在已有的文献研究中,大都没有涉及具有结构性噪声干扰情况下感知矩阵的优化,为此,本文采用具有加性干扰的信号模型,结合稀疏贝叶斯学习理论,通过最小化后验协方差的迹,研究感知矩阵的优化设计。

## 2 信号模型与代价函数

在无噪声条件下,对多组测量向量进行处理时,稀疏贝叶斯理论的信号模型表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{E} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{Y}$  表示  $M \times D$  的测量数据矩阵,  $\mathbf{A}$  表示  $M \times N$  的感知矩阵,  $\mathbf{S}$  为  $N \times D$  的待估计信号矩阵,  $\mathbf{E}$  表示  $M \times D$  的测量噪声矩阵;  $M$  表示测量数,  $N, D$  分别表示信号的长度和维数,且  $M < N$ 。对于具有结构性噪声干扰的信号,需将结构性噪声作为加性干扰进行处理,并与待估信号一起进行压缩测量,因此信号模型表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\mathbf{S} + \mathbf{C}) + \mathbf{E} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{C}$  为  $N \times D$  的结构性干扰噪声矩阵。

在贝叶斯框架中,稀疏问题一般采用高斯先验,因此,需假设式(2)中信号模型所涉及到的随机变量都服从零均值的复高斯分布,并将  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{E}$  的先验信息分别表示为  $N(0, \mathbf{R}_s)$ ,  $N(0, \mathbf{R}_c)$  和  $N(0, \sigma \mathbf{I}_M)$ 。其中,  $\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_c$  为信号和干扰的先验协方差矩

阵,  $\sigma, \mathbf{I}_M$  为测量噪声的方差和维度为  $M$  的单位矩阵。

在感知矩阵设计优化的过程中,假设信号的先验信息是已知的。在高斯假设下,由于得到的目标矩阵的特征值为非负的,所以信号重构误差构成的置信椭圆轴的长度与协方差矩阵的特征值成比例。因此,以最小化后验协方差矩阵的迹为目标,等价于最小化重构的均方误差。由此,对感知矩阵进行能量约束<sup>[4]</sup>的同时,其优化的代价函数可表示为

$$\min \text{tr}(\mathbf{R}_{s/y}), \quad \text{s.t.} \|\mathbf{A}\|_{\text{F}}^2 = P \quad (3)$$

其中,  $\|\cdot\|_{\text{F}}$  表示感知矩阵 Frobenius 范数的能量约束,即对矩阵进行常量约束,  $P$  表示能量大小。通过求解式(3)的代价函数,得到最大化后验分布的优化感知矩阵  $\mathbf{A}$ ,更好地获取稀疏信号中的重要信息,提高信号的重构精度,降低重构时间。

## 3 代价函数求解

为了求解式(3)中的代价函数,由贝叶斯广义线性模型的后验概率分布函数定理<sup>[9]</sup>,后验协方差矩阵  $\mathbf{R}_{s/y}$  表示为

$$\mathbf{R}_{s/y} = \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_s \mathbf{A}^{\text{H}} (\mathbf{A}(\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_c) \mathbf{A}^{\text{H}} + \sigma \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_s \quad (4)$$

令协方差矩阵  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_c$ , 格拉姆矩阵  $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{A}$ , 其秩表示为  $\text{rank}(\mathbf{G}) = K$ , 由于初始的感知矩阵为随机矩阵,  $\mathbf{A}^{\text{H}}$  和  $\mathbf{A}$  相互正交,则  $K = M$ 。由 Woodbury 恒等式<sup>[10]</sup>和 Searle 等式<sup>[10]</sup>可得

$$\mathbf{R}_{s/y} = \mathbf{R}_s - \frac{\mathbf{R}_s}{\sigma} \left( \mathbf{I}_N + \mathbf{G} \frac{\mathbf{R}}{\sigma} \right)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}_s \quad (5)$$

