基于最优索引广义正交匹配追踪的非正交多址系统多用户检测

申 滨* 吴和彪 崔太平 陈前斌

(重庆邮电大学通移动通信重点实验室 重庆 400065)

摘 要：作为5G的关键技术之一，非正交多址(NOMA)通过非正交方式访问无线通信资源，以实现提高频谱利用率、增加用户连接数的目的。该文提出将压缩感知(CS)及广义正交匹配追踪(gOMP)算法引入上行免调度NOMA系统，从而增强NOMA系统活跃用户检测及数据接收的性能。通过每次迭代识别多个索引，gOMP算法实际上是传统的正交匹配追踪(OMP)算法的扩展。为了获得最优性能，研究分析了在gOMP算法信号重构的每次迭代中所应选择的最优索引数目。仿真结果表明：与其它的贪婪追踪算法及梯度投影稀疏重构(GPSR)算法相比，最优索引gOMP算法具有更优异的信号重构性能；并且，对于不同的活跃用户数或过载率等参数配置的NOMA系统，均表现出最优的多用户检测性能。

关键词：多用户检测；免调度非正交多址；压缩感知；广义正交匹配追踪；最优索引数目

中图分类号：TN929.5 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2020)03-0621-08

DOI: 10.11999/JEIT190270

An Optimal Number of Indices Aided gOMP Algorithm for Multi-user Detection in NOMA System

SHEN Bin WU Hebiao CUI Taiping CHEN Qianbin

(*Key Laboratory of Mobile Communications*, *Chongqing University of Posts and Telecommunications*, *Chongqing* 400065, *China*)

Abstract: As one of the key 5G technologies, Non-Orthogonal Multiple Access (NOMA) can improve spectrum efficiency and increase the number of user connections by utilizing the resources in a non-orthogonal manner. In the uplink grant-free NOMA system, the Compressive Sensing (CS) and generalized Orthogonal Matching Pursuit (gOMP) algorithm are introduced in active user and data detection, to enhance the system performance. The gOMP algorithm is literally generalized version of the Orthogonal Matching Pursuit (OMP) algorithm, in the sense that multiple indices are identified per iteration. Meanwhile, the optimal number of indices selected per iteration in the gOMP algorithm is addressed to obtain the optimal performance. Simulations verify that the gOMP algorithm with optimal number of indices has better recovery performance, compared with the greedy pursuit algorithms and the Gradient Projection Sparse Reconstruction (GPSR) algorithm. In addition, given different system configurations in terms of the number of active users and subcarriers, the proposed gOMP with optimal number of indices also exhibits better performance than that of the other algorithms mentioned in this paper.

Key words: Multi-user detection; Grant-free Non-Orthogonal Multiple Access (NOMA); Compressive Sensing (CS); Generalized Orthogonal Matching Pursuit (gOMP); Optimal number of indices

1 引言

在频谱资源日益缺乏的情况下，如何提高频谱利用率及增加用户连接数成为5G无线网络的一个研究方向[1–3]。近年来，业界提出了非正交多址(Non-Orthogonal Multiple Access, NOMA)的创新概念，以支持比可用的正交时域、频域或码域资源的数量更多的用户[2]。NOMA的核心思想是通过码域或功率域的复用让更多的用户共享相同的时频资源，即通过业务过载机制，提高频谱利用率[2,4]。

当前大多数的无线通信系统中，即使在繁忙时段活跃用户一般也不会超过总用户的10%，即用户的活动是稀疏的[5]。对于5G系统的大规模连接场

收稿日期：2019-04-18；改回日期：2019-07-28；网络出版：2019-07-31
*通信作者： 申滨 shenbin@cqupt.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(61571073)
Foundation Item: The National Nature Science Foundation of China (61571073)

景，这一特性也同样适用，在本质上适于采用压缩感知(Compressive Sensing, CS)[6]的方法进行信号处理。在上行免调度NOMA系统中，用户可以在任何时隙向基站发送数据而不需要复杂的调度过程，较大地减少传输时延，节约信令开销[7]。在该系统中，由于用户的活动是稀疏的，充分满足CS理论中原始信号为稀疏信号的应用条件，激发了研究者利用CS信号重构算法实现多用户检测[8]。

CS信号重构算法大致分为3种类型：第1类是贪婪追踪算法，通过贪婪迭代的方法来更新支撑集，逐步逼近原始解，如正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)[9]算法、正则化正交匹配追踪(Regularized Orthogonal Matching Pursuit, ROMP)[10]算法、子空间追踪(Subspace Pursuit, SP)[11]算法、压缩采样匹配追踪(Compressive Sampling Matching Pursuit, CoSaMP)[12]算法、广义正交匹配追踪(generalized Orthogonal Matching Pursuit, gOMP)[13]算法、动态压缩感知(Dynamic Compressive Sensing, DCS)[14]算法等，该类算法对重构精度的要求居中，且复杂度较低。第2类是凸松弛算法，通过将非凸的l_0范数($\boldsymbol{x}$是向量，$\|\boldsymbol{x}\|_0$表示$\boldsymbol{x}$中非0元素的个数)优化问题转化为凸的l_1范数$\left(\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_i |x_i|\right)$优化问题求解，如梯度投影稀疏重构(Gradient Projection Sparse Reconstruction, GPSR)[15]算法、内点(Interior Point)法等，该类算法对信号的重构精度较高，但收敛速度较慢，计算复杂度较高。第3类是组合算法，通过分组测试来快速重建原始信号，如傅里叶采样、链式追踪算法等，该类算法运算效率高，但复杂度较高。

