第 32 卷第 3 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.32No.3
2010 年 3 月 Journal of Electronics & Information Technology Mar.2010

一种用于离散比特分配的改进注水算法

赵 力 孙献璞 张海林
(西安电子科技大学通信工程学院 西安 710071)

摘 要：该文针对 OFDM 系统的离散比特分配问题，提出一种改进的注水算法。该算法的实现借助于文中定义的比特水线——分配给某个子载波的功率直接满足整数比特约束的注水线。先用最大信道增益子载波的比特水线进行离散比特分配，再调整分配结果以满足总发射功率约束。理论证明和分析显示，该算法能实现最优比特分配，运算复杂度仅与子载波数量有关。

关键词：正交频分复用；注水算法；比特分配；贪婪算法
中图分类号：TN92 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2010)03-0638-05
DOI:10.3724/SP.J.1146.2009.00328

An Improved Water-filling Algorithm for Discrete Bit Allocation

Zhao Li Sun Xian-pu Zhang Hai-lin
(*School of Telecommunication Engineering*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

Abstract: In this paper, an improved water-filling algorithm is proposed for the problem of Discrete Bit Allocation DBA in OFDM systems. The bit-water-level, defined in this paper as the water-filling level under which the power allocated to a certain sub-carrier satisfies the integer bit constraint, is used in the proposed algorithm. First, using the bit-water-levels of the sub-carrier with the maximal channel gain, bits and power are allocated to all the sub-carriers. Then, the allocation results are adapted to satisfy the total transmit power constraint. It is proved that the algorithm yields the optimal solution and its computational complexity depends only on the number of sub-carriers.

Key words: OFDM; Water-filling algorithm; Bit allocation; Greedy algorithm

1 引言

对于正交频分复用(OFDM)等多载波系统，在发送端知道信道状态信息(CSI)的情况下，动态地给各子载波分配传输比特数和功率，可以明显地提高系统性能，比特和功率分配是多载波系统设计中的一个重要问题。

通常，通信系统的发射功率总是受限的。在总发射功率和误比特率上限约束下，信息速率最大化的功率分配方法是注水算法[1]，但注水算法假设调制星座是无限粒度的，得到的比特分配结果不一定是整数，用于离散比特分配时一般不能得到最优结果。

一种最优的离散比特分配算法是 Hughes-Hartogs 算法[2]，即所谓贪婪算法。贪婪算法每分一个比特都需要对所有子载波搜索一次，运算复杂度和子载波数与分配比特数的乘积成正比。为了降低运算复杂度，人们转而将目光投向一些数据速率损失(DRL，相对于最优比特分配)不大，但复杂度较小的次优算法。

一种具有代表性的次优算法是文献[1]提出的迭代注水算法。这种方法使用注水法给各子载波分配功率，但需要反复调整注水线，以使分配的总比特数尽可能大。它的运算复杂度和子载波数与迭代次数的乘积成正比，DRL 与迭代步长、迭代次数以及信道的平均信噪比有关。作者给出的优选结果是 10 次迭代，信噪比大于 10 dB 时可以将 DRL 控制在 0.5%左右，而信噪比较小时 DRL 却比较大。后续提出的算法[3,4]进一步降低迭代次数或减少低信噪比下的 DRL，结果表明在合理的 DRL 下所需的迭代次数为 5 次左右。最新研究成果[5−9]表明，当前的主要研究方向或者具有实际应用价值的算法仍然是次优算法。

根据注水原理，本文先定义了比特水线，并证明了比特水线的一条性质，然后提出一种改进的注水算法，该算法符合文献[10]的最优比特分配充份必要条件，属最优算法。分析显示，算法的运算复杂度仅与子载波数量有关，如果将运算量等效为迭代次数，则只有 4~5 次。

2 离散比特分配的速率最大化问题

2.1 问题描述

设多载波系统的总发射功率上限为 P，第 m 个

2009-03-13 收到，2009-10-09 改回
国家自然科学基金(60772317)和西安电子科技大学 111 工程(B08038)资助课题
通信作者：赵力 zhaolixidian@163.com

