

变抽头长度 LMS 自适应滤波算法

林 川 冯全源

(西南交通大学信息科学与技术学院 成都 610031)

摘要: 该文将自适应滤波器抽头长度与权值调整问题归结为单一的权值调整问题, 提出了抽头长度的一般更新公式及新的变抽头长度 LMS 算法, 从理论上分析了其合理性与收敛性。新算法用长滤波器与短滤波器的时平均平方误差估计稳态均方误差, 采用了自适应调整的抽头长度步长, 可在滤波器权值未收敛时就快速更新抽头长度。论文还证明了目前文献中几种有效的变抽头长度算法也可看作或化为文中抽头长度一般更新公式的特例, 理论分析与自适应系统辨识的仿真结果验证了新算法的有效性。

关键词: 自适应滤波器; 变抽头长度; LMS 算法; 均方误差; 阶数

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2008)07-1676-04

Variable Tap-Length LMS Adaptive Filtering Algorithm

Lin Chuan Feng Quan-yuan

(School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: The tap-length and tap-weight adjusting problems of adaptive filter are converted into a single tap-weight adjusting problem. Based on this, a general tap-length updating formula and a new variable tap-length LMS algorithm are presented. The rationality and convergence property of the new algorithm are analyzed. The new algorithm uses time-mean square error to estimate steady state mean square error of the long and short filter and employs adaptive tap-length step size, thus it can update the tap-length fast before the tap-weight converges. It is also proved that several existing variable tap-length algorithms in the literatures can be regarded as special cases of the general updating formula. The theory analysis and numerical simulation results verify the new algorithm.

Key words: Adaptive filter; Variable tap-length; LMS algorithm; Mean square error; Order

1 引言

自适应 FIR 滤波器由于收敛性与稳定性相对比较简单, 而且已有相对较完善的算法, 已获得了广泛应用。但目前自适应 FIR 滤波器的抽头长度(tap-length)或阶数一般都不变, 若 FIR 滤波器的阶数太高, 则不仅计算量增加, 同时也增加了均方误差(MSE); 若阶数太低, 则无法满足滤波器的性能要求。而在许多自适应 FIR 滤波器的应用场合, 如信道估计或系统辨识等, 系统的特征不可知或是时变的, 固定长度的 FIR 滤波器就可能无法达到最优性能。为解决这一问题, 近年来一些学者开始致力于研究能自适应收敛到最优抽头长度的变抽头长度算法^[1-5]。其中文献[2]中的 Fractional Tap-length(FT)算法克服了文献[3]中 Segmented Filter(SF)算法与文献[4]中 Gradient Descent(GD)算法的一些缺点, 在一定条件下具有更高的效率。本文从理论上论证了文献[2]中搜索最优抽头长度的代价函数的合理性, 并将抽头长度与权值调整问题归结为单一的权值调整问题, 提出了抽头长度

一般更新公式及新的变抽头长度 LMS 算法。新算法采用自适应调整的抽头长度步长, 可在滤波器权值未收敛时就更新抽头长度, 具有较快的抽头长度收敛速度。本文还证明了文献[2-4]中的几种变抽头长度算法可看作抽头长度一般更新公式的特例。理论分析与仿真结果验证了新算法的有效性。

2 最优抽头长度及其代价函数

自适应FIR滤波器的最优抽头长度可定义为当滤波器的稳态MSE达到最小或十分接近最小时对应的最小抽头长度值。Gong等在文献[1]定义自适应FIR滤波器的最优抽头长度为 $\min\{N_0 \mid \xi_N - \xi_{N+1} \leq \varepsilon, \forall N \geq N_0\}$, 定义次优抽头长度为 $\{M \mid \xi_M - \xi_{M+1} \leq \varepsilon, M < N_0\}$, 其中 ξ_N 为抽头长度为 N 时的稳态均方误差, ε 为很小的正数, M, N, N_0 为正整数。为避免抽头长度收敛到次优抽头长度(相当于局部极值点), 可取抽头长度步长为大于1的整数 Δ 。据此文献[1]根据代价函数(1): $\min\{N \mid \xi_N - \xi_{N+\Delta} \leq \varepsilon\}$, 文献[2]根据代价函数(2): $\min\{N \mid \xi_{N+\Delta}^{(N)} - \xi_{N+\Delta}^{(N+\Delta)} \leq \varepsilon\}$ 来搜索最优抽头长度。其中 $\xi_{N+\Delta}^{(N)} = E[e_{N+\Delta}^{(N)}]^2$, 稳态分段误差 $e_{N+\Delta}^{(N)} = \lim_{n \rightarrow \infty} d(n) - y_{N+\Delta}^{(N)}(n)$, $y_{N+\Delta}^{(N)}(n) = \mathbf{w}_{N+\Delta}^{(N)}(n)^T \mathbf{x}_{N+\Delta}^{(N)}(n)$, $\mathbf{w}_{N+\Delta}^{(N)}(n)$, $\mathbf{x}_{N+\Delta}^{(N)}(n)$ 分