目前，将CS与NOMA系统多用户检测问题相结合的研究主要包括：结构化迭代支撑的检测算法(Structured Iterative Support Detection, SISD) [16]，通过利用NOMA系统中用户活动的固有结构稀疏性，以实现联合用户活动和数据检测；DCS算法[14]，通过利用活跃用户集的时间相关性，在几个连续时隙中实现用户活动和数据检测；联合近似消息传递(Approximation Message Passing, AMP)和期望最大化算法(Expectation Maximization, EM) [17]，不仅利用了用户活动的帧结构化稀疏特性，而且还利用了传输的离散符号的先验信息，以实现用户活动和数据检测；交替方向乘子法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)[18]，利用发送符号估计和活跃用户集作为“先验信息”，其可以从先前的迭代中获得，以改善多用户检测性能。

针对上行免调度NOMA系统的活跃用户检测及数据接收的问题，本文提出采用CS及gOMP算法，增强系统BER性能。同时，在gOMP算法引入了每次迭代中所应该选择的最优索引数目，更进一步提高检测性能。与其它的贪婪追踪算法及GPSR算法相比，最优索引gOMP算法具有更优异的重构性能。最后，考虑活跃用户数量以及系统过载率对检测性能的影响，也通过仿真实验给出了相应的结果及分析。

2 系统模型

考虑上行NOMA系统，其中有1个基站和K个用户，基站和用户都配置单天线[14,16,17]。经过信道编码及调制获得活跃用户k的传输符号x_k，非活跃用户的传输符号为0。用户k的传输符号x_k被调制到长度为N的扩频序列$\boldsymbol{s}_k=[s_{1,k},s_{2,k},\cdots,s_{N,k}]^{\mathrm{T}}$上，利用用户的低活跃性这一特性，可以设计扩频序列的长度小于总用户数量[19]，即$N<K$，然后将所有用户的信号叠加在一起并利用N个正交的OFDM子载波进行传输。基站端的接收信号可表示为

$$\boldsymbol{y}=\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{s}_k x_k+\boldsymbol{v} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_N]^{\mathrm{T}}$是对应的$N$个子载波上的接收信号，$\boldsymbol{s}_k$是第$k$个用户的扩频序列，$\boldsymbol{v}$是$N$个子载波上对应的0均值、方差为$\sigma^2$的复高斯噪声向量，$\boldsymbol{H}_k$是一个$N\times N$的对角矩阵，且

$$\boldsymbol{H}_k=\mathrm{diag}(\boldsymbol{h}_k) \tag{2}$$

$\boldsymbol{h}_k=[h_{1,k},h_{2,k},\cdots,h_{N,k}]^{\mathrm{T}}$是用户$k$在$N$个子载波上的信道增益。采用更紧凑的数学表达式，式(1)可表示为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v} \tag{3}$$

$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{s}_2,\cdots,\boldsymbol{H}_K\boldsymbol{s}_K]$是$N\times K$的等效信道矩阵，融合了信道增益和扩频信息，传输信道为瑞利衰落信道，等效信道矩阵$\boldsymbol{H}$中各元素$[\boldsymbol{H}]_{n,k}$为相互独立、概率特性服从0均值和单位方差的复高斯随机变量[14,16]。$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_K]^{\mathrm{T}}$是$K$个用户的传输信号向量，由于在同一时刻用户的活动状态是稀疏的，即K个用户的传输信号向量$\boldsymbol{x}$是稀疏向量。因此，NOMA检测的核心任务是在给定的信号接收向量$\boldsymbol{y}$和等效信道矩阵$\boldsymbol{H}$的情况下，对K个用户的发送信号$\boldsymbol{x}$进行估计检测。

3 压缩感知重构算法

压缩感知是一种寻找欠定线性方程(在联立的方程组中，未知变量个数多于方程个数)稀疏解的技术，广泛应用于信号处理中，用于获取和重构稀疏的信号。

3.1 压缩感知理论

假设有一个任意信号$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^K$，可用$K \times 1$维的基向量$\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{b}_k \,|k = 1, 2, \cdots, K\,\}$线性组合来表示

$$x = \sum_{k=1}^{K} \theta_k \boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta} \tag{4}$$

其中，$\theta_k = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_k \rangle$为投影系数，$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示内积，$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$为投影系数矢量，$\boldsymbol{B}$为正交基。当$\boldsymbol{\theta}$满足$\|\boldsymbol{\theta}\|_0 = S(S \ll K)$时，称信号$\boldsymbol{x}$是$S$稀疏的，其中$\|\boldsymbol{\theta}\|_0$表示向量$\boldsymbol{\theta}$的0范数，即$\boldsymbol{\theta}$中非0元素的个数。