子载波的信道增益为 g_m，$m=1,2,\cdots,M$，其中 M 为子载波数，各子载波上的高斯白噪声功率统一为 σ^2，接收端要求的无编码误比特率上限为 BER。如果给子载波 m 分配功率 p_m，则可分配的比特数 b_m 为[1]

$$b_m=\log_2\left(1+\frac{g_m p_m}{\sigma^2\Gamma}\right) \tag{1}$$

其中 Γ 是保证无编码误比特率不超过 BER 的信噪比裕量。由于从式(1)得到的 b_m 不一定是整数，所以需要向下取整，即

$$\hat{b}_m=\lfloor b_m \rfloor \tag{2}$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示向下取整，$\hat{b}_m$ 是非负整数。分配的总比特数 B 为

$$B=\sum\nolimits_{m=1}^{M}\hat{b}_m \tag{3}$$

按照式(1)，给子载波 m 分配整数比特 $\hat{b}_m$ 所需的功率 $\hat{p}_m(\hat{b}_m)$ 为

$$\hat{p}_m(\hat{b}_m)=(2^{\hat{b}_m}-1)\sigma^2\Gamma/g_m \tag{4}$$

所以，离散比特分配的速率最大化问题可以描述为

$$\left.\begin{aligned}&\max(B)\\ &\text{s.t.}\quad \sum\nolimits_{m=1}^{M}\hat{p}_m(\hat{b}_m)\le P\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

2.2 最优分配的充分必要条件

给子载波 m 分配第 $\hat{b}_m$ 个比特所需的功率增量 $\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)$ 定义为

$$\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)=\begin{cases}\hat{p}_m(\hat{b}_m)-\hat{p}_m(\hat{b}_m-1), & \hat{b}_m\ge 1\\ 0, & \hat{b}_m=0\end{cases} \tag{6}$$

将式(4)代入式(6)可得

$$\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)=\begin{cases}2^{\hat{b}_m}\sigma^2\Gamma/(2g_m), & \hat{b}_m\ge 1\\ 0, & \hat{b}_m=0\end{cases} \tag{7}$$

设比特分配结果为子载波 m 分配到 $\hat{b}_m$ 个比特，根据式(7)，对于任意 $\hat{b}_m\ge 0$，总有 $\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)<\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m+1)$。所以，各子载波上已分配比特的最大功率增量可以表示为 $\max_m(\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m))$，未分配比特的最小功率增量可以表示为 $\min_m(\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m+1))$。对于式(5)所描述的速率最大化问题，比特分配结果最优的充分必要条件1)可以描述为

$$\max\nolimits_m\left(\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)\right)\le\min\nolimits_m\left(\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m+1)\right) \tag{8}$$

$$0\le P-\sum\nolimits_{m=1}^{M}\hat{p}_m(\hat{b}_m)<\min\nolimits_m\left(\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m+1)\right) \tag{9}$$

其中式(9)的含义是：总分配功率不大于发射功率，且剩余功率不足以再分配一个比特。

1)原充分必要条件见文献[10]。为了便于理解，这里对充分必要条件的表达方式做了适当调整

3 比特水线

3.1 注水算法

对于速率最大化问题，如果不考虑整数比特限制，用拉格朗日乘数法对各子载波进行功率分配，则子载波 m 分配到的功率为

$$p_m=\sigma^2\Gamma\left[\lambda-1/g_m\right]^+,\quad \text{s.t.}\sum\nolimits_{m=1}^{M}p_m=P \tag{10}$$

其中 $[x]^+\triangleq\max(x,0)$。因为 $1/g_m$ 可以看作是“碗底”，而 λ 看作水平线，p_m 的大小与水平线及“碗底”的差值成正比，所以这种功率分配方法称为注水算法，λ 也称为注水线。

3.2 比特水线的概念

在式(10)中，注水线 λ 受功率 P 约束。如果不考虑功率约束，以任意 $\lambda\ge 0$，用注水法对各子载波进行离散比特分配，则子载波 m 的分配过程为