2006-12-04 收到, 2007-08-15 改回

国家自然科学基金(60371017)和西南交通大学博士生创新基金(2008-3)资助课题

别为 n 时刻长度为 $N + \Delta$ 的滤波器抽头权向量 $\mathbf{w}_{N+\Delta}(n)$ 与输入向量 $\mathbf{x}_{N+\Delta}(n)$ 的前 N 个元素构成的向量, 上标 T 代表转置, $d(n)$ 为期望信号。以下简称长度为 $N + \Delta$ 的滤波器为长滤波器, 而称其前 N 个抽头构成的分段滤波器为短滤波器。若不考虑抽头长度陷入局部极值点, 文献[1]所用的代价函数(1)与最优抽头长度定义吻合, 其理论依据是充分的。但文献[2]却没有详细讨论代价函数(2)的理论依据。为此, 我们在代价函数(1)的基础上阐述它的理论依据: 假设自适应滤波器的最优长度为 N_o , 对应的最优抽头权向量为 $\mathbf{w}_{N_o}^o = (w_1^o, w_2^o, \dots, w_{N_o}^o)^T$ 。根据 $\xi_{N+\Delta}^{(N)}$ 的定义, 理想情况下有 $\xi_{N+\Delta}^{(N+\Delta)} = \xi_{N+\Delta}$, $\xi_{N+\Delta}^{(N)} \geq \xi_N$, 则当抽头长度 $N < N_o$ 时, 有 $\xi_{N+\Delta}^{(N)} - \xi_{N+\Delta}^{(N+\Delta)} \geq \xi_N - \xi_{N+\Delta} \geq \varepsilon$, 此时应增加抽头长度; 当 $N \geq N_o$ 时, 对应的最优抽头权向量为 $\mathbf{w}_N^o = (w_1^o, w_2^o, \dots, w_{N_o}^o, 0, \dots, 0)^T$, 若考虑到实际中存在的小的调整噪声, 也有 $\xi_{N+\Delta}^{(N)} \approx \xi_N$, 则 $\xi_{N+\Delta}^{(N)} - \xi_{N+\Delta}^{(N+\Delta)} \approx \xi_N - \xi_{N+\Delta} \leq \varepsilon$, 此时应减小抽头长度。据此我们可搜索到最优抽头长度, 由此论证代价函数(2)的合理性。

3 抽头长度的一般更新公式与新变抽头长度 LMS 算法

变长度自适应滤波器的抽头长度与权值可相对独立更新, 本文用 LMS 算法更新抽头权值。如果直接根据代价函数(2)来调整抽头长度, 需要等到滤波器权值稳态收敛后才能更新抽头长度, 因此抽头长度的收敛速度很慢。为解决这一问题, 我们选用 $[n_1, n]$ 时间段内长滤波器与短滤波器平方误差(SE)的时平均 $\tilde{\xi}_{N+\Delta}^{(N+\Delta)}(n_1, n)$ 与 $\tilde{\xi}_{N+\Delta}^{(N)}(n_1, n)$ 来代替 $\xi_{N+\Delta}^{(N+\Delta)}$ 与 $\xi_{N+\Delta}^{(N)}$, 这样就可以在滤波器权值未收敛时同时更新抽头长度与权值, 加快抽头长度收敛速度。由此得到了抽头长度的一般更新公式:

$$N(n+1) =$$

$$\begin{cases} N(n) + \delta(n), & \tilde{\xi}_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n_1, n) - \tilde{\xi}_{N(n)+\Delta}^{(N(n)+\Delta)}(n_1, n) \geq \varepsilon(n) \\ N(n) - \delta(n), & \tilde{\xi}_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n_1, n) - \tilde{\xi}_{N(n)+\Delta}^{(N(n)+\Delta)}(n_1, n) \leq \varepsilon_2(n) \\ N(n), & \text{其它} \end{cases} \quad (1)$$

