

非局部多尺度分数阶微分图像增强算法研究

黄果^① 许黎^{*②③} 陈庆利^① 蒲亦非^③

^①(乐山师范学院互联网自然语言智能处理四川省高等学校重点实验室 乐山 614000)

^②(乐山师范学院物理与电子工程学院 乐山 614000)

^③(四川大学计算机科学学院 成都 610064)

摘要: 为了更好增强图像中的有用信息,改善图像视觉效果,该文提出了一种基于非局部多尺度分数阶微分图像增强算子(NMFD)。该算子首先将图像分成若干块子图像,计算每一块子图像的边缘强度系数、熵值和粗糙度等细节特征,将得到的特征数据在全局图像范围进行统一尺度的归一化,然后对这些归一化的数据进行加权求和作为图像的非局部特征值,最后利用指数函数建立图像细节特征和分数阶微分算子阶次之间的非线性量化关系,在不同的图像子块区域,确定不同尺度的分数阶微分阶次,实现图像的非局部多尺度增强。

关键词: 图像增强; 非局部多尺度分数阶微分算子; 图像熵值; 图像对比度

中图分类号: TN391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)12-2972-08

DOI: [10.11999/JEIT190032](https://doi.org/10.11999/JEIT190032)

Research on Non-local Multi-scale Fractional Differential Image Enhancement Algorithm

HUANG Guo^① XU Li^{②③} CHEN Qingli^① Pu Yifei^③

^①(Sichuan Province University Key Laboratory of Internet Natural Language Intelligent Processing, Le shan Normal University, Leshan 614000, China)

^②(School of Physics and Electronics, Le shan Normal University, Leshan 614000, China)

^③(School of Computer Science, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In order to enhance the useful information in the image and improve the visual effect of the image, a Non-local Multi-scale Fractional Differential(NMFD) image enhancement operator is proposed. The operator divides the image into several sub-images and calculates the edge intensity coefficient, entropy value and roughness of each sub-image, and the obtained feature data are normalized in a unified scale in the global image range. Then, the normalized data are weighted to be the non-local eigenvalues of the image. Finally, an exponential function is used to establish the non-linear quantization relationship between image detail features and the value of fractional order. Thus, the fractional order of different scales can be determined in different image sub-block regions, so that the non-local multi-scale image enhancement model is realized.

Key words: Image enhancement; Non-local Multi-scale Fractional Differential (NMFD) operator; Image entropy; Image contrast

收稿日期: 2019-01-15; 改回日期: 2019-07-31; 网络出版: 2019-08-30

*通信作者: 许黎 79017771@qq.com

基金项目: 国家自然科学基金(61201438), 四川省科技厅应用基础项目(2016JY0238), 四川省教育厅重点项目(18ZA0235), 四川省教育厅一般项目(18ZB0268, 18ZB0266), 乐山师范学院科研项目(JG2018-1-04)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61201438), The Sichuan Province Science and Technology Department Application Foundation Project (2016JY0238), The Sichuan Province Education Department Key Projects (18ZA0235), The Sichuan Province Education Department General Project (18ZB0268, 18ZB0266), The Research Fund of Leshan Normal University (JG2018-1-04)

1 引言

图像增强技术属于数字图像处理底层基本处理方法,其主要任务是去除图像中的噪声,增加图像整体对比度,增强图像边缘并且突出图像中的纹理细节等特征,使图像更加清晰。Mandelbrot^[1]提出了分形学说理论,尝试利用Riemann-Liouville分数阶微积分描述分形媒介中的布朗运动。许多学者利用分数阶微分算子的“非局部性”、“记忆性”以及“弱导性”等特性,将分数阶微积分理论应用到图像处理底层处理^[2-8],具有显著代表性是Pu等人^[9,10]提出了图像增强的分数阶微分算子。在此基础上,牛为华等人^[11]提出了分数阶方向导数图像增强算法;Gao等人^[12]提出了基于四元数的分数阶方向微分图像增强模型;李博等人^[13]构建了自适应分数阶图像增强算子和图像去噪算子。文献^[14,15]提出了基于自适应的局部分数阶微分图像增强算法。上述方法在图像增强中取得了较好效果,但是都存在或多或少的问题。大多数学者改进分数阶微分图像增强模型是利用分数阶微分算子和其它图像增强融合得到的混合处理模型,该改进模型的分数阶微分阶次是单一固定阶次,这样会导致分数阶微分算子在图像某些地方过度增强,在另一些地方增强不足。另外一些学者注意到了取单一固定阶次存在的问题,提出了自适应分数阶微分阶次的算法,但是这些算法几乎都是在分数阶微分掩模的范围内计算图像的梯度、熵值和纹理测度等图像特征,由于分数阶掩模算子的窗口尺度一般较小,因此包含的图像特征也有限,仅仅由极小范围的局部图像特征来确定分数阶微分的阶次,显然有不合理的地方。