本文中信号$\boldsymbol{x}$在$\boldsymbol{B}$域上是S稀疏的(当$\boldsymbol{x}$本身是S稀疏时，令$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$即可)，此时可以利用一个与$\boldsymbol{B}$不相关的矩阵$\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{R}^{N \times K}$对信号$\boldsymbol{x}$进行线性测量，得到测量向量$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^N$为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{v}$为噪声(当信号不含噪声时，令$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$即可)，$\boldsymbol{H}$称为观测矩阵。

式(5)与式(3)相对应，由于测量向量$\boldsymbol{y}$的维数小于信号$\boldsymbol{x}$的维数，导致式(5)有无穷多个解，很难从测量向量$\boldsymbol{y}$中重构出原始信号$\boldsymbol{x}$。传统的信号检测算法如最小二乘(Least Squares, LS)和最小均方误差(Minimum Mean Square Error, MMSE)均不能直接应用到方程中并重构$\boldsymbol{x}$，然而，可将压缩感知重构算法应用到式(3)中并重构$\boldsymbol{x}$。

在压缩感知理论中，如果矩阵$\boldsymbol{H}$满足限制等容条件(Restricted Isometry Property, RIP)[11]，即存在一个参数$\delta \in (0, 1)$使得对于任何一个稀疏度为S的信号$\boldsymbol{x}(\|\boldsymbol{x}\|_0 \le S)$，满足

$$(1 - \delta)\,\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \le \|\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|_2^2 \le (1 + \delta)\,\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \tag{6}$$

其中，$\|\boldsymbol{x}\|_2$表示$\boldsymbol{x}$的欧几里德范数。若矩阵$\boldsymbol{H}$满足S阶RIP，则稀疏信号$\boldsymbol{x}$可以通过测量向量$\boldsymbol{y}$实现高概率重构。已有研究表明，高斯随机矩阵是普适的压缩感知测量矩阵，基于伪随机噪声序列的Toeplitz矩阵可以以很高的概率满足RIP[11]。

3.2 OMP重构算法

将稀疏信号重构视为稀疏近似是一种常用方法。OMP作为贪婪追踪算法类的代表方法，可将OMP算法应用到式(3)中并重构$\boldsymbol{x}$。由于信号$\boldsymbol{x}$仅有S个非0元素，测量向量$\boldsymbol{y}$是矩阵$\boldsymbol{H}$的S列的线性组合。为了重构信号$\boldsymbol{x}$，需要确定矩阵$\boldsymbol{H}$的哪些列与测量矢量$\boldsymbol{y}$有关。在每次迭代中使用贪婪规则从矩阵$\boldsymbol{H}$中选择与残差最大相关的一列(识别)，然后将这一列的索引添加到当前信号$\boldsymbol{x}$估计的支撑集(向量$\boldsymbol{x}$的非0元素的索引集合)中，迭代地执行此过程，直到找到当前信号$\boldsymbol{x}$的所有正确支撑集，将矩阵$\boldsymbol{H}$用列表示为$\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_K$。

OMP算法流程主要包括以下6部分：

(1) 初始化，残差$\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{y}$，支撑集$\boldsymbol{\Lambda}^0 = \varnothing$，迭代次数$t = 0$；

(2) 找出解决式(7)优化问题的索引λ_t

$$\lambda_t = \operatorname{argmax}_{j=1,2,\cdots,K} \left|\left\langle \boldsymbol{r}^{t-1}, \boldsymbol{\varphi}_j \right\rangle\right| \tag{7}$$

(3) 更新支撑集和所选索引对应的列的矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}^{t-1} = \boldsymbol{\Lambda}^{t-1} \cup \{\lambda_t\}\,, \boldsymbol{A}_t = [\boldsymbol{A}_{t-1}\ \boldsymbol{\varphi}_{\lambda_t}] \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{A}_t$是用来存储在第t次迭代中从矩阵$\boldsymbol{H}$中所选列组成的子矩阵，$\boldsymbol{A}_0$设置为空矩阵；

(4) 获得最小二乘解

$$\boldsymbol{x}_t = \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmin}}\, \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}_t\boldsymbol{x}\|_2 \tag{9}$$

(5) 计算数据的新近似值和新残差

$$\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{A}_t\boldsymbol{x}_t \tag{10}$$

$$\boldsymbol{r}^t = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}_t \tag{11}$$

(6) 如果$t \le S$或者$\|\boldsymbol{r}^t\|_2 > e$，$e$为提前设定的阈值，则回到步骤(2)重复以上操作。

对于OMP算法，最近的研究结果表明其重构性能与线性规划(Linear Programming, LP)技术相当，同时仅需要更低的计算开销[20]。

3.3 梯度投影稀疏重构(GPSR)算法

将压缩感知重构算法应用到式(3)中并重构$\boldsymbol{x}$的原始模型为求解最小l_0范数问题，平滑l_0范数(SL0)算法[21]是一种基于近似l_0范数的压缩感知信号重构算法，采用最速下降法和梯度投影原理，通过选择一个递减序列来逐步逼近最优解，具有匹配度高、计算量低等优点。然而，最小l_0范数问题求解十分困难，通常情况下，通过将非凸的l_0范数优化问题转化为凸的l_1范数优化问题求解，即最小化目标函数