(1)注水功率分配：$p_m=\sigma^2\Gamma\left[\lambda-1/g_m\right]^+$；

(2)比特分配：将 p_m 代入式(1)，再代入式(2)，可得 $\hat{b}_m=\left\lfloor\left[\log_2(\lambda g_m)\right]^+\right\rfloor$；

(3)功率调整：将 $\hat{b}_m$ 代入式(4)，可得 $\hat{p}_m(\hat{b}_m)$；

由 $\lfloor x\rfloor\le x$ 可知，每个子载波的调整后功率与注水功率的关系都为 $\hat{p}_m(\hat{b}_m)\le p_m$。设 λ 取某特殊值时，其中某一个子载波 n 的调整后功率 $\hat{p}_n(\hat{b}_n)$ 与注水功率 p_n 相等，记此特殊 λ 值为 $\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)$，则 $\sigma^2\Gamma(2^{\hat{b}_n}-1)/g_n=\sigma^2\Gamma[\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)-1/g_n]^+$，这时

$$\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)=\begin{cases}2^{\hat{b}_n}/g_n, & \hat{b}_n\ge 1\\ 0, & \hat{b}_n=0\end{cases} \tag{11}$$

本文将 $\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)$ 称为比特水线，n 为比特水线的参考子载波。即：如果 $\lambda=\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)$，那么当 $m=n$ 时，$\hat{p}_m(\hat{b}_m)=p_m$ 一定成立，p_m 直接满足整数比特约束；而当 $m\ne n$ 时，对于 $\hat{p}_m(\hat{b}_m)<p_m$ 或者 $\hat{p}_m(\hat{b}_m)=p_m$ 我们并不关心。

3.3 比特水线的性质

给定 $\hat{b}_n\ge 1$，用注水法以 $\lambda=\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)$ 对各子载波进行离散比特分配，其中子载波 m 分配到的比特数为 $\hat{b}_m$，则有 $\Delta\hat{p}_n(\hat{b}_n-1)<\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)\le\Delta\hat{p}_n(\hat{b}_n)$ 或者 $\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)=0$。

证明　当 $\lambda=\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)$ 时，根据 3.2 节中的步骤 2 可知子载波 m 分配到的比特数 $\hat{b}_m$ 为

$$\hat{b}_m=\left\lfloor\left[\log_2\left(\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)g_m\right)\right]^+\right\rfloor \tag{12}$$

(1)如果 $\log_2(\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)g_m)<1$，则 $\hat{b}_m$=0，$\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)=0$。

(2)如果 $\log_2(\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)g_m)\ge 1$，则 $\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)=2\,\hat{}\left(\left\lfloor\log_2\left(\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)\right)g_m\right\rfloor\right)\sigma^2\Gamma/(2g_m)$。因为 $\lfloor x\rfloor\le x$，所以 $\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)\le 2\,\hat{}\left(\log_2\left(\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)g_m\right)\right)\sigma^2\Gamma/(2g_m)=2^{\hat{b}_n}\sigma^2\Gamma$

$/(2g_n)=\Delta\hat{p}_n(\hat{b}_n)$，又因为 $\lfloor x\rfloor > x-1$，所以 $\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m) > 2^{\left(\log_2\left(\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)g_m\right)-1\right)}\sigma^2\Gamma/(2g_m)=2^{\hat{b}_n-1}\cdot\sigma^2\Gamma/(2g_n)\ge\Delta\hat{p}_n(\hat{b}_n-1)$。 证毕

4 比特水线算法

4.1 基本原理

设 $\hat{b}_n\ge 1$，先研究 $\lambda=\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)$ 时的离散比特分配结果 $\{\hat{b}_m, m=1,2,\cdots,M\}$。根据比特水线的性质可知 $\max_m(\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m))=\Delta\hat{p}_n(\hat{b}_n)$。因为 $[x]^+\ge x$，$\mathrm{floor}(x)+1>x$，根据式(12)有 $\hat{b}_m+1>\log_2(\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)g_m)$，所以 $\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m+1)>2^{(\log_2(\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)g_m))}\sigma^2\Gamma/(2g_m)=\Delta\hat{p}_n(\hat{b}_n)$，即分配结果满足式(8)。