针对上述方法存在的问题,本文提出了基于非局部多尺度的分数阶微分图像增强模型(Non-local Multi-scale Fractional Differential, NMF),该模型首先将整个图像分成 $M \times N$ 块图像子块,计算每一个图像子块的边缘系数、熵值和粗糙度等细节特征,然后将这些细节特征参数在全局图像范围内进行统一尺度的归一化,使其处理后的图像子块的边缘纹理细节特征值统一在 $[0, 1]$ 区间以内,再将每一图像子块归一化后的边缘系数、熵值以及粗糙度进行加权求和,最后利用加权指数函数来确定分数阶微分算子的阶次,作为分数阶掩模算子的权重系数。

2 数学物理背景

2.1 分数阶微积分定义

分数阶微积分的G-L(Grünwald-Letnikov)定义是将经典整数阶微积分的阶次由整数推广到非整数而推导出来的。假设任意函数 $f(x)$ 在区间 $[a, x]$ 内连续可导,由经典的微分定理推导可得 n 阶微分公式

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x-jh) \quad (1)$$

将式(1)微分阶次由整数拓展到非整数,并利用二项式系数与伽玛函数 $\Gamma(x)$ 之间的关系: $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)}$,然后用 $v \in R^+$ 取代正整数 n ,同时将 $n = \frac{t-a}{h}$ 代入式(1),即可得到分数阶微分的G-L定义,如式(2)所示

$${}_a^G D_x^v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^v} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \frac{\Gamma(v+1)}{j!\Gamma(v-j+1)} f(x-jh) \quad (2)$$

其中, h 表示步长, j 表示项数。

2.2 分数阶微分算子的幅频特性

任意平方可积的1维能量函数 $f(x) \in L^2(R)$,其傅里叶变换(Fourier Transform, FT)为 $\hat{f}(\omega) = \int_R f(x)e^{-i\omega x} dx$ 。设1维信号 $f(x)$ 的 n 阶导数为 $f^n(x)$ ($n \in Z^+$),由傅里叶变换的性质可以得到

$$D^n f(x) \stackrel{FT}{\Leftrightarrow} (\hat{D}f)^n(\omega) = (i\omega)^n \cdot \hat{f}(\omega) = d^n(\omega) \hat{f}(\omega) \quad (3)$$

在此基础上,设1维能量函数 $f(x)$ 的分数阶 v 阶导数为 $f^v(x)$ ($v \in R^+$),由分数阶傅里叶变换的性质可以得到^[16]

$$D^v f(x) \stackrel{FT}{\Leftrightarrow} (\hat{D}f)^v(\omega) = (i\omega)^v \cdot \hat{f}(\omega) = d^v(\omega) \cdot \hat{f}(\omega) \quad (4)$$

进一步将式 $d^v(\omega) = (i\omega)^v = \alpha^v(\omega) \cdot e^{i\theta^v(\omega)}$,及式 $\alpha^v(\omega) = |\omega|^v$, $\theta^v(\omega) = (v\pi)/2\text{sgn}(\omega)$ 代入式(4)可得到1维信号 $f(x)$ 的分数阶微分算子的滤波函数

$$(\hat{D}f)^v(\omega) = |\omega|^v e^{i\frac{v\pi}{2}\text{sgn}(\omega)} \quad (5)$$

设2维能量函数 $f(x, y)$ 的分数阶导数为 $f^v(x, y)$, $v \in R^+$,由分数阶傅里叶变换可分离性可知,2维能量函数 $f(x, y)$ 的分数阶微分滤波器也可认为是可分离的,如式(6)所示。

$$(\hat{D}f)^v(\omega_x, \omega_y) = \left(|\omega_x|^v e^{i\frac{v\pi}{2}\text{sgn}(\omega_x)} \right) \cdot \left(|\omega_y|^v e^{i\frac{v\pi}{2}\text{sgn}(\omega_y)} \right) \quad (6)$$

由式(6)可仿真出2维信号在不同分数阶微分阶次下的幅频特性曲面,如图1所示。图1(a)–图1(f)分别表示分数阶微分阶次分别为 $v=0, 0.5, 0.8, 1.0, 1.5$ 和 2.0 得到的微分算子的幅频特性曲面,直接观察可知,阶次为正数的分数阶微分算子属于高通滤波器,并且该高通滤波器的截止频率和分数阶微分阶次相关,随着微分阶次的增加,分数阶微分算子