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}\|_2^2 + \tau\|\boldsymbol{x}\|_1 \tag{12}$$

该目标函数包括2次误差项和稀疏诱导l_1-正则化项，τ称为正则化参数，用于控制稀疏解$\boldsymbol{x}$的稀疏度[15]。

将GPSR算法应用到式(3)中并重构$\boldsymbol{x}$，其是将含噪声信号稀疏解的l_1-正则化非线性凸优化问题，转化为有边界约束的2次规划问题进行求解。主要策略是从可行点出发，沿着目标函数值下降的可行方向进行搜索，求出使目标函数值下降的新的可行点。与OMP算法相比，GPSR算法中矩阵$\boldsymbol{H}$不需要满足RIP条件，对信号的重构精度较高，但收敛速度较慢，计算复杂度较高。

4　OMP改进的重构算法

近年来，一系列贪婪追踪算法由于低复杂度和

易实现性而受到极大关注，其核心思想是寻找信号的支撑集。目前，对OMP算法的改进主要在识别步骤上，目的是提高计算效率和重构性能。

4.1 最优索引gOMP的信号重构

gOMP算法与OMP算法有类似的基础，通过改进OMP算法的识别步骤来降低复杂性，提高重构性能，可将gOMP算法应用到式(3)中并重构$\boldsymbol{x}$。gOMP实际上是OMP算法的扩展，即每次迭代识别多个索引，比较矩阵$\boldsymbol{H}$的列和残差之间的相关性，并从矩阵$\boldsymbol{H}$中选择对应于$C(C \le N/S)$[13]列最大相关性的索引作为估计支持集$\boldsymbol{\Lambda}^t$的新元素。

令$\Omega = \{1,2,\cdots,K\}$, $\boldsymbol{x}$的支撑集可定义为

$$T = \{k\,|k \in \Omega, x_k \ne 0\} \tag{13}$$

该集合表示$\boldsymbol{x}$中非零元素的位置，在此意义下，检测用户活动信息的过程即为求解该集合的过程。

文献[13]指出，$C \le N/S$, S表示信号$\boldsymbol{x}$的稀疏度，gOMP算法可以以最多S次迭代完全重构任意S-稀疏信号的充分条件是：矩阵$\boldsymbol{H}$以式(14)的常数满足RIP

$$\left.\begin{array}{ll} \delta < \dfrac{1}{\sqrt{S}+1}, & C=1, S>1 \\ \delta < \dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{S}+3\sqrt{C}}, & 2 \le C \le N/S, S>1 \end{array}\right\} \tag{14}$$

参数δ与C及S这两个参数有关，在S为定值的情况下，参数δ取上界时是关于C的函数，表示为

$$\delta \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{S}+1}, & C=1, S>1 \\ \dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{S}+3\sqrt{C}}, & 2 \le C \le N/S, S>1 \end{cases} \tag{15}$$

在$2 \le C \le N/S, S>1$的情况下，δ函数进一步表示为

$$\begin{aligned} \delta &\approx \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{S}+3\sqrt{C}} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{S}+\sqrt{C}-\frac{1}{3}\sqrt{S}}{\sqrt{S}+3\sqrt{C}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S}+3\sqrt{C}} \end{aligned} \tag{16}$$

存在噪声的情况下，为了保证gOMP算法在NOMA多用户信号检测方面的性能，可将检测误差$\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|_2$作为gOMP算法对信号$\boldsymbol{x}$重构的一个性能指标。由前述已知，gOMP算法的终止条件是$\|\boldsymbol{r}^t\|_2 \le e$或$t=S$，在这两种终止条件下，讨论$\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|_2$。

在$\|\boldsymbol{r}^t\|_2 \le e$的情况下，有

$$\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|_2 \le \frac{e}{\sqrt{1-\delta}} + \frac{\|\boldsymbol{v}\|_2}{\sqrt{1-\delta}} \tag{17}$$

假设迭代次数$t=S$时，有

$$\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|_2 \le \frac{\|\boldsymbol{v}\|_2}{\sqrt{1-\delta}}, T \subset \boldsymbol{\Lambda}^S \tag{18}$$

从式(16)、式(17)和式(18)可知：(1) 噪声功率$\|\boldsymbol{v}\|_2$为定值时，$\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|_2$是关于常数$\delta$的单调递增函数；(2) 为了取最小的检测误差，$\delta$应取最小的值；(3)$S$为定值的情况下，参数$\delta$是关于$C$的单调递增函数；(4) C为定值的情况下，δ是关于S的单调递减函数。为了取最小的检测误差$\|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|_2$，得到较好的重构性能，$C$应取最小的值。令$C$的最小值为$C_{\rm opt}$, $2 \le C \le N/S, S>1$，则$C_{\rm opt}=2$。将$C_{\rm opt}=2$时的gOMP算法称为最优索引gOMP算法，可将其应用到式(3)中并重构$\boldsymbol{x}$。