再研究 $\lambda=\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n-1)$ 和 $\lambda=\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)$ 时的离散比特分配结果之间的关系。当 $\hat{b}_n>1$ 时，由式(11)可知 $\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n-1)=\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)/2$，再由式(12)可知，如果子载波 m 在 $\lambda=\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n)$ 时分配到的比特数为 $\hat{b}_m$，则在 $\lambda=\hat{\lambda}_n(\hat{b}_n-1)$ 时分配到的比特数为 $[\hat{b}_m-1]^+$；当 $\hat{b}_n=1$ 时，如果 $n=K$ 为最大信道增益子载波，则任意子载波 m 在 $\lambda=\hat{\lambda}_K(1)$ 时分配到的比特数 $\hat{b}_m\le 1$，在 $\lambda=\hat{\lambda}_K(0)$ 时分配到的比特数为 0，也可以表示为 $[\hat{b}_m-1]^+$。所以 $\lambda=\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K)$ 和 $\lambda=\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K-1)$ 时的总分配功率总可以分别表示为 $P_1=\sum_{m=1}^{M}\hat{p}_m(\hat{b}_m)$ 和 $P_0=\sum_{m=1}^{M}\hat{p}_m([\hat{b}_m-1]^+)$。由于 $\hat{p}_m(\hat{b}_m)-\hat{p}_m([\hat{b}_m-1]^+)=\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)$，所以 $P_1-\sum_{m=1}^{M}\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)=P_0$。

根据以上结论，可以得出一种比特水线算法，基本原理是先寻找比特水线 $\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K)$ 和 $\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K-1)$，找到的条件是 $P_0\le P<P_1$，然后从 P_1 中逐步减去 $\{\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m), m=1,2,\cdots,M\}$ 中的最大值，并以此差值作为总分配功率(或者给 P_0 逐步加上 $\{\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m), m=1,2,\cdots,M\}$ 中的最小值，并以和值作为总分配功率)，以式(9)作为结束条件。这个过程的每一步结果仍满足式(8)，而最终结果满足式(9)，所以能实现最优分配。

4.2 算法实现

设 $\hat{b}_K\ge 1$，$\lambda=\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K)$ 和 $\lambda=\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K-1)$ 时的总分配功率分别为 $P_1=\sum_{m=1}^{M}\hat{p}_m(\hat{b}_m)$ 和 P_0，$\{\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m), m=1,2,\cdots,M\}$ 按升序排列后为 $\{\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l), l=1,2,\cdots,M\}$。如果 $P_0\le P<P_1$，则必存在 U 满足(为使公式具有统一形式，定义常量 $\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^0)=0$)

$$P_0+\sum_{l=0}^{U}\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l)\le P<P_0+\sum_{l=0}^{U+1}\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l),\quad 0\le U\le M-1 \tag{13}$$

这时可以得到最优功率分配 $P_0+\sum_{l=0}^{U}\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l)$，最优比特分配

$$\hat{b}_j^*=\begin{cases}\hat{b}_j^l, & 1\le l\le U\\ [\hat{b}_j^l-1]^+, & U+1\le l\le M\end{cases} \tag{14}$$

附录 A 和附录 B 分别给出了分配结果的完备性和最优性证明。

算法的实现步骤为

(1)初始化 $\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K)$；

(2)对 $m=1,2,\cdots,M$，分别计算 $\hat{b}_m$ 和 $\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m)$，并计算 P_1 和 P_0；

(3)判断 $P_1>P$ 是否成立，成立则进入第(4)步，否则 $\hat{b}_K=\hat{b}_K+1$ 并返回第(1)步；

(4)判断 $P_0\le P$ 是否成立，成立则进入第(5)步，否则 $\hat{b}_K=\hat{b}_K-1$ 并返回第(1)步；

(5)将 $\{\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m), m=1,2,\cdots,M\}$ 按升序排列，结果记为 $\{\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l), l=1,2,\cdots,M\}$；

(6)设 $u=0$。判断 $P-P_0<\sum_{l=0}^{u+1}\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l)$ 是否成立，是则 $U=u$，否则 $u=u+1$ 并继续判断；