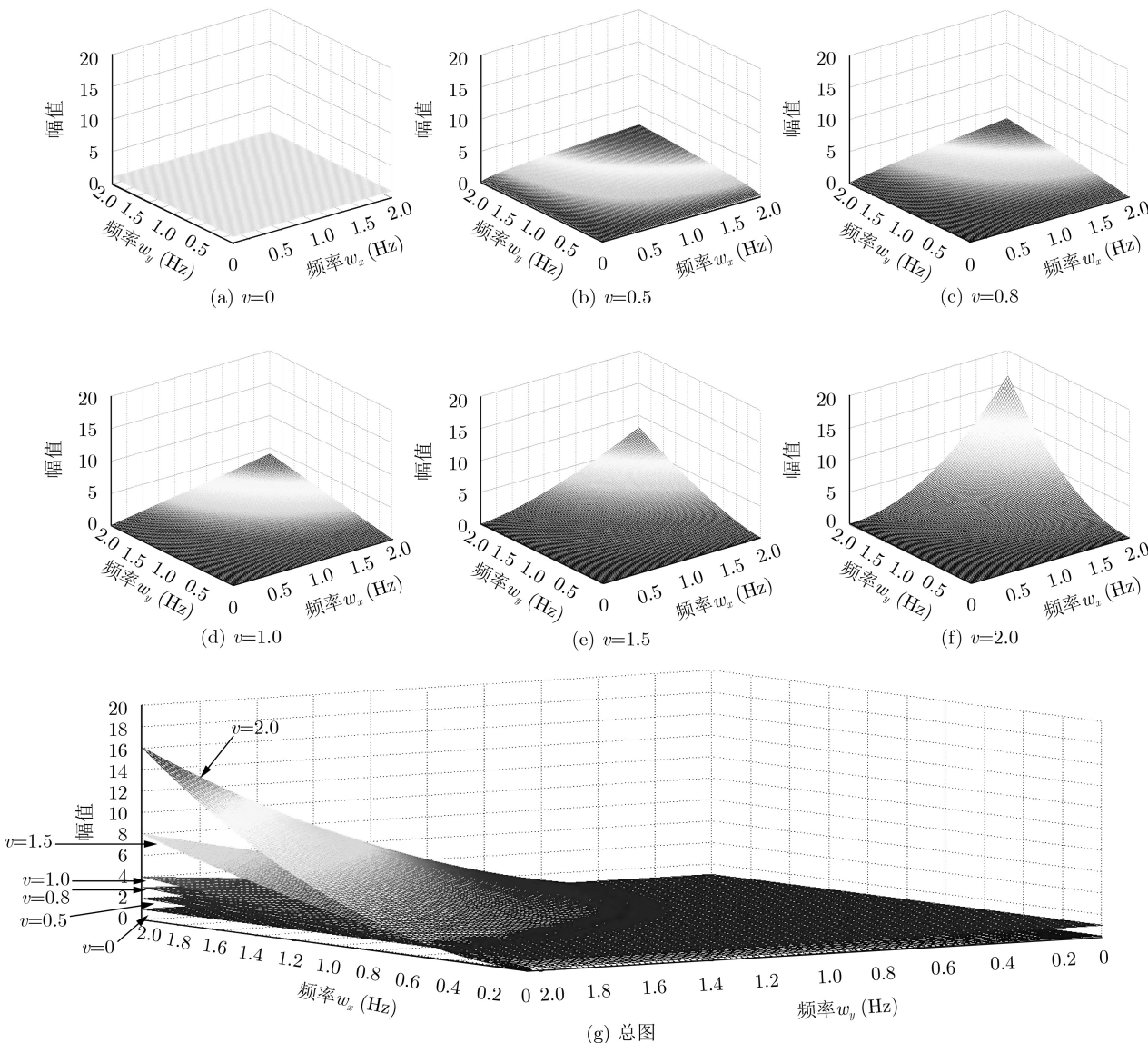


图1 2维信号不同阶次分数阶微分算子的幅频特性曲面

的高频滤波性能越强。图1(a)–图1(f)的分数阶微分曲面聚集在了同一坐标系，直接观察可知，阶次为正的分数阶微分算子对图像的低频信号都有衰减的作用，衰减的程度随着阶次的增加而大幅增强。