由于感知矩阵的能量约束,定义感知矩阵  $\mathbf{A}$  的解空间表示为  $\{\mathbf{A} : (\|\mathbf{A}\|_{\text{F}}^2 \leq P)\}$ , 由于  $\|\mathbf{A}\|_{\text{F}}^2 = \text{tr}(\mathbf{A}^{\text{H}} \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{G})$ , 所以感知矩阵的解空间可以由格拉姆矩阵  $\mathbf{G}$  的特征向量的线性组合构成。同时,为了将信号各分量的先验信息有效地利用到感知矩阵的设计中,理想条件下矩阵  $\mathbf{G}$  的特征向量应该通过信号协方差矩阵  $\mathbf{R}_s$  生成的信号空间产生,但由于干扰的存在不能仅单独考虑信号空间,这也会影响优化问题的求解,所以要将解空间投影在协方差矩阵  $\mathbf{R}$  的空间,令格拉姆矩阵  $\mathbf{G}$  的特征向量与协方差矩阵  $\mathbf{R}$  的特征向量相同。

因此,分别对协方差矩阵  $\mathbf{R}$  和格拉姆矩阵  $\mathbf{G}$  进行特征分解

$$\mathbf{R} = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^{\text{H}}, \mathbf{G} = \mathbf{U} \mathbf{Q} \mathbf{U}^{\text{H}} \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{V}$  是由  $\mathbf{R}$  的特征向量组成的  $M \times M$  的矩阵,  $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_M\}$  是由  $\mathbf{R}$  的特征值组成的  $M \times M$  的对角矩阵。  $\mathbf{U}$  是由  $\mathbf{G}$  的特征向量组成的  $M \times K$  的矩阵,  $\mathbf{Q} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K\}$  是由

$\mathbf{G}$ 的特征值组成 $K \times K$ 的对角矩阵。由于特征向量相同，矩阵维度不同，不妨设矩阵 $\mathbf{U}$ 是矩阵 $\mathbf{V}$ 的列的子集，矩阵 $\mathbf{U}$ 的列元素等于 $\mathbf{V}$ 的前 $K$ 列。因此

$$\mathbf{R}_{s/y} = \mathbf{R}_s - \frac{\mathbf{R}_s}{\sigma} \mathbf{U} \left[ \mathbf{I}_M - \left( \mathbf{I}_M + \mathbf{Q} \mathbf{U}^H \frac{\mathbf{R}}{\sigma} \mathbf{U} \right)^{-1} \cdot \mathbf{Q} \mathbf{U}^H \frac{\mathbf{R}}{\sigma} \mathbf{U} \right] \mathbf{Q} \mathbf{U}^H \mathbf{R}_s \quad (7)$$

由于特征向量矩阵 $\mathbf{U}$ 为矩阵 $\mathbf{V}$ 的子集，所以 $\mathbf{U}^H$ 和 $\mathbf{V}$ ， $\mathbf{V}^H$ 和 $\mathbf{U}$ 相互正交，式(7)可表示为

$$\mathbf{U}^H \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^H \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^H \mathbf{U} = (\mathbf{I}_K \mathbf{0}) \mathbf{D} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_K \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_K\} \quad (8)$$

为简化推导过程，定义

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{U}^H \mathbf{R} \mathbf{U} = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_K\} \quad (9)$$

将 $\mathbf{R}_{s/y}$ 表示为

$$\mathbf{R}_{s/y} = \mathbf{R}_s - (\mathbf{R}_s/\sigma) \mathbf{U} \mathbf{X} \mathbf{U}^H \mathbf{R} \quad (10)$$

其中， $\mathbf{X}$ 为 $K \times K$ 对角矩阵，表示为

$$\mathbf{X} = \left[ \mathbf{I}_K - \left( \mathbf{I}_K + \mathbf{Q} \frac{\tilde{\mathbf{D}}}{\sigma} \right)^{-1} \mathbf{Q} \frac{\tilde{\mathbf{D}}}{\sigma} \right] \mathbf{Q} \quad (11)$$

其对角线元素为

$$\mathbf{X}_{kk} = (\sigma \lambda_k) / (\sigma + d_k \lambda_k) \quad (12)$$

根据以上定义，式(3)的代价函数表示为

$$\text{tr}(\mathbf{R}_{s/y}) = \text{tr}(\mathbf{R}_s) - \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\sigma + d_k \lambda_k} t_k \quad (13)$$

其中， $t_k = \|\mathbf{v}_k\|_2^2$ ， $\mathbf{v}_k$ 表示矩阵 $\mathbf{R}_s \mathbf{V}$ 的第 $k$ 列，上述推导过程将代价函数最小化的问题转化为格拉姆矩阵 $\mathbf{G}$ 的特征值矩阵的优化问题。根据前面提到的受限解空间，定义

$$\min_{\mathbf{A}} \text{tr}(\mathbf{R}_{s/y}), \quad \text{s.t.} \sum_{k=1}^K \lambda_k = P, \lambda_k \geq 0 \forall k \quad (14)$$