最优索引gOMP算法流程主要包括以下6部分：

(1) 初始化，残差$\boldsymbol{r}^0=\boldsymbol{y}$，支撑集$\boldsymbol{\Gamma}^0=\varnothing$，迭代次数$t=0$;

(2) 将$C_{\rm opt}$列索引表示为$\{\eta(i)\}_{i=1,2,\cdots,C_{\rm opt}}$，其中

$$\eta(i) = \mathop{\rm argmax}_{j:j\in\Omega\backslash\{\eta(i-1),\cdots,\eta(2),\eta(1)\}} |< \boldsymbol{r}^{t-1}, \boldsymbol{\varphi}_j >| \tag{19}$$

(3) 第t次迭代的扩展支撑集变为

$$\boldsymbol{\Gamma}^t = \boldsymbol{\Gamma}^{t-1} \cup \{\eta(1),\eta(2),\cdots,\eta(C_{\rm opt})\} \tag{20}$$

(4) 获得最小二乘解表示为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Gamma}^t} = \mathop{\rm argmin}_{\boldsymbol{u}} \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{u}\|_2 = \boldsymbol{H}^\dagger_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{y} \tag{21}$$

$\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$是对向量$\hat{\boldsymbol{x}}$的限制，表示向量$\hat{\boldsymbol{x}}$中只包含在支撑集$\boldsymbol{\Gamma}^t$索引中的元素，$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$是矩阵$\boldsymbol{H}$中只包含由支撑集$\boldsymbol{\Gamma}^t$索引对应的列组成的子矩阵；$\boldsymbol{H}^\dagger_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$表示对矩阵$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$求伪逆运算，$\boldsymbol{H}^\dagger_{\boldsymbol{\Gamma}^t} = (\boldsymbol{H}'_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t})^{-1}\boldsymbol{H}'_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$, $\boldsymbol{H}'$表示对矩阵$\boldsymbol{H}$作共轭转置处理。

(5) 第t次迭代的残差表示为

$$\boldsymbol{r}^t = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Gamma}^t} \tag{22}$$

(6) 如果$t \le S$或者$\|\boldsymbol{r}^t\|_2 > e$，则回到步骤(2)重复以上操作。

最优索引gOMP的具体描述在算法1中给出，如表1所示。

可以发现，在每次迭代中矩阵$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$列满秩的情况下，gOMP的残差$\boldsymbol{r}^t$和矩阵$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$总是正交的。这意味着矩阵$\boldsymbol{H}$的同一列不会被选择两次，即结果会在有限的步骤收敛。

$$\begin{aligned} \left\langle \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}, \boldsymbol{r}^t \right\rangle &= \left\langle \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}, \boldsymbol{P}^\perp_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{y} \right\rangle = \boldsymbol{H}'_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{P}^\perp_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{y} \\ &= \boldsymbol{H}'_{\boldsymbol{\Gamma}^t}(\boldsymbol{P}^\perp_{\boldsymbol{\Gamma}^t})'\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{P}^\perp_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t})'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{23}$$

其中，$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Gamma}^t} = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{H}^\dagger_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$是矩阵$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$生成子空间上的投影，$\boldsymbol{P}^\perp_{\boldsymbol{\Gamma}^t} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$。上式成立是由于$\boldsymbol{P}^\perp_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$的对称性及以下关系：

$$\boldsymbol{P}^\perp_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\Gamma}^t})\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t} = \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t} - \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{H}^\dagger_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t} = \boldsymbol{0} \tag{24}$$

表 1　最优索引gOMP检测算法

算法1 最优索引gOMP检测算法

输入 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{H}, S, C_{\rm opt}$.

初始化：$\boldsymbol{r}^0=\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\Gamma}^0=\varnothing, t=0$.

(1) While $\|\boldsymbol{r}^t\|_2>e$ 且 $t\le S$ do

(2) $t=t+1$;

(3) $\eta(i)=\underset{j:j\in\Omega\backslash\{\eta(i-1),\cdots,\eta(2),\eta(1)\}}{\mathrm{argmax}}|<\boldsymbol{r}^{t-1},\boldsymbol{\varphi}_j>|$;

(4) $\boldsymbol{\Gamma}^t=\boldsymbol{\Gamma}^{t-1}\cup\{\eta(1),\eta(2),\cdots,\eta(C_{\rm opt})\}$;

(5) $\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}=\underset{\boldsymbol{u}}{\mathrm{argmin}}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{u}\|_2=\boldsymbol{H}^{\dagger}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{y}$;

(6) $\boldsymbol{r}^t=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}$

end while

输出 $\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}=\underset{\boldsymbol{u}}{\mathrm{argmin}}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{\Gamma}^t}\boldsymbol{u}\|_2$