(7)按照式(14)分配比特。

其中前 4 步完成 $\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K)$ 的迭代，用于保证 $P_0\le P<P_1$ 成立，后 3 步完成比特分配。优化后的流程如图 1 所示。

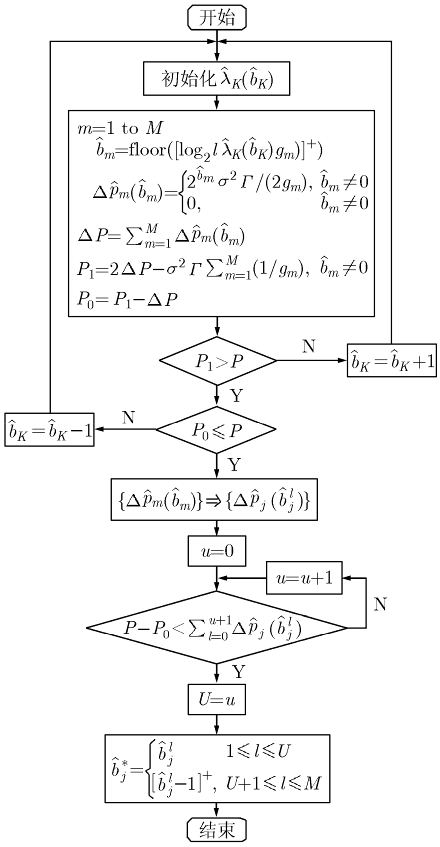

图 1 比特水线算法流程图

4.3 运算量分析

算法的运算过程可分为 3 个主要部分，为了便于和其它算法比较，本文将后两部分的运算量等效为第 1 部分中的迭代次数。

(1) 迭代 $\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K)$　参照流程图中的公式，$\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K)$ 每迭代一次约需 $2M$ 次乘法运算，M 次除法运算，$3M$ 次加法运算，$3M$ 次位运算，以及 $2M$ 次比较运算。如果按照式(15)初始化 $\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K)$，则迭代次数一般为 1 或者 2。

$$\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K) = 2 \wedge \left\lceil [\log_2(\lambda_a g_K)]^+ \right\rceil / g_K \tag{15}$$

其中 $\lceil\cdot\rceil$ 为向上取整，$\lambda_a = (1/M)\left(P/\sigma^2\Gamma + \sum_{m=1}^{M} 1/g_m\right)$ 是按式(10)得到的近似值。

(2) 排序　对 $\{\Delta\hat{p}_m(\hat{b}_m), m=1,2,\cdots,M\}$ 排序需要 $M\log_2(M)$ 次比较并交换运算。一般情况下 $\log_2(M)$ 不大于 10，而比较并交换指令周期不大于乘、除法指令周期，等效运算量不超过 3 次迭代。

(3)其它运算　主要包括 $\lambda_K(\hat{b}_K)$ 的初始值运算，确定 U 值所需运算，以及比特和功率分配运算。总共约需 $4M$ 次加法运算和 M 次比较运算，远低于 1 次迭代所需运算量。

4.4 算法比较

本文算法为最优算法，没有速率损失，其主要评价指标是运算复杂度。已知的最优算法仅有文献[2]给出的贪婪算法和文献[4]给出的改进贪婪算法，而在合理的信噪比下，这两种算法的运算复杂度大于迭代注水算法[1]或其改进算法[3,4]，所以这里仅将本文算法和后者进行对比。

从参考文献[1,3,4]的实现流程可知，其运算量和迭代次数成正比，而每次迭代所需的运算量和本文算法的第 1 部分基本相同。结合上一小节的分析，表 1 给出了对比结果，其中本文算法为宽松的等效迭代次数，其它算法为实际迭代次数。