3 非局部多尺度分数阶微分增强算子

3.1 非局部描述

如图2所示，设整个原图像 $f(x, y)$ 为一个全局窗口 Ω_g ，确定划分块数后将全局窗口 Ω_g 按照一定比例拓展(拓展原图像的目的是为了保证图像能够被分成整数块)，再将全局窗口 Ω_g 进行 $M \times N$ 等分后可得到搜索窗口 Ω_s 。分数阶微分掩模算子在每一个搜索窗口 Ω_s 内从左到右，从上到下依次移动，掩模算子所覆盖的区域定义为模板窗口 Ω_m 。

本文提出的非局部多尺度分数阶微分图像增强算法包含3个窗口的概念，即全局窗口、搜索窗口

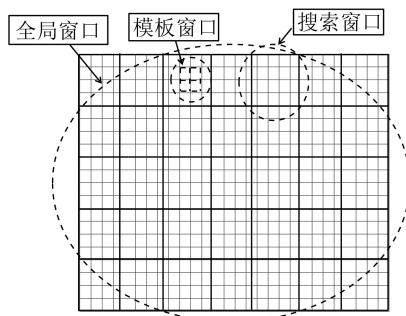


图2 窗口描述

以及模板窗口，窗口划分描述为

步骤1 计算整个原图像 $f(x, y)$ 为一个全局窗口 Ω_g 的尺寸为 $[XS, YS]$ ，根据图像划分子块数 M 和 N 确定搜索窗口 Ω_s 的尺寸为 $XSize = \left\lceil \frac{XS}{M} \right\rceil$ ， $YSize = \left\lceil \frac{YS}{N} \right\rceil$ ；

步骤2 根据分子块数 M 和 N 以及搜索窗口的尺寸 $XSize$ 和 $YSize$ 确定图像需要拓展的尺寸为 $\Delta_X = M \cdot XSize - XS$, $\Delta_Y = N \cdot YSize - YS$;

步骤3 由图像拓展两个方向的尺寸 Δ_X 和 Δ_Y 更新原图的 $f(x, y)$ 的全局窗口 Ω_g 的范围为 $XS = XS + \Delta_X$, $YS = YS + \Delta_Y$

3.2 多尺度描述

本文描述图像边缘和纹理特征采用图像的边缘强度系数、图像熵值和图像粗糙度来量化,即通过计算任子块图像 $f_{m,n}(x, y)$ 的边缘强度系数、熵值和粗糙度来描述图像特征信息。

(1)图像边缘强度系数,即图像梯度的幅值,表示图像边缘的强度信息,图像区域中的像素点灰度值的差别越大,图像的边缘强度越大。图像的边缘强度系数定义为

$$\begin{aligned} EM(f(x, y)) &= \sum_{i=1}^{XSize} \sum_{j=1}^{YSize-1} (|f_{m,n}(i, j) - f_{m,n}(i, j+1)|) \\ &+ \sum_{i=1}^{XSize-1} \sum_{j=1}^{YSize} (|f_{m,n}(i, j) - f_{m,n}(i+1, j)|) \quad (7) \end{aligned}$$

其中, EM 表示图像的边缘强度系数。

(2)图像熵,表示图像所包含的平均信息量的大小,熵值越大则所含信息量越多,图像的熵值定义为

$$En(f_{m,n}(x, y)) = - \sum_{L=1}^{NUM_GL} P(f_{m,n}) \lg P(f_{m,n}) \quad (8)$$

其中, En 为熵值, NUM_GL 表示图像灰度级数, P 为图像素点出现概率函数;

(3)图像粗糙度,表示图像纹理特征的细腻程度,是图像区域像素点灰度值相对偏移测度,在光滑区域图像粗糙度较小,在细节丰富区域图像粗糙度较大,图像粗糙度定义为

$$Ro(f_{m,n}(x, y)) = 1 - \frac{1}{\sigma(f_{m,n}(x, y))^2} \quad (9)$$

其中, Ro 为图像粗糙度,为图像局部方差函数。

本文提出的非局部多尺度分数阶微分图像增强算法关于微分阶次的多尺度描述为

步骤1 设定图像的分块数目为 $M \times N$,在图像的全局窗口 Ω_{global} 中确定任意搜索窗口 Ω_{search} 区域;

步骤2 利用式(7)–式(9),依次计算每一个搜索窗口对应图像子块的边缘强度系数、图像熵值以及图像粗糙度,分别存入特征矩阵 EM , ET , RH 。

步骤3 分别将边缘强度系数矩阵 EM ,熵值矩阵 ET 和粗糙度矩阵 RH 进行归一化处理,使处理后的图像特征值在 $0 \sim 1$ 区间,归一化方法如式(10)所示

$$\left. \begin{aligned} EM &= \frac{EM - \min(EM)}{\max(EM) - \min(EM)} \\ ET &= \frac{ET - \min(EM)}{\max(EM) - \min(EM)} \\ RH &= \frac{RH - \min(RH)}{\max(RH) - \min(RH)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