4.2 复杂度分析

gOMP算法的复杂度主要来自于3个步骤，分别是矩阵$\boldsymbol{H}$中与残差最大相关列的识别、对信号的估计和残差的更新。识别步骤中执行$\boldsymbol{H}'\boldsymbol{r}^{t-1}$需要$(2N-1)K$次浮点运算；$\boldsymbol{H}'\boldsymbol{r}^{t-1}$需要通过排序找到$C$列最好的索引，因此需要$[KC-C(C+1)]/2$次浮点运算。通过最小二乘解来获得信号的估计，大约需要$4C^2tN$次浮点运算。残差更新需要$2CtN$次浮点运算。t次迭代总约需要的浮点运算次数是$2tNK+(2C^2+C)t^2N$。由于$t\le S$及C是一个小的常数，gOMP算法的复杂度可以表示为$O(SNK)$；gOMP算法和OMP算法具有相同阶数的复杂度$O(SNK)$，然而最优索引gOMP算法在误码率方面优于OMP算法。

5　仿真及分析

通过MATLAB仿真验证最优索引gOMP(Multiple Optimal Indices Aided gOMP, MOIA-gOMP)算法的性能。在仿真中，假设在基站处已知活跃用户的数量，采用4-QAM调制，且用户的总数是$K=256$。扩频矩阵被设计为基于伪随机噪声的Toeplitz矩阵，因此可以高概率地满足RIP [11]。

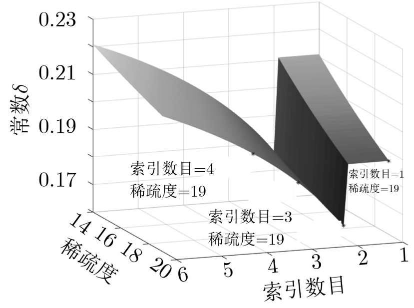

图 1 稀疏度和索引数目对常数δ的影响

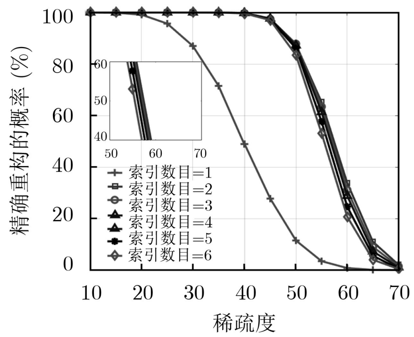

图 2 稀疏度对gOMP精确重构概率的影响

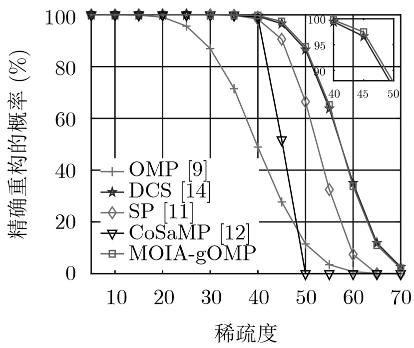

图 3 稀疏度对不同算法精确重构概率的影响

图1给出了稀疏度和索引数目对参数δ的影响。为了取最小的重构误差，δ应取最小的值。由图1可知，稀疏度S取定值时，在$2\le C\le N/S, S>1$的情况下，随着索引数目的增加，参数δ在增大，重构误差增大；且对于不同的稀疏度，最优索引数目均为2时，δ取最小的值，从而得到最小的重构误差。

图2给出了稀疏度对gOMP精确重构概率的影响，图3给出了稀疏度对不同算法精确重构概率的影响，其中重构的稀疏向量的维度是256×1，测量向量的维度是128×1，不考虑噪声的影响。由图2可知，gOMP算法每次迭代索引数目取2时，皆优于取索引数目取1, 3, 4, 5, 6时的重构性能。图3中以OMP算法的精确重构性能为基准，对比了CoSaMP算法、SP算法、DCS算法和本文MOIA-gOMP算法(每次迭代索引数目取2)时的重构性能。由图3可知，随着稀疏度的增加，这5种算法的精确重构概率逐渐降低；较高的临界稀疏性意味着更好的重构性能[9,11,13]，MOIA-gOMP算法优于其它所有算法的重构性能。

图4、图5及图6给出了免调度NOMA系统上行链路多用户信号检测的BER性能曲线，其中活跃用户的数量为16，子载波的数量为128，系统过载率为200%。图4中以OMP算法的BER性能为基准，对比了gOMP算法每次迭代索引数目取1, 2, 3, 4, 5, 6时所各自对应的检测性能。由4.1节得知，重构误差随着噪声影响的减小而减小，因此gOMP算法在

较高信噪比时性能更好，且可以发现gOMP算法每次迭代索引数目取2优于索引数目取其它值时的误码率性能。

图5中以OMP算法的BER性能为基准，对比了CoSaMP算法、ROMP算法、SP算法、DCS算法和本文MOIA-gOMP算法的检测性能。由图5可知，MOIA-gOMP算法优于其它所有贪婪算法的误码率性能；DCS算法在信噪比增加到6.5 dB之后开始优于其它4种贪婪算法。图6中以OMP算法的BER性能为基准对比了SP算法、DCS算法、GPSR算法和MOIA-gOMP算法的检测性能。由图6可知，MOIA-gOMP算法的BER性能优于其它4种算法的BER性能；GPSR算法的性能优于OMP算法的BER性能。