上式中 $n \geq n_1$, $N(n)$ 为 n 时刻的抽头长度, 正整数 $\delta(n) \leq \Delta$ 。 $\varepsilon(n)$, $\varepsilon_2(n)$ 是 n 时刻小的非负实数, 且 $0 \leq \varepsilon_2(n) \leq \varepsilon(n)$, 这样的取法可防止抽头长度在大于最优长度时发生振荡现象。

由于式(1)中用长滤波器与短滤波器的时平均平方误差代替了稳态均方误差, 它实际上并非直接根据代价函数(2)来更新抽头长度, 那么式(1)的理论根据又是什么呢? 下面来回答这个问题。

注意到长度为 L_1 的短滤波器抽头权向量 $\mathbf{w}_{L_1} = (w_1, w_2, \dots, w_{L_1})^T$ 的权值更新相当于长度为 L_2 ($L_1 < L_2$) 的长滤波器权向量 \mathbf{w}_{L_2} 在 L_2 维向量空间的 L_1 维子空间 $V_{L_1} = \{(w_1, w_2, \dots, w_{L_1}, 0, \dots, 0)^T\}$ (最后 $L_2 - L_1$ 个权值固定为零) 内的权值更

新。这样, 滤波器的抽头长度变化相当于增大或减小长滤波器抽头权向量的搜索空间维数, 从而滤波器的抽头长度调整与权值调整等价于单一的权值调整问题, 即在长滤波器权向量空间中选择一个合适的搜索子空间, 并在其中按合适的方向调整权值。因此, 只要保证在抽头长度与权值的调整过程中滤波器的均方误差(MSE)总体上在不断减小, 就可以使滤波器逐渐收敛到最优权向量。在上述抽头长度一般更新公式(1)中, 设 n 时刻抽头长度为 N , 抽头权向量为 $\mathbf{w}_N = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T$, 若 $\tilde{\xi}_{N(n)}^{(N(n)-\Delta)}(n_1, n) - \tilde{\xi}_{N(n)}^{(N(n))}(n_1, n) \geq \varepsilon(n)$, 则 $N(n+1) = N + \delta(n)$, 新的权向量变为 $\mathbf{w}_{N+\delta(n)} = (w_1, w_2, \dots, w_N, 0, \dots, 0)^T$, 权向量的当前状态并未发生变化。若 $\tilde{\xi}_{N(n)}^{(N(n)-\Delta)}(n_1, n) - \tilde{\xi}_{N(n)}^{(N(n))}(n_1, n) \leq \varepsilon_2(n)$, 则 $N(n+1) = N - \delta(n)$, 新的权向量变为 $\mathbf{w}_{N-\delta(n)} = (w_1, w_2, \dots, w_{N-\Delta}, 0, \dots, 0)^T$ (最后 $\Delta - \delta(n)$ 个权值为0), 此时滤波器在 $[n_1, n]$ 时间段的时平均平方误差(SE)减小或相当。可见, 不管抽头长度是增加还是减小, 滤波器抽头权向量因抽头长度变化而做的调整并没有增加 MSE, 至少在时段 $[n_1, n]$ 内是如此, 即滤波器的权向量总体上总是朝着 MSE 减小的方向在调整。在滤波器的收敛过程中, 时平均 SE 可能不能完全正确地估计 MSE, 抽头长度的变化方向可能发生“误判”, 但只要滤波器整体上还是朝着收敛的方向在调整, 随着收敛程度的增加, “误判”的概率将减小。而只要没有“误判”, 抽头长度就能正确收敛。从这个意义上说, 上面抽头长度的一般更新公式是收敛的。