步骤4 将归一化后的边缘强度矩阵 EM ,熵值矩阵 ET 和粗糙度矩阵 RH 进行加权求和,存入图像细节特征矩阵 DF ,如式(11)所示

$$DF = k_1 EM + k_2 ET + k_3 RH \quad (11)$$

其中, k_1, k_2, k_3 为权重调节系数, $k_1 + k_2 + k_3 = 1$ 。

步骤5 利用指数函数的特性,在实数域内为增函数,且增强幅度随自变量的增加而增强,可以得到非局部分数阶微分阶次矩阵 FV_{nl} ,如式(12)所示

$$FV_{nl} = e^{\lambda \frac{DF - \min(DF)}{\max(DF) - \min(DF)}} - \varepsilon \quad (12)$$

其中, λ 和 ε 为调节参数。

步骤6 利用式(7)–式(9)分别计算模板窗口对应的图像子块局部区域的边缘强度矩阵 EM ,图像熵值矩阵 ET 和粗糙度矩阵 RH ,可确定局部分数阶微分算子阶次矩阵 f_{v_l} ,如式(13)所示

$$f_{v_l} = t_1 EM + t_2 ET + t_3 RH \quad (13)$$

其中, t_1, t_2, t_3 为权重调节系数, $t_1 + t_2 + t_3 = 1$ 。

步骤7 本文分数阶微分算子阶次采用“整体为主,局部补偿”的原则,由此可得

$$FV = \{\alpha FV_{nl} : \alpha < 1 \ f_{v_l} \leq T, FV_{nl} : T_1 < f_{v_l} < T_2, \min(\beta FV_{nl}, 1) : \beta > 1 \ f_{v_l} \geq T_2\} \quad (14)$$

其中, T_1, T_2 为阈值上限。

3.3 NMF D图像增强算子

根据分数阶傅里叶变换的性质可知^[16],图像 $f(x, y)$ 的分数阶微分算子在 X 轴和 Y 轴方向是条件可分离的,由此可得分数阶微积分G-L定义算子沿 X 轴和 Y 轴方向为

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^v f(x, y)_x &\triangleq f(x, y) + (-v)f(x-1, y) \\ &+ \frac{-v(-v+1)}{2} f(x-2, y) + \dots \\ &+ \frac{\Gamma(-v+m)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-v)} f(x-m, y) \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_a^G D_t^v f(x, y)_y &\triangleq f(x, y) + (-v)f(x, y-1) \\ &+ \frac{-v(-v+1)}{2} f(x, y-2) + \dots \\ &+ \frac{\Gamma(-v+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(-v)} f(x, y-n) \quad (16) \end{aligned}$$

将式(15)、式(16)推广到图像其余6个方向,得到8方向的分数阶G-L微分掩模算子,如图3所示,

W_{f_m}	...	0	0	W_{f_m}	0	0	...	W_{f_m}
0	...	0	0	...	0	0	...	0
0	0	W_{f_2}	0	W_{f_2}	0	W_{f_2}	0	0
0	0	0	W_{f_1}	W_{f_1}	W_{f_1}	0	0	0
W_{f_m}	...	W_{f_2}	W_{f_1}	W_{f_0}	W_{f_1}	W_{f_2}	...	W_{f_m}
0	0	0	W_{f_1}	W_{f_1}	W_{f_1}	0	0	0
0	0	W_{f_2}	0	W_{f_2}	0	W_{f_2}	0	0
0	...	0	0	...	0	0	...	0
W_{f_m}	...	0	0	W_{f_m}	0	0	...	W_{f_m}

图3 分数阶微分G-L定义下的掩模算子

该算子具有各向旋转不变性，算子 W 中的滤波系数如式(17)所示

$$\left. \begin{aligned} W_{f_0} &= 1 \\ W_{f_1} &= -v \\ W_{f_2} &= \frac{v(v-1)}{2} \\ &\vdots \\ W_{f_m} &= \frac{v(v-1)(v-2)\cdots(v-m+1)}{m!} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

在此基础上，将本文提出的非局部多尺度分数阶微分掩模算子的权重系数归一化处理后，再与原图像进行空间卷积运算，如式(18)所示。由此可得NMFD算子增强后的图像

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \text{NMFD}(f(x, y)) \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \min \left(\left(f_{i,j}(x, y) \cdot \frac{W_v}{\max(W_v)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f_{i,j}(x, y) \right), 1 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