为了求解上述问题，引入拉格朗日方程式

$$\Gamma = \text{tr}(\mathbf{R}_{s/y}) + \alpha \left( P - \sum_{k=1}^K \lambda_k \right) + \sum_{k=1}^K \mathbf{v}_k \lambda_k \quad (15)$$

其中， $\alpha$ 表示拉格朗日算子，利用Karusa-Kuan-Tucker (KKT)优化条件<sup>[1]</sup>求解式(15)，优化条件表示为：对于所有的 $k = 1, 2, \dots, K$ ，式(16)的条件都成立

$$\nabla \Gamma = 0, \mathbf{v}_k \geq 0, \lambda_k \geq 0, \mathbf{v}_k \lambda_k = 0, P - \sum_{k=1}^M \lambda_k = 0 \quad (16)$$

求解可得

$$\mathbf{v}_k = \alpha + \partial \text{tr}(\mathbf{R}_{s/y}) / \partial \lambda_k \quad (17)$$

其中，

$$\frac{\partial \text{tr}(\mathbf{R}_{s/y})}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \left[ \text{tr}(\mathbf{R}_s) - \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k}{\sigma + d_k \lambda_k} t_k \right] = -t_k \sigma / (\sigma + d_k \lambda_k)^2 \quad (18)$$

根据式(16)，式(17)，式(18)，如果拉格朗日

乘数 $\alpha = \frac{t_k \sigma}{(\sigma + d_k \lambda_k)^2}$ ，则 $\lambda_k = \frac{\sigma}{d_k} \left( \sqrt{\frac{t_k}{\sigma \alpha}} - 1 \right)$ ；

如果 $\alpha > \frac{t_k \sigma}{(\sigma + d_k \lambda_k)^2}$ ， $\lambda_k$ 一定等于0，所以

$$\lambda_k = \max \left\{ 0, \frac{\sigma}{d_k} \left( \sqrt{\frac{t_k}{\sigma \alpha}} - 1 \right) \right\} \quad (19)$$

为得到更少测量数的感知矩阵，假设优化的感知矩阵 $\mathbf{A}$ 的测量数为 $L$ ，且 $L \leq M$ ， $P - \sum_{i=1}^L \lambda_i = 0$ ，由式(19)可得

$$\alpha = \left( \sum_{i=1}^L \sqrt{\frac{t_i}{\sigma}} \frac{\sigma}{d_i} \right)^2 / \left( \sum_{i=1}^L \frac{\sigma}{d_i} + P \right)^2 \quad (20)$$

为获得测量数 $L$ 的大小，假设 $t_k$ 为递减，从 $L = M$ 开始，计算 $\alpha$ 和 $\lambda_L$ 。如果 $\lambda_L$ 是负数，令 $\lambda_L = 0$ ；如果 $\lambda_L > 0$ ，保持 $\lambda_L$ 的值不变，并令 $L = M - 1$ ，重复计算过程，依次计算 $\lambda_L$ 直到 $L = 1$ 。得到 $\mathbf{G}$ 的最优化特征值为

$$\lambda_l = \begin{cases} \frac{t_l}{d_l} \frac{\sum_{i=1}^L \frac{\sigma}{d_i} + P}{\sum_{i=1}^L \frac{t_i}{d_i}} - \frac{\sigma}{d_l}, & 1 \leq l \leq L \\ 0, & L < l < M \end{cases} \quad (21)$$

最优的大小为 $L \times N$ 的感知矩阵 $\mathbf{A}$ ，可以通过 $\mathbf{G}$ 的 $L$ 个最优特征值及其对应的 $\mathbf{R}$ 的特征向量来获得，表示为

$$\mathbf{A} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_L}\} \mathbf{V}_{1:L}^H \quad (22)$$

在上述推导过程中，能量约束条件 $P$ 的值会影响 $L$ 的大小，本文后续将讨论能量约束和对应测量数 $L$ 的关系。同时，上述优化过程假设 $\mathbf{R}_s$ ， $\mathbf{R}_c$ 和 $\sigma$ 作为已知参数，在实际应用中可以根据之前的观测数据估计或训练得到。