本文提出的新变抽头长度算法可看作上述抽头长度一般更新公式(1)的特例, 取式(1)中的 $n_1 = kT + 1$, $n = (k+1)T$, k 为整数, 每隔 T 代调整一次抽头长度。 $\varepsilon(n)$, $\varepsilon_2(n)$ 分别取小的非负实常数 ε , ε_2 , 它们的取值实际上体现了对滤波器收敛精度或稳态误差的要求, ε 取较大值会降低滤波器的收敛精度, 取太小值可能会使抽头长度的收敛曲线出现较大波动, 实际中可取 ε 略小于所要求的稳态均方误差, 取 ε_2 接近于0。取 $\tilde{\xi}_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n_1, n) = \frac{1}{T} \sum_{i=n-T+1}^n |d(i) - y_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(i)|^2$, $\delta(n)$ 的自适应调整公式如下:

$$\delta(n+1) = \begin{cases} \min(\Delta, \delta(n) + 1), & \text{若抽头长度变化方向连续} \\ & k_1 \text{次与前次变化方向相同} \\ \max(1, \delta(n) - 1), & \text{若抽头长度变化方向连续} \\ & k_2 \text{次与前次变化方向不同} \\ \delta(n), & \text{其它} \end{cases} \quad (2)$$

式(1)中的抽头长度理论上将收敛到 $[N_o, N_o + \delta(n) - 1]$, 若增加抽头长度步长 $\delta(n)$, 可以提高抽头长度的收敛速度, 但降低了抽头长度最终收敛的精度; 反之, 若减小 $\delta(n)$ 可以提高抽头长度的最终收敛精度, 但降低了抽头长度的收敛速度。新算法采用自适应调整的 $\delta(n)$ 可以克服这个矛盾。若抽头长度变化方向连续 k_1 次与前次变化方向相同, 则说明抽头长度尚未收敛, 此时应增加 $\delta(n)$ 以提高抽头长度的收敛速

度;若抽头长度变化方向连续 k_2 次与前次变化方向不同,说明抽头长度可能已在最优抽头长度附近振荡,应减小 $\delta(n)$ 以提高抽头长度的收敛精度。新算法用LMS算法调整滤波器权值,为保证算法的稳定性,取步长 $\mu = \min(\mu_{\max}, C/N)$,与抽头长度成反比,其中 C 为预设定的常数, N 为滤波器的抽头长度, μ_{\max} 为预定义的最大步长。

4 几种变抽头长度算法的统一

本节我们说明文献[3]的SF算法,文献[4]的GD算法与文献[2]的FT算法等变抽头长度算法实际上也是一般公式(1)的特例。取 $n_1 = 1$, $\delta(n) = \Delta$, $\tilde{\xi}_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n_1, n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta^{n-i} \cdot |d(i) - y_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(i)|^2$, $\varepsilon(n) = (1 - \alpha_{up})\tilde{\xi}_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n_1, n)$, $\varepsilon_2(n) = (1 - \alpha_{dw})\tilde{\xi}_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n_1, n)$, $0 < \alpha_{up} \leq \alpha_{dw} \leq 1$, 则得到SF算法。

$$\text{令GD算法中的 } \nabla J_{L(n)} = \frac{\partial e^2_{L(n)}}{\partial L(n)} = \frac{e^2_{L(n)+\Delta/2} - e^2_{L(n)-\Delta/2}}{\Delta}$$

在一般公式(1)中取 $n_1 = n-T+1$, $\tilde{\xi}_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n_1, n) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=n-T+1}^n |d(i) - y_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(i)|^2$, $\varepsilon(n) = \varepsilon_2(n) = 0$, $N(n) = L(n) - \Delta/2$, 则得到GD算法。