其中， $\min(\cdot)$ 为避免累加像素值越界。

4 实验设计及对比分析

4.1 NMFD增强模型参数选择

本文实验采用主观和客观评价标准相结合的实验对比方法，主观方法通过直接观察，各种增强方法处理后图像纹理特征的对比效果。客观方法通过计算各种增强方法处理后图像的边缘保持系数、平均梯度、图像熵以及对比度等客观数据。NMFD模型中可选参数较多，对模型加权系数和阈值参数可以按照多次试验后的经验值或均分比例确定。本文的重要创新是图像分块对非局部分数阶微分算子阶次的影响，以下内容主要研究图像的分块数目对图像增强效果的影响。按照上述假设，可以设定权重系数 $k_1 = k_2 = k_3 = 1/3$ ， $t_1 = t_2 = t_3 = 1/3$ ，指数加权函数参数 $\lambda = 1$ ， $\varepsilon = 0$ ，非局部阶次矩阵和局部阶次系数对应阶次的缩放系数 $\alpha = 1.2$ ， $\beta = 0.8$ ，阈值系数 $T_1 = 0.1$ ， $T_2 = 0.5$ 。以下实验分别将图像分解成 2×2 块， 4×4 块， 8×8 块， 16×16 块和 32×32 块，分数阶模板窗口选择 5×5 大小，结果如图4所示。

由表1可知，随着图像划分窗口数量的增加，图像的平均梯度、边缘保持系数、粗糙度以及信息熵都在适当增大。由于窗口数量的增加会大幅提高算法的时间复杂度，结合上述指标数据综合分析，本文提出的NMFD模型采用 16×16 的分块数量。

4.2 实验结果与对比分析

为了验证本文提出的NMFD图像增强模型与目前流行的图像增强模型，如拉普拉斯(Laplace)图像



图4 NMFD增强模型在不同窗口尺寸下的增强效果

表1 NMF D增强模型在不同窗口尺寸下实验数据对比

窗口数量	平均梯度	边缘保持系数	对比度	熵
2×2	11.3139	1.7529	0.8152	7.5301
4×4	11.6058	1.8011	1.0725	7.5524
8×8	12.4049	2.0808	1.0893	7.5829
16×16	13.5831	2.4982	1.8659	7.5966
32×32	15.6209	2.9672	1.9856	7.5686

增强模型、自适应G-L分数阶微分图像增强模型、直方图增强HE模型,限制对比度直方图增强均衡CLAHE模型的性能比较,本实验从主观观察和客观数据两方面对Lena图像进行了实验对比分析。图5表示目前各种主流增强模型增强处理后的效果对比图。Laplace算子和G-L算子主要提高了图像的强边缘和纹理等细节信息,但是这两种图像增强方法对图像整体的对比度提高较弱。直方图均衡化图像增强模型和限制对比度直方图增强模型主要提高了图像的对比度效果,其中限制对比度直方图增强模型对低对比度图像增强后的视觉效果更佳,但是这两种基于统计的图像增强方法对图像边缘和纹理等细节特征增强提升不足。本文提出的NMF D图像增强模型,由于在不同图像区域采用了不同尺度的分数阶微分阶次,能够根据原图中人物或者景物的边缘和纹理等细节信息进行自适应增强,并且考虑了非局部窗口中的像素信息,还能够提升图像的整体对比度。图6表示目前各种主流增强模型增强图像后的纹理特征对比,直接观察可知,每种图像增强方法都能够在一定程度上增加原图像的边缘和纹理特征,其

中,Laplace算子和分数阶G-L算子主要增强图像的边缘信息,HE(Histogram Enhancement)图像增强方法和CLAHE(Contrast Limited Adaptive Histogram Equalization)图像增强方法主要增强图像的整体对比度,但是对图像中的边缘和强纹理信息提升不足。本文提出的NMF D图像增强模型,既能够增强图像的边缘和纹理信息,又能够增强图像的对比度。表2记录了不同方法的图像增强模型增强图像后的实验数据对比,可知本文提出的NMF D图像增强模型的平均梯度、边缘保持系数、对比度和图像熵值较Laplace算子和分数阶G-L算子,HE图像增强方法和CLAHE图像增强方法有不同程度的提高。

5 结束语

针对已有分数阶微分图像增强模型使用单一微分阶次缺点,本文利用图像局部和非局部具有自相似冗余特性,即一幅图像在不同区域具有不同的纹理细节特征,将图像合理分块后,在不同区域计算不同的分数阶微分阶次,为防止增强后图像出现明亮不均的块状效应,本文又将这些微分算子在全局图像范围内统一尺度进行归一化处理,并且将归一化处理的阶次限定在一定的范围。最后,将本文所提NMF D图像增强模型与目前流行的图像增强模型进行了实验对比,从主观视觉观测和客观特征数据两方面对比分析,都表明了本文图像增强模型能够更加有效的增强图像对比度和纹理等细节特征。然而,本文图像增强模型将图像进行了分块处理,算