所提算法运算效率较高的主要原因有两个，一是 $\hat{\lambda}_K(\hat{b}_K)$ 每迭代一次，P_0 和 P_1 的值会增加 1 倍以上或减少一半以上，需要的迭代次数很少；二是迭代过程结束后各子载波上分配的比特数和最优结果最多相差 1，比较容易处理。从 4.3 节的分析可知，当子载波数 M 较小时，算法的等效迭代次数会更少，适合 OFDM 系统使用。同时，算法也存在不足，就是算法的实现程序稍显复杂，而其它算法的实现程序相对简单一些。

表 1　运算复杂度对比

算法	迭代次数
文献[1]	10
文献[3]	≤10
文献[4]	5～7
本文	4～5

5　仿真结果

仿真目的是验证所提算法的比特和功率分配结果是否和贪婪算法(已知最优算法)相同。

信道模型采用 COST207 城市信道模型，子载波数为 1024，信道增益的平均值为 1，噪声功率统一为 0.01，发射功率由设定的平均信噪比和噪声功率决定，误比特率取 $\text{BER}=10^{-3}$，$\Gamma = 5.48$ dB 按照近似公式 $\Gamma = -\ln(5\text{BER})/1.5$ [1]计算得到。

按照以上参数，对本文所提算法和贪婪算法进行了仿真实现。仿真结果表明，无论是分配给各子载波的功率，还是比特数，所提算法都与贪婪算法完全相同。考虑到相同的结果没有必要重复，表 2 将两种算法的仿真结果合并给出。可以看出，在所有给定的信噪比下，剩余功率小于已分配比特的最大功率增量，不足以再分配一个比特，数据速率达到了最大化。从分配的总比特数还可以看出，在误比特率上限不变的情况下，随着信噪比的提高，比特分配可以显著提高系统的数据速率。

表 2　本文算法和贪婪算法的相同分配结果(M=1024)

信噪比(dB)	已分最大功率增量	剩余功率	总比特数
0	0.0316	0.0223	392
3	0.0377	0.0237	687
6	0.0573	0.0331	1113
10	0.1082	0.0618	1917
15	0.2594	0.1400	3210
20	0.7354	0.7202	4752

需要说明的是，附录中的证明从理论上保证了所提算法和贪婪算法的等价性，在任何合理的信道模型下都可以验证，所以不再给出信道模型的详细参数。

6　结束语

借助比特水线及其性质，本文提出了一种新的离散比特分配算法，能在有限粒度调制星座条件下得到最优分配结果，是对注水算法的有益补充。算法的优点在于能够以相对较小的运算量实现最优比特分配，缺点在于编程实现不如其它算法简单。

附录 A　比特水线算法分配结果的完备性证明

设式(14)分配的总比特数为 $B = q(\hat{b}_K, U)$。当 U 在 $\{0,1,\cdots,M-1\}$ 内变化时，考察 $q(\hat{b}_K,U)$ 构成的集合。$q(1,U)$ 构成的集合为 $\{0,1,\cdots,M-1\}$，$q(\hat{b}_K+1,U)$ 构成的集合为 $\{q(\hat{b}_K,M-1)+1, q(\hat{b}_K,M-1)+2,\cdots, q(\hat{b}_K,M-1)+M\}$。$\hat{b}_K$ 取 $\{1,2,\cdots\}$ 时，所有 $q(\hat{b}_K,U)$ 构成完整的非负整数集合 Z^+。　证毕

附录 B　比特水线算法分配结果的最优性证明

已知条件：子载波 j 分配到的比特数 $\hat{b}_j^*$ 由式(14)确定，$\{\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l), l=1,2,\cdots,M\}$ 升序排列。根据比特水线的性质可知 $\Delta\hat{p}_K(\hat{b}_K-1) < \Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l) \le \Delta\hat{p}_K(\hat{b}_K)$ 或者 $\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l)=0$，再结合 4.1 节中结论可知 $\Delta\hat{p}_j([\hat{b}_j^l-1]^+) \le \Delta\hat{p}_K(\hat{b}_K-1)$, $\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l+1) > \Delta\hat{p}_K(\hat{b}_K)$。根据式(13)可知 $\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^{U+1}) \ne 0$。