将FT算法的抽头长度更新公式做微小改动,变为

$$N(n+1) = \begin{cases} N(n) + \delta, & n_f(n) - N(n) \geq \delta \\ N(n) - \delta, & n_f(n) - N(n) \leq -\delta \\ N(n), & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $n_f(n+1) = n_f(n) - \alpha - \gamma[(e_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n))^2 - (e_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n-1))^2]$, $e_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n) = d(n) - y_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(n)$ 。设 n_1 是 n 时刻及其之前抽头长度发生变化且离 n 最近的时刻,则 $N(i) = N(n_1)$, $n_1 \leq i \leq n$ 。令 $n_f(n_1) - N(n_1) = \phi$, 取 $\tilde{\xi}_{N(n)+\Delta}^{(N(n))} = \frac{1}{(n-n_1)} \cdot \sum_{i=n_1}^{n-1} |e_{N(n)+\Delta}^{(N(n))}(i)|$, $\delta(n) = \delta$, $\varepsilon(n) = \frac{(n-n_1)\alpha - \phi + \delta}{\gamma(n-n_1)}$, $\varepsilon_2(n) = \frac{(n-n_1)\alpha - \phi - \delta}{\gamma(n-n_1)}$, 则式(3)与式(1)等价。

5 仿真结果及讨论

本文将提出的新算法应用于自适应系统辨识研究,由于文献[2]的FT算法在一定条件下是作者已知目前文献中效率最高的变抽头长度算法,因此新算法只与FT算法做比较。输入信号为零均值的有色信号,由方差为0.81的零均值高斯白噪声通过文献[2]中的传递函数 $H(z) = 0.35 + z^{-1} + 0.35z^{-2}$ 产生。输出噪声为与输入信号统计独立,方差为0.01的零均值高斯白噪声。所有滤波器MSE的学习曲线通过独立运行50次程序再取平均得到。

第1种情况 考虑两个未知系统,第1个系统的传递函数为 $H_1(z) = 1/(1-0.9z^{-1})$,第2个未知系统为一个FIR滤波器 $H_2(z)$,其单位脉冲响应 $h(n) = [1 -0.8 0.6 0.7 -0.5 0.1$

$-0.4 0.3 0.2]$ 。当步长 $\mu = \min(0.04, 0.36/M)$ (M 为抽头长度)时, $H_1(z)$ 与 $H_2(z)$ 的稳态MSE与抽头长度的关系如图1所示。由图1可知 $H_1(z)$ 的最优抽头长度为36左右, $H_2(z)$ 的最优抽头长度为9。在迭代次数 $n \leq 2000$ 或 $n > 4000$ 时,要辨识的未知系统 $H_0(z) = H_1(z)$,当 $2000 < n \leq 4000$ 时, $H_0(z) = H_2(z)$ 。取初始步长 $\mu = 0.03$,初始抽头长度 $N(0) = 8$, $\delta(0) = 1$, $\Delta = 4$,故滤波器的实际初始抽头长度为 $N(0) + \Delta = 12$ 。新算法中取 $T = 10$, $\varepsilon = 0.006$, $\varepsilon_2 = 0$, $k_1 = k_2 = 2$ 。FT算法取 $\alpha = 0.03$, $\gamma = 3$,本例中上述参数的性能优于文献[2]中推荐参数的性能,其它参数与新算法同。抽头长度的收敛曲线如图2所示,相应的MSE收敛曲线如图3所示。由图2与图3可知,新算法与FT算法的抽头长度、MSE都可以收敛。 $H_0(z) = H_1(z)$ 时,新算法的抽头长度收敛到36左右,由于 $H_1(z)$ 在抽头长度36附近MSE相差很小,所以新算法的抽头长度在36左右有一定的波动。FT算法的抽头长度只收敛到32左右,但波动相对较小。 $H_0(z) = H_2(z)$ 时,新算法与FT算法的抽头长度都可以收敛到9,波动很小。这是因为 $H_2(z)$ 在最优长度9附近的稳态MSE有较大的差异。由于新算法采用了自适应的抽头长度步长,因此具有较快的收敛速度。本仿真中初始抽头长度过大时新算法与FT算法相比有较快的收敛速度。