图5 不同方法的增强模型增强Lena图像的效果对比

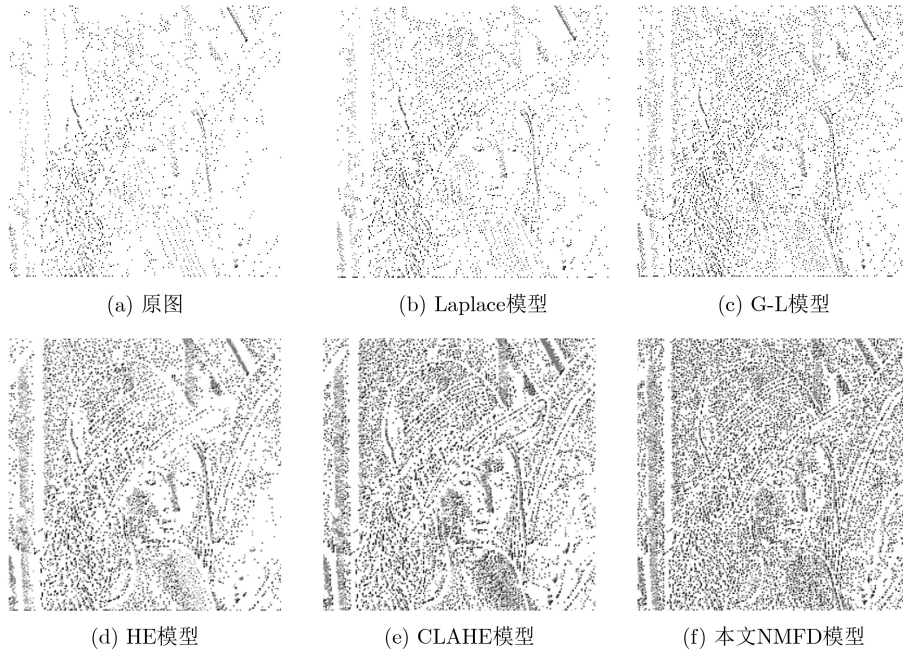


图6 不同方法的增强模型增强lena图像后的纹理特征对比

表2 不同方法的图像增强模型增强lena图像的实验数据对比

增强类型	平均梯度	边缘保持系数	对比度	熵
Laplace	10.9327	2.1957	1.3521	7.1963
G-L	10.8623	1.7908	0.9982	6.8723
HE	10.7522	1.4451	0.7538	5.9849
CLAHE	12.4368	1.8789	0.9823	7.3692
NMFD	14.2039	2.2321	1.3640	7.7404

法时间复杂度会适当增加,因此如何寻找快速处理方法是今后需要进一步研究的方向。

参考文献

- [1] MANDELNBROT B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.
- [2] AZARANG A and GHASSEMIAN H. Application of fractional-order differentiation in multispectral image fusion[J]. *Remote Sensing Letters*, 2017, 9(1): 91–100. doi: [10.1080/2150704X.2017.1395963](https://doi.org/10.1080/2150704X.2017.1395963).
- [3] LI Bo and XIE Wei. Adaptive fractional differential approach and its application to medical image enhancement[J]. *Computers & Electrical Engineering*, 2015, 45: 324–335. doi: [10.1016/j.compeleceng.2015.02.013](https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2015.02.013).
- [4] BAI Jian and FENG Xiangchu. Fractional-order anisotropic diffusion for image denoising[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(10): 2492–2502. doi: [10.1109/TIP.2007.904971](https://doi.org/10.1109/TIP.2007.904971).
- [5] HU Fuyuan, SI Shaohui, WONG H S, et al. An adaptive approach for texture enhancement based on a fractional differential operator with non-integer step and order[J]. *Neurocomputing*, 2015, 158: 295–306. doi: [10.1016/j.neucom.2014.10.013](https://doi.org/10.1016/j.neucom.2014.10.013).
- [6] HE Ning, WANG Jinbao, ZHANG Lulu, et al. An improved fractional-order differentiation model for image denoising[J]. *Signal Processing*, 2015, 112: 180–188. doi: [10.1016/j.sigpro.2014.08.025](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2014.08.025).
- [7] YUAN Jianjun and LIU Lipei. Anisotropic diffusion model based on a new diffusion coefficient and fractional order differential for image denoising[J]. *International Journal of Image and Graphics*, 2016, 16(1): 1650003. doi: [10.1142/S0219467816500030](https://doi.org/10.1142/S0219467816500030).
- [8] JALAB H A, IBRAHIM R W, and AHMED A. Image denoising algorithm based on the convolution of fractional Tsallis entropy with the Riesz fractional derivative[J]. *Neural Computing and Applications*, 2017, 28(S1): 217–223. doi: [10.1007/s00521-016-2331-7](https://doi.org/10.1007/s00521-016-2331-7).
- [9] PU Yifei, ZHOU Jiliu, and YUAN Xiao. Fractional differential mask: A fractional differential-based approach for multiscale texture enhancement[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, 19(2): 491–511. doi: [10.1109/TIP.2009.2035980](https://doi.org/10.1109/TIP.2009.2035980).
- [10] PU Yifei, SIARRY P, CHATTERJEE A, et al. A fractional-order variational framework for retinex: Fractional-order partial differential equation-based formulation for multi-scale nonlocal contrast enhancement with texture preserving[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2018, 27(3): 1214–1229. doi: [10.1109/TIP.2017.2779601](https://doi.org/10.1109/TIP.2017.2779601).
- [11] 牛为华, 孟建良, 崔克彬, 等. 利用Grünwald-Letnikov分数阶方向导数的图像增强方法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2016, 28(1): 129–137. doi: [10.3969/j.issn.1003-9775.2016.01.016](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-9775.2016.01.016).