#### 4 测量数优化

在式(21)中，测量数 $L$ 的值会随着能量 $P$ 的增加而增加，并最终趋近初始的测量数 $M$ ，这会导致冗余的数据处理和更多的重构时间，因此需要求解最优的测量数 $L$ 。

令 $\lambda_{L+1}, \lambda_{L+2}, \dots, \lambda_M$ 为0, 并计算该条件下能量约束 $P$ 的值, 记为 $P_L$ . 可表示为

$$P_L = \sum_l^L \lambda_l \quad (23)$$

由式(19)代价函数可以表示为

$$\text{tr}(\mathbf{R}_{s/y}) = \text{tr}(\mathbf{R}_s) - \sum_{l=1}^L \frac{t_l}{d_l} + \frac{\sum_{i=1}^L \frac{\sigma}{d_i} \sum_{i=1}^L \frac{t_i}{d_i}}{\sum_{i=1}^L \frac{\sigma}{d_i} + P} \quad (24)$$

由式(24), 当 $P \rightarrow 0$ 时 $\text{tr}(\mathbf{R}_{s/y}) = \text{tr}(\mathbf{R}_s)$ , 当 $P \rightarrow \infty$ 时

$$\text{tr}(\mathbf{R}_{s/y}) = \text{tr}(\mathbf{R}_s) - \sum_{l=1}^L \frac{t_l}{d_l} \quad (25)$$

为获得尽可能小的测量数 $L$ , 同时最小化代价函数, 需要采用多变量自适应回归曲线<sup>[11]</sup> (Multivariate Adaptive Regression Splines, MARS)的方法, 确定不同的能量约束对应的 $P$ 值和代价函数, 得到仿真结果如图1所示。

从图1中可以看出, 随能量 $P$ 增加,  $L$ 随之增加, 代价函数则随之减小, 在增加到初始测量数之前, 代价函数已经降低到最小, 之后的测量数增加也不会影响代价函数的值。

## 5 仿真结果及分析

根据本文前述的具有结构性噪声的贝叶斯压缩感知模型以及感知矩阵优化方法, 下面利用合成数据进行仿真验证。在仿真过程中, 设定信号矩阵 $\mathbf{S}$ 的长度 $N = 60$ , 维数 $D = 10$ ; 测量矩阵 $\mathbf{Y}$ 的测量数 $M = 30$ , 结构性干扰矩阵 $\mathbf{C}$ 和噪声矩阵 $\mathbf{E}$ 具有与信号分量相同的大小; 信干比表示为 $10 \lg P_s/P_c$ , 其中 $P_s = \|\mathbf{S}\|_2^2$ ,  $P_c$ 由对应的信干比获得; 假设先验信息 $\mathbf{R}_s$ ,  $\mathbf{R}_c$ 和 $\sigma$ 已知, 其中 $\mathbf{R}_s$ 可以通过信号估计和数据训练的方式获得,  $\mathbf{R}_c = P_c \mathbf{I}_N$ ,  $\sigma = P_c/10$ 。

由于随机矩阵在稀疏表示方面具有普适性, 仿

真时感知矩阵取随机矩阵作为初始矩阵, 即假设 $\mathbf{A}$ 满足概率密度为 $N(0, 1)$ 的复高斯分布, 并进行归一化处理。为使仿真结果更具准确性, 采用蒙特卡罗模拟对不同的信干比进行200次的仿真, 求其平均值作为最终的仿真结果。硬件平台选用主频2.40 GHz的intel酷睿i3系列CPU计算机, 软件平台选择64位Matlab R2015b。

### 5.1 不同信号稀疏度时, 感知矩阵优化对信号重构的影响

信号矩阵 $\mathbf{S}$ 每一列非零元素的个数体现了信号的稀疏度, 为分析不同信号稀疏度时感知矩阵优化对信号重构精度的影响, 实验采用稀疏贝叶斯学习(SBL)重构算法, 仿真结果如图2所示。图2中, 均方误差(Mean Square Error, MSE)表示为 $\|\mathbf{S}_X - \mathbf{S}\|_2^2 / \mathbf{S}_X$ , 其中 $\mathbf{S}_X$ 表示重构信号,  $\mathbf{S}$ 表示原始信号。后续为了方便分析优化带来的性能改善, 本文将均方误差以分贝为单位进行表述。