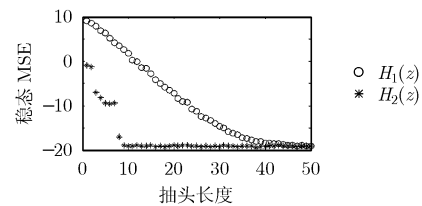


图1 $H_1(z)$ 与 $H_2(z)$ 的稳态MSE与抽头长度的关系

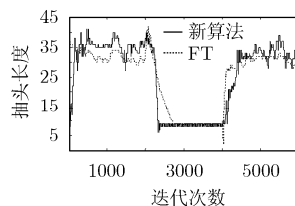


图2 未知系统为 $H_1(z)$ 与 $H_2(z)$ 时抽头长度的收敛曲线

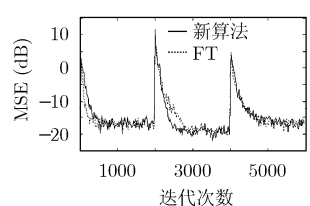


图3 未知系统为 $H_1(z)$ 与 $H_2(z)$ 时MSE的收敛曲线

第2种情况 未知系统的传递函数取文献[2]中的 $H_3(z) = \sum_{k=1}^{30} a_k z^{-k}$ 与 $H_4(z) = \sum_{k=1}^{80} b_k z^{-k}$, 其中 a_k 与 b_k 通过方差为1的零均值高斯白噪声产生。初始抽头长度为78,初始步长 $\mu = 0.009$, $\Delta = 8$,其它参数与第1种情况相同。当 $n \leq 5000$ 或 $n > 10000$ 时, $H_0(z) = H_3(z)$,当 $5000 < n \leq 10000$ 时, $H_0(z) = H_4(z)$ 。抽头长度的收敛曲线如图4所示,相应的MSE收敛曲线如图5所示。由图4、图5可知此例中新算法与FT算法抽头长度与MSE均能收敛,性能基本相当。同

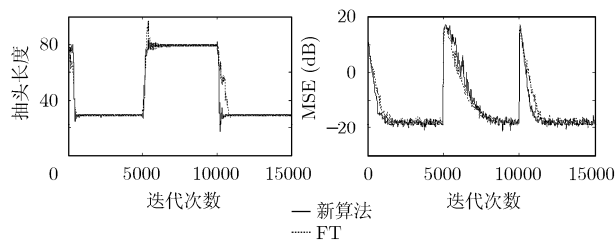


图4 未知系统为 $H_3(z)$ 与 $H_4(z)$ 时抽头长度的收敛曲线

图5 未知系统为 $H_3(z)$ 与 $H_4(z)$ 时MSE的收敛曲线

样地, 当自适应滤波器的初始抽头长度过大时, 新算法的性能略优。

6 结束语

本文从理论上论证了文献[2]中搜索最优抽头长度的代价函数的合理性, 将抽头长度调整与权值调整问题归结为单一的权值调整问题, 在此基础上, 提出了抽头长度一般更新公式及新的变抽头长度LMS算法, 并证明了新算法与文献[2-4]中的变抽头长度算法都可看作该公式的特例。自适应系统辨识的仿真结果表明新算法能够在系统模型的阶数变化时自适应地收敛到最优阶数。由于新算法采用了自适应抽头长度步长, 在本例仿真中新算法具有略优于FT算法的收敛速度。

参考文献

- [1] Gong Y and Cowan C F N. A novel variable tap-length algorithm for linear adaptive filters[C]. Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process., Montreal, Canada, May 2004, Vol. 2: 825-828.
- [2] Gong Y and Cowan C F N. An LMS style variable tap-length algorithm for structure adaptation[J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2400-2407.
- [3] Riera-Palou F, Noras J M, and Cruickshank D G M. Linear equalisers with dynamic and automatic length selection[J]. *Electron Letters*, 2001, 37(25): 1553-1554.
- [4] Gu Y, Tang K, and Cui H. LMS algorithm with gradient descent filter length[J]. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2004, 11(3): 305-307.
- [5] Gong Y and Cowan C F N. Structure adaptation of linear MMSE adaptive filters[J]. *IEE Proceedings-Vision, Image, Signal Process.*, 2004, 151(4): 271-277.

林 川: 男, 1980年生, 博士生, 研究方向为自适应信号处理与计算智能。

冯全源: 男, 1963年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为移动天线与智能天线系统、微波及毫米波技术、电子器件等。