图7给出了免调度NOMA系统上行链路信号检测活跃用户数量变化时的BER性能曲线。其中子载波的数量为128，系统过载率为200%，信噪比为8 dB。以OMP算法的BER性能为基准，对比了SP算法、DCS算法、GPSR算法和MOIA-gOMP算法的检测性能。由图7可知，活跃用户数量很少时，这5种算法都能够可靠地检测活跃用户和数据；随着活跃用户数量的增加，误码率性能逐渐变差，然而MOIA-gOMP算法在误码率方面优于其它4种算法。

图8给出了免调度NOMA系统上行链路信号检测子载波数量变化时的BER性能曲线。其中活跃用户的数量为16，信噪比为8 dB。以OMP算法的BER性能为基准对比了SP算法、DCS算法、GPSR算法和MOIA-gOMP算法的检测性能。由图8可知，随着子载波数量的增加，相应的过载率减小，这几种算法的性能逐渐变好，且MOIA-gOMP算法的性能优于其它4种算法。由于系统是过载的，过载率较大时，系统所需的子载波数量较少，这在很大程度上提高了频谱利用率。

6 结论

本文将gOMP算法应用于免调度NOMA系统上行链路，目的在于增强NOMA系统在不同条件下的活跃用户检测及数据接收的性能。在传统的gOMP算法中引入了每次迭代中最优的索引数目，提高了系统的多用户检测性能。仿真结果表明，

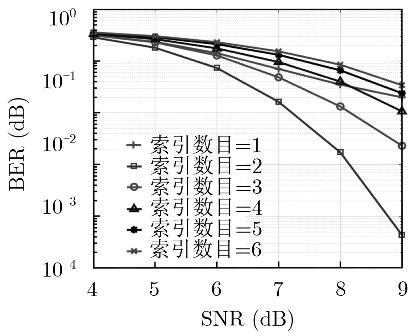

图 4 取不同索引数目时，gOMP算法的BER性能

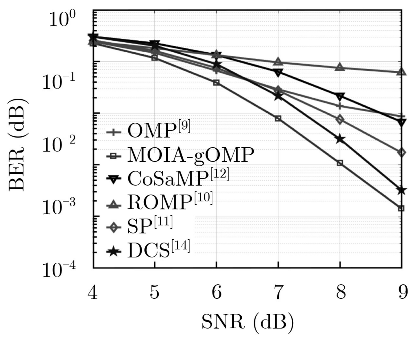

图 5 6种贪婪算法的BER性能

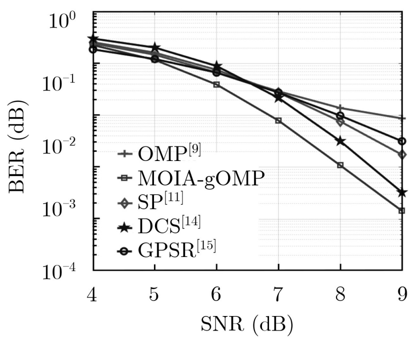

图 6 5种多用户检测算法BER性能对比

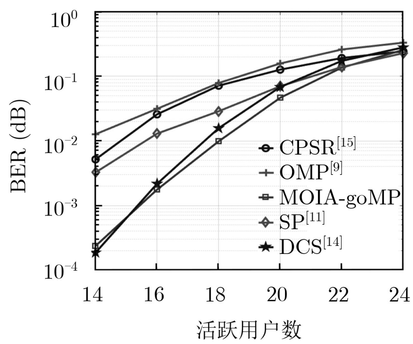

图 7 活跃用户数对BER性能的影响

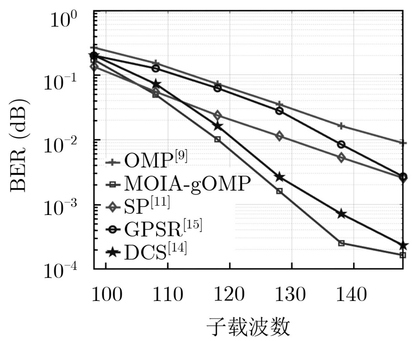

图 8 过载率对BER性能的影响

MOIA-gOMP算法能够较大程度地提高系统的性能；特别是与其它贪婪算法及梯度投影算法相比有明显的误码率性能优势。在不同的活跃用户数量以及系统过载情况下，MOIA-gOMP算法对信号重构的性能稳定，在不同的情况下该算法都能实现很好的误码率性能，从而使得系统本身有较强的过载性、稳定性及扩展性，频谱利用率高。本文算法可以作为免调度NOMA系统上行链路信号重构的有效方案之一。

参 考 文 献

[1] OSSEIRAN A, BOCCARDI F, BRAUN V, *et al*. Scenarios for 5G mobile and wireless communications: The vision of the METIS project[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2014, 52(5): 26–35. doi: 10.1109/MCOM.2014.6815890.

