

基于噪声子空间解析形式的快速 DOA 估计算法

艾名舜^{①②} 马红光^① 刘 刚^②

^①(第二炮兵工程学院 西安 710025)

^②(信息综合控制国家重点实验室 成都 610036)

摘 要: 该文针对特殊的信号环境——各辐射源信号均值相等且不为零, 利用均匀线阵导向矢量的 Vandermonde 结构, 推导出了噪声子空间的解析形式, 并以此为基础提出了利用均匀线阵和稀疏平面阵的 1 维和 2 维 DOA 估计快速算法。该算法不需要计算接收数据的协方差矩阵, 也不需要任何矩阵分解, 因此计算量远小于传统的超分辨率 DOA 估计, 而且无论信号之间是否具有相干性, 该方法有相同的估计性能。仿真实验表明, 在噪声均值为零且快拍数足够的条件下, 该方法的估计性能整体上与 Root-MUSIC 算法相当, 而在信噪比较低时性能优于后者。

关键词: 波达方向; 超分辨; 噪声子空间

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)05-1071-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.00513

DOA Estimation Algorithm Base on Analytical Solution of Noise Subspace

Ai Ming-shun^{①②} Ma Hong-guang^① Liu Gang^②

^①(The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China)

^②(National Information Control Laboratory, Chengdu 610036, China)

Abstract: For a special signal environment, where all of the sources have identical nonzero mean values, taking advantages of the Vandermonde structured steering vector of the uniform linear antenna array, an analytical solution of null-subspace is deduced in this paper. Based on the solution, both of one-dimensional signal Direction Of Arrival (DOA) estimation algorithm with uniform linear array and two-dimensional signal DOA estimation algorithm with sparse planar array are proposed. The algorithm does not involve the covariance matrix calculation and any matrix decomposition, so it is much computational saved than the conventional super-resolution DOA estimation algorithms. Beside that, the novel method works well either the signal sources are coherence or not. The simulation shows that the novel algorithm possesses the same performance with Root-MUSIC algorithm as the whole when the mean value of the noise is zero and the number of snapshots is enough, and it performs better than Root-Music when the Signal Noise Ratio (SNR) is lower.

Key words: Direction Of Arrival (DOA); Super resolution; Noise subspace

1 引言

近 30 年来, 超分辨信号波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计一直是信号处理领域的热点问题, 其中以 MUSIC 算法^[1]和 ESPRIT 算法^[2]为代表的子空间方法受到了最为广泛的关注和研究。这类方法的特点是将阵列接收数据的协方差矩阵分解为相互正交的信号子空间和噪声子空间, 并利用阵列流形与噪声子空间的正交关系来估计信号到达角。然而此类算法有两个重要的缺陷, 一是当信号之间存在相干性时, DOA 估计性能严重下降; 二是特征子空间估计的运算量较大, 其所需的计算量约为

$O(M^3)$, 其中 M 是阵元个数。针对第 1 个问题, 空间平滑方法^[3]、利用均匀线阵对称性解相干^[4]、奇异矢量重构方法^[5]和对协方差矩阵 Toeplitz 化^[6]等一系列方法被提出来, 实现了对相干信号的 DOA 估计, 但是也在一定程度上增加了算法复杂度。针对第 2 个问题, 出现了一些快速的子空间估计和跟踪算法, 如 Lanczos 变换^[7]、双迭代算法^[8]和基于 Householder 压缩理论^[9]的子空间跟踪算法^[9]等, 但这些方法的运算量也不低于 $O(Mr)$, 这里 r 表示子空间维数。

对于一般的信号环境, 很难找到一种计算量小于 $O(Mr)$ 且能够处理相干信号的超分辨 DOA 估计算法, 但是在特殊的信号环境中这种方法是存在的。本文研究了一种特殊信号环境, 即所有信号的幅度均值相等且不为零, 利用均匀线阵阵列流形的

Vandermonde 结构, 推导出了噪声子空间的解析形式, 进而实现了信号 DOA 的快速估计。在此基础上, 本文进一步研究了 2 维 DOA 估计的方法, 由于本方法计算过程都是简单的代数运算, 甚至不需要矩阵相乘, 子空间估计的运算量为 $O(M)$, 因而计算效率远高于传统算法, 且该方法性能不受信号之间的相干性影响。需要说明的是, 在反辐射导弹抗有源诱饵诱偏等实际问题中^[10,11], 本方法要求的信号环境是存在的。