从图2可以看出, 不论感知矩阵是否有优化, 随着稀疏度的增加, 重构性能均随之下降, 符合压缩感知信号重构的一般规律。但是, 在信号的各种稀疏度下, 相较于随机矩阵, 感知矩阵优化后的重构误差均有明显提高, 重构的均方误差大约减少27 dB。

### 5.2 不同重构算法时, 感知矩阵优化对信号重构的影响

为了分析优化后的感知矩阵应用的普适性, 本文仿真比较了不同重构算法的重构均方误差, 仿真结果如图3所示。图3中, 分别采用基于稀疏贝叶斯的SBL重构<sup>[12]</sup>算法。和快速贝叶斯匹配追踪<sup>[13]</sup> (Fast Bayesian Matching Pursuit, FBMP)算法、贪婪追踪算法中的正交匹配追踪<sup>[14]</sup> (Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法、基于 $l_1$ 范数的全变差<sup>[15]</sup> (Total Variation, TV)算法。

从图3可以看出, 感知矩阵优化后, 所有算法的重构误差均减小, 其中SBL算法的重构误差降低最为明显, 大约减少15 dB。这是因为SBL算法除了能够利用优化的感知矩阵, 还能利用信号的先验

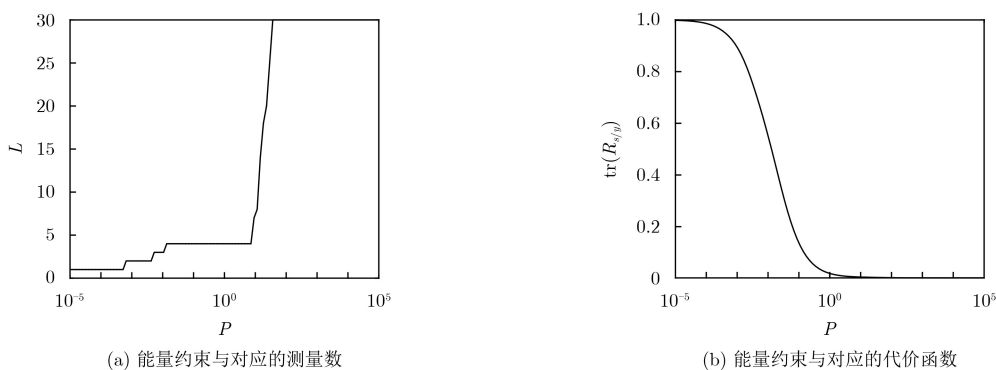


图1 能量约束分析

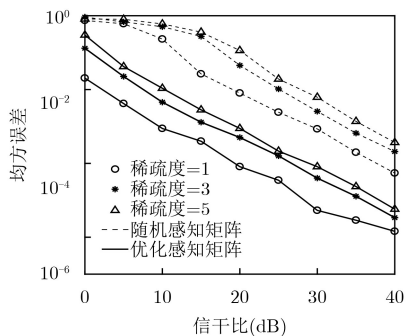


图2 稀疏度分析

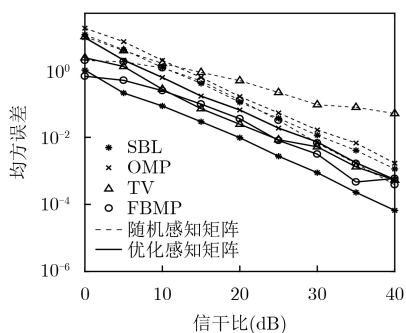


图3 不同重构算法的重构误差对比

信息进行参数估计，由此产生更好的重构效果。

另外，使用优化的感知矩阵进行信号重构所需的处理时间也有所降低，仿真结果如图4所示。由图4可知，OMP重构算法由于重构时间较短，优化前后的处理时间曲线基本重合；其余的除TV算法以外，感知矩阵优化后的重构时间均有所降低，性能最优越的SBL算法，减少约40%的处理时间。这主要是由于感知矩阵优化后，信号的测量数量降低，故运算时间减少。而TV算法由于优化的感知矩阵与待估信号有更强的相关性，稀疏重构信号时梯度收敛速度降低，迭代次数增多，导致运算时间增加。