[2] DAI Linglong, WANG Bichai, DING Zhiguo, *et al*. A survey of non-orthogonal multiple access for 5G[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2018, 20(3): 2294–2323. doi: 10.1109/COMST.2018.2835558.

[3] DAI Linglong, WANG Bichai, YUAN Yifei, *et al*. Non-orthogonal multiple access for 5G: Solutions, challenges, opportunities, and future research trends[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2015, 53(9): 74–81. doi: 10.1109/MCOM.2015.7263349.

[4] ISLAM S M R, AVAZOV N, DOBRE O A, *et al*. Power-domain non-orthogonal multiple access (NOMA) in 5G systems: Potentials and challenges[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2017, 19(2): 721–742. doi: 10.1109/COMST.2016.2621116.

[5] HONG J P, CHOI W, and RAO B D. Sparsity controlled random multiple access with compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2015, 14(2): 998–1010. doi: 10.1109/TWC.2014.2363165.

[6] CHOI J W, SHIM B, DING Yacong, *et al*. Compressed sensing for wireless communications: Useful tips and tricks[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2017, 19(3): 1527–1550. doi: 10.1109/COMST.2017.2664421.

[7] 李燕龙, 陈晓, 詹德满, 等. 非正交多址接入中稀疏多用户检测方法[J]. 西安电子科技大学学报: 自然科学版, 2017, 44(3): 151–156. doi: 10.3969/j.issn.1001-2400.2017.03.026.
LI Yanlong, CHEN Xiao, ZHEN Deman, *et al*. Method of sparse multi-user detection in non-orthogonal multiple access[J]. *Journal of Xidian University*, 2017, 44(3): 151–156. doi: 10.3969/j.issn.1001-2400.2017.03.026.

[8] SHIM B and SONG B. Multiuser detection via compressive sensing[J]. *IEEE Communications Letters*, 2012, 16(7): 972–974. doi: 10.1109/LCOMM.2012.050112.111980.

[9] TROPP J A and GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655–4666. doi: 10.1109/TIT.2007.909108.

[10] NEEDELL D and VERSHYNIN R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 310–316. doi: 10.1109/JSTSP.2010.2042412.

[11] DAI Wei and MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(5): 2230–2249. doi: 10.1109/TIT.2009.2016006.

[12] NEEDELL D and TROPP J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 26(3): 301–321. doi: 10.1016/j.acha.2008.07.002.

[13] WANG Jian, KWON S, and SHIM B. Generalized orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(12): 6202–6216. doi: 10.1109/TSP.2012.2218810.

[14] WANG Bichai, DAI Linglong, ZHANG Yuan, *et al*. Dynamic compressive sensing-based multi-user detection for uplink grant-free NOMA[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(11): 2320–2323. doi: 10.1109/LCOMM.2016.2602264.

[15] FIGUEIREDO M A T, NOWAK R D, and WRIGHT S J. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(4): 586–597. doi: 10.1109/JSTSP.2007.910281.

[16] WANG Bichai, DAI Linglong, MIR T, *et al*. Joint user activity and data detection based on structured compressive sensing for NOMA[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(7): 1473–1476. doi: 10.1109/LCOMM.2016.2560180.

[17] WEI Chao, LIU Huaping, ZHANG Zaichen, *et al*. Approximate message passing-based joint user activity and data detection for NOMA[J]. *IEEE Communications Letters*, 2017, 21(3): 640–643. doi: 10.1109/LCOMM.2016.2624297.

[18] CIRIK A C, BALASUBRAMANYA N M, and LAMPE L. Multi-user detection using ADMM-based compressive sensing for uplink grant-free NOMA[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2018, 7(1): 46–49. doi: 10.1109/LWC.2017.2752165.

[19] ZHU Hao and GIANNAKIS G B. Exploiting sparse user activity in multiuser detection[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2011, 59(2): 454–465. doi: 10.1109/TCOMM.2011.121410.090570.

[20] WANG Jian and SHIM B. Exact recovery of sparse signals

using orthogonal matching pursuit: How many iterations do we need?[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(16): 4194–4202. doi: 10.1109/TSP.2016.2568162.

[21] 孙娜, 刘继文, 肖东亮. 基于BFGS拟牛顿法的压缩感知SL0重构算法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(10): 2408–2414. doi: 10.11999/JEIT170813.

SUN Na, LIU Jiwen, and XIAO Dongliang. SL0 reconstruction algorithm for compressive sensing based on BFGS quasi newton method[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(10): 2408–2414. doi: 10.11999/JEIT170813.

申　滨：男，1978年生，教授，研究方向为认知无线电、大规模MIMO等.

吴和彪：男，1994年生，硕士生，研究方向为免调度NOMA多用户检测.

崔太平：男，1981年生，讲师，研究方向为认知无线电、车联网等.

陈前斌：男，1967年生，教授、博士生导师，研究方向为下一代网络、个人通信等.