- NIU Weihua, MENG Jianliang, CUI Kebin, *et al.* Image enhancement method using grümwald-letnikov fractional directional differential[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2016, 28(1): 129–137. doi: [10.3969/j.issn.1003-9775.2016.01.016](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-9775.2016.01.016).
- [12] GAO Caobang, ZHOU Jiliu, HU Jingrong, *et al.* Edge detection of colour image based on quaternion fractional differential[J]. *IET Image Processing*, 2011, 5(3): 261–272. doi: [10.1049/iet-ipr.2009.0409](https://doi.org/10.1049/iet-ipr.2009.0409).
- [13] 李博, 谢巍. 基于自适应分数阶微积分的图像去噪与增强算法[J]. *系统工程与电子技术*, 2016, 38(1): 185–192. doi: [10.3969/j.issn.1001-506X.2016.01.29](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-506X.2016.01.29).
- LI Bo and XIE Wei. Image enhancement and denoising algorithms based on adaptive fractional differential and integral[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2016, 38(1): 185–192. doi: [10.3969/j.issn.1001-506X.2016.01.29](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-506X.2016.01.29).
- [14] 陈庆利, 黄果, 门涛, 等. 数字图像的局部分数阶微分增强[J]. *四川大学学报: 工程科学版*, 2016, 48(4): 115–122. doi: [10.15961/j.jsuese.2016.04.016](https://doi.org/10.15961/j.jsuese.2016.04.016).
- CHEN Qingli, HUANG Guo, MEN Tao, *et al.* Local fractional differential algorithm for image enhancement[J]. *Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition*, 2016, 48(4): 115–122. doi: [10.15961/j.jsuese.2016.04.016](https://doi.org/10.15961/j.jsuese.2016.04.016).
- [15] 姒绍辉, 胡伏原, 付保川, 等. 自适应非整数步长的分数阶微分掩模的图像纹理增强算法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2014, 26(9): 1438–1449.
- SI Shaohui, HU Fuyuan, FU Baochuan, *et al.* An algorithm for texture enhancement based on fractional differential mask using adaptive non-integer step[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2014, 26(9): 1438–1449.
- [16] ZHAO Mengdan, GAO Xuzhen, PAN Yue, *et al.* Image encryption based on fractal-structured phase mask in fractional Fourier transform domain[J]. *Journal of Optics*, 2018, 20(4): 045703. doi: [10.1088/2040-8986/aab247](https://doi.org/10.1088/2040-8986/aab247).
- 黄果: 男, 1980年生, 博士, 副教授, 主要研究领域为分数阶微积分理论、数字信号处理、模式识别。
- 许黎: 女, 1982年生, 博士生, 讲师, 研究领域为分数阶微积分理论、数字信号处理、分数阶忆阻。
- 陈庆利: 男, 1975年生, 博士, 副教授, 主要研究领域为分数阶微积分理论、数字信号处理、模式识别。
- 蒲亦非: 男, 1975年生, 博士, 教授, 主要研究领域为分数阶微积分理论、数字信号处理、模式识别、分数阶忆阻。