### 5.3 先验信息有偏差时，感知矩阵优化对信号重构的影响

在前述感知矩阵的优化过程中，本文假设信号各分量的先验信息都是已知的。在一些实际的应用

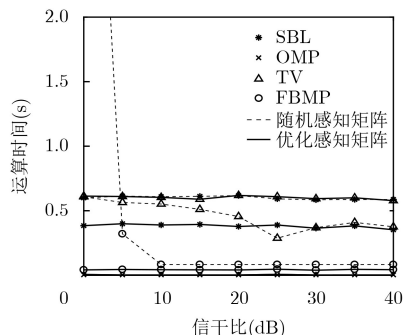


图4 不同重构算法的重构时间对比

中，先验信息一般需要通过统计估计和数据训练获得，并且得到的先验信息一般存在偏差，其精确度会影响感知矩阵的优化设计，从而影响信号重构的效果。下面分析式(2)的信号模型中，各分量先验信息对感知矩阵优化设计的影响。采用SBL重构算法，通过信号重构误差分析其影响。

信号分量作为待估计的部分，其先验信息 $R_s$ 对重构性能最具影响。在精确的先验信息上添加非零均值的高斯分布，定义偏差值 $\delta$ 为高斯分布的均值，分别取0.5, 1.0和1.5，重构的仿真结果如图5所示。从图中可知，在信干比较小时，先验信息的偏差会导致重构精度波动，但相对稳定，并能保证优化后重构性能的提高；如果信干比较大，则先验信息的一些偏差值会导致重构误差出现跳变，需要尽可能精确地获取信号的先验信息。

同样对干扰分量进行偏差的设置，对干扰分量的先验信息 $R_c$ 上叠加随机高斯分布，定义偏差值 $\theta$ 为随机高斯分布的方差，分别取0.1, 0.5和1.0，得到图6所示的仿真结果。从图中可知，当方差在一定范围内增大时，重构性能会随之降低，但相较于没有优化的随机矩阵仍有重构性能的改善。

最后，分析噪声的先验误差对重构性能的影响，分别利用不同倍率的噪声先验方差值进行仿真，定义偏差值 $\gamma$ 为倍率，分别取0.1, 10.0和100.0，重构仿真结果如图7所示。从图中可知，不同倍率的先验方差获得的重构误差曲线与精确的 $\sigma$ 的重构误差

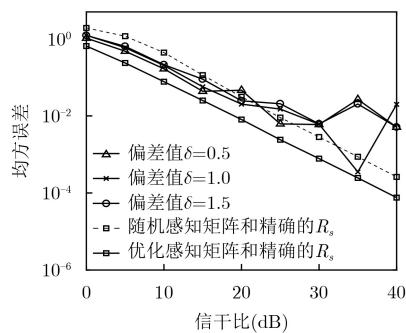


图5 信号先验信息精确度对重构性能影响

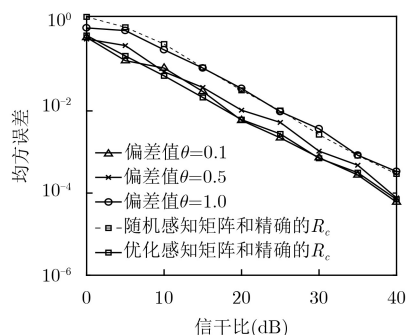


图6 干扰先验信息精确性对重构性能影响

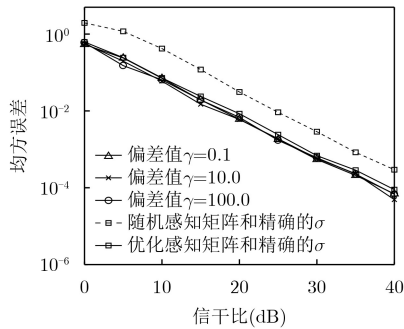


图7 噪声分量先验信息精确性对重构性能的影响

曲线基本重合, 噪声的先验信息对重构性能影响很小。这是由于在式(2)的稀疏信号模型中, 噪声是独立于信号测量过程的, 所以其波动对重构结果影响较小。

## 6 结论

本文利用贝叶斯压缩感知, 建立具有结构性干扰噪声的稀疏信号测量模型, 结合信号的先验信息, 通过对感知矩阵进行能量约束, 最小化信号的后验协方差矩阵迹作为代价函数, 并求解得到对应格拉姆矩阵的优化特征值, 由此获得优化的感知矩阵。本文仿真分析不同信号稀疏度和重构算法时, 优化感知矩阵对信号重构误差的影响; 分析比较感知矩阵优化前后, 信号先验信息偏差对重构效果的影响。仿真结果表明: 在不同的信号稀疏度时, 感知矩阵优化使信号重构误差减少约27 dB; 采用不同的重构算法时, 感知矩阵的优化使信号的重构误差减少约15 dB, 对于性能最优越的SBL算法, 同时减少约40%的处理时间; 信号、干扰、噪声先验信息的偏差对重构性能的影响依次降低, 重构效果对信号分量先验信息的准确性有一定的依赖性, 整体的优化效果具有鲁棒性。