(1)功率增量条件

(a)求 $\max_j(\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*))$。当 $1\le l\le U$ 时，$\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*) = \Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l) \le \Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^U)$；当 $U+1\le l\le M$ 时，$\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*) = \Delta\hat{p}_j([\hat{b}_j^l-1]^+) \le \Delta\hat{p}_K(\hat{b}_K-1)$。所以 $\max_j(\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*)) = \max(\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^U), \Delta\hat{p}_K(\hat{b}_K-1))$。

(b)求 $\min_j(\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*+1))$。当 $1\le l\le U$ 时，$\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*+1) = \Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l+1) > \Delta\hat{p}_K(\hat{b}_K)$；当 $U+1\le l \le M$ 时，$\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*+1) = \Delta\hat{p}_j([\hat{b}_j^l-1]^+ +1) \ge \Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l) \ge \Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^{U+1})$。因为 $\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^{U+1}) \le \Delta\hat{p}_K(\hat{b}_K)$，所以 $\min_j(\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*+1)) = \Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^{U+1})$。

因为 $\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^{U+1}) \ne 0$，所以 $\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^{U+1}) > \Delta\hat{p}_K\cdot(\hat{b}_K-1)$，再考虑到 $\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^{U+1}) \ge \Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^U)$，所以 $\max_j(\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*)) \le \min_j(\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*+1))$，满足式(8)。

(2)剩余功率条件　对式(13)变形可得 $0 \le P - \left(P_0 + \sum_{l=0}^{U}\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l)\right) < \Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^{U+1})$，而 $\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^{U+1}) = \min_j(\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^*+1))$，所以满足式(9)，且总分配功率为 $P_0 + \sum_{l=0}^{U}\Delta\hat{p}_j(\hat{b}_j^l)$。　证毕

参 考 文 献

[1] Jang J, Lee K B, and Lee Y H. Transmit power and bit allocations for OFDM systems in a fading channel [C]. IEEE Global Telecommunications conference, San Francisco, USA, 2003: 858–862.

[2] Hughes-Hartogs D. Ensemble modem structure for imperfect transmission media [P]. US. 4679227, 1987. 4731816, 1988. 4833706, 1989.

[3] 薛金银, 焦秉立. 一种改进的OFDM自适应比特及功率分配算法[J]. 北京大学学报(自然科学版), 2006, 42(1): 93–98.
Xue Jin-yin and Jiao Bing-li. An improved bit and power allocation algorithm for OFDM systems [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2006, 42(1): 93–98.

[4] 余官定, 张朝阳, 仇佩亮. OFDM系统功率和比特分配算法研究[J]. 电子与信息学报, 2005, 27(9): 1479–1482.
Yu Guan-ding, Zhang Chao-yang, and Qiu Pei-liang. Bit and power allocation for OFDM system [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2005, 27(9): 1479–1482.

[5] Hou Li-ming and Lin Xiao-kang. A Grouping method of bit loading for real-time OFDM-based wireless networks [C]. The 4th International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, Dalian, China, 2008: 1–4.

[6] Zhang Dong-mei, Xu You-yun, and Cai Yue-ming. A high efficiency algorithm of power and bit allocation for OFDMA systems [C]. The 3th International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, Hawaii, USA, 2007: 85–88.

[7] Nader-Esfahani S and Afrasiabi M. Simple bit loading algorithm for OFDM-based systems [J]. *IET Communications*, 2007, 1(3): 312–316.

[8] Bansal G, Hossain M J, and Bhargava V K. Optimal and suboptimal power allocation schemes for OFDM-based cognitive radio systems [J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2008, 7(11): 4710–4718.

[9] Lee Hyang-Won and Chong Song. Downlink resource allocation in multi-carrier systems: frequency-selective vs. equal power allocation [J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2008, 7(10): 3738–3747.

[10] Campello J. Optimal discrete bit loading for multicarrier modulation systems [C]. IEEE International Symposium on Information Theory, Cambridge, Mass, USA. 1998: 193.

赵　力：　男，1975 年生，博士生，研究方向为宽带无线通信.

孙献璞：　男，1963 年生，教授，研究方向为移动通信、军事通信.

张海林：　男，1963 年生，教授、博士生导师，研究方向为信道编码和高速数据传输.