## 参考文献

- [1] FOUCART S. Flavors of compressive sensing[C]. International Conference Approximation Theory, San Antonio, USA, 2016: 61–104. doi: [10.1007/978-3-319-59912-0\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-59912-0_4).
- [2] NOUASRIA H and ET-TOLBA M. A novel sensing matrix for cluster structured sparse signals[C]. International Wireless Communications and Mobile Computing Conference, Valencia, Spain, 2017: 998–1003. doi: [10.1109/IWCMC.2017.7986422](https://doi.org/10.1109/IWCMC.2017.7986422).
- [3] JI Shihao, XUE Ya, and CARIN L. Bayesian compressive sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2346–2356. doi: [10.1109/TSP.2007.914345](https://doi.org/10.1109/TSP.2007.914345).
- [4] FUHRMANN D R. One-step optimal measurement selection for linear Gaussian estimation problems[C]. International Waveform Diversity and Design Conference. Pisa, Italy, 2007: 224–227. doi: [10.1109/WDDC.2007.4339415](https://doi.org/10.1109/WDDC.2007.4339415).
- [5] ZELNIK-MANOR L, ROSENBLUM K, and ELDAR Y C. Sensing matrix optimization for block-sparse decoding[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(9): 4300–4312. doi: [10.1109/TSP.2011.2159211](https://doi.org/10.1109/TSP.2011.2159211).
- [6] DAS A. A Bayesian sparse-plus-low-rank matrix decomposition method for direction-of-arrival tracking[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2017, 17(15): 4894–4902. doi: [10.1109/JSEN.2017.2715347](https://doi.org/10.1109/JSEN.2017.2715347).
- [7] NANNURU S, GERSTOFT P, and GEMBA K L. Sparse Bayesian learning with uncertain sensing matrix[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, New Orleans, USA, 2017: 3964–3968. doi: [10.1109/ICASSP.2017.7952900](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2017.7952900).
- [8] YANG Linxiao, FANG Jun, and LI Hongbin. Sparse Bayesian dictionary learning with a Gaussian hierarchical model[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Shanghai, China, 2016: 2564–2568. doi: [10.1109/ICASSP.2016.7472140](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2016.7472140).
- [9] FISHER R A S. Theory of Statistical Estimation[M]. Institute of Mathematics, University of Tsukuba, 2008: 51–65.
- [10] PETERSEN K B and PEDERSEN M S. The Matrix Cookbook[M]. Technical University of Denmark, 2008: 18–19.
- [11] BOYD S and VANDENBERGHE L. Convex Optimization[M]. World Book Inc, 2013: 243–249.
- [12] WIPF D P and RAO B D. Sparse Bayesian Learning for basis selection[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(8): 2153–2164. doi: [10.1109/TSP.2004.831016](https://doi.org/10.1109/TSP.2004.831016).
- [13] SCHNITER P, POTTER L C, and ZINIEL J. Fast Bayesian matching pursuit[C]. Information Theory and Applications Workshop, San Diego, USA, 2008: 326–333. doi: [10.1109/ITA.2008.4601068](https://doi.org/10.1109/ITA.2008.4601068).
- [14] TROPP J A and GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655–4666. doi: [10.1109/TIT.2007.909108](https://doi.org/10.1109/TIT.2007.909108).
- [15] KAMILOV U. Parallel proximal algorithm for anisotropic total variation minimization[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2016, 26(2): 539–548. doi: [10.1109/TIP.2016.2629449](https://doi.org/10.1109/TIP.2016.2629449).

李如春: 女, 1968年生, 副教授, 研究方向为多媒体信号处理。

程云霄: 男, 1994年生, 硕士生, 研究方向为压缩感知信号处理。

覃亚丽: 女, 1963年生, 教授, 研究方向为光学信号处理。