2 噪声子空间解析形式的推导及 1 维 DOA 估计算法

假设有 N 个远场窄带辐射源满足信号均值相等且不为零, 其信号到达角度分别为 $\theta_i, i = 1, 2, \dots, N$ 。采用阵元数为 M 的均匀线阵, $M \geq N + 1$, 忽略天线误差, 根据经典均匀线阵信号模型, 信号导向矢量(steering vector)为

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{-j\omega\tau_i}, \dots, e^{-j\omega(M-1)\tau_i}]^T, i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中 $\omega = 2\pi/\lambda$, $\tau_i = d \cdot \sin \theta_i$, λ_i 为信号波长, d 为阵元间距。如果设 $X_i = e^{-j\omega\tau_i}$, 则导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 可改写为

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [1, X_i, X_i^2, \dots, X_i^{M-1}]^T \quad (2)$$

若信号表示为 $\mathbf{s}_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, N$, $n = 1, 2, \dots, L$, L 为快拍数, 则无噪声情况下接收数据 $\mathbf{Z}$ 为

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & & X_N \\ X_1^2 & X_2^2 & & X_N^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1^{M-1} & X_2^{M-1} & \dots & X_N^{M-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1(n) \\ \mathbf{s}_2(n) \\ \vdots \\ \mathbf{s}_N(n) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i(n) \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i(n) X_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_i(n) X_i^{M-1} \end{bmatrix}$$

对 $\mathbf{Z}$ 按行取均值(即按时间取均值), 可得

$$\mathbf{Z}_m = \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^L \mathbf{s}_i(n) & \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^L \mathbf{s}_i(n) \cdot X_i & \dots \\ \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^L \mathbf{s}_i(n) \cdot X_i^{M-1} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

由于各个信号满足均值相等且不为零, 因此设 $m =$

$\frac{1}{L} \sum_{n=1}^L \mathbf{s}_i(n) \neq 0$, $\mathbf{Z}_m$ 可改写为

$$\mathbf{Z}_m = \begin{bmatrix} N \cdot m & m \cdot \sum_{i=1}^N X_i & \dots & m \cdot \sum_{i=1}^N X_i^{M-1} \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

由于 $\mathbf{Z}_m$ 是已知的向量, 设 $\mathbf{Z}_m = [z_1, z_2, \dots, z_M]^T$, 可建立方程组

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^N X_i &= \frac{N \cdot z_2}{z_1} = a_1 \\ \sum_{i=1}^N X_i^2 &= \frac{N \cdot z_3}{z_1} = a_2 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^N X_i^N &= \frac{N \cdot z_M}{z_1} = a_{M-1} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

定义向量 $\mathbf{C} = [1, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots, c_{M-1}]$, 其中

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -1 \cdot (X_1 + X_2 + \dots + X_{M-1}) \\ c_2 &= (-1)^2 \cdot (X_1 X_2 + X_2 X_3 + \dots + X_{M-2} X_{M-1}) \\ &\vdots \\ c_n &= (-1)^n (X_1 X_2 \dots X_n + \dots + X_{M-n} X_{N-n+1} \dots X_{M-1}) \\ &\vdots \\ c_{M-1} &= (-1)^{M-1} X_1 X_2 \dots X_{M-1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$c_n, n = 1, 2, \dots, M-1$ 表示 $M-1$ 个变量中任意不相同的 n 个变量乘积之和。 c_n 可由以下递推式得到

$$c'_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} c'_{n-i} a_i, \quad c_n = (-1)^n c'_n \quad (8)$$

$$n = 1, 2, \dots, M-1, \quad c_0 = 1$$

根据推广的维达定理, $X_i, i = 1, 2, \dots, M-1$ 是一元 $M-1$ 次方程

$$X^{M-1} + c_1 X^{M-2} + \dots + c_{N-2} X + c_{M-1} = 0 \quad (9)$$

的 $M-1$ 个根。

根据之前 X_i 的定义可知, 向量 $\mathbf{C}$ 实际上是噪声子空间的一种表达形式, 因此式(8)是直接由接收数据得到的噪声子空间的解析表达式, 在信号环境满足约束条件时, 利用这个关系式可以获得噪声子空间的有效估计, 其运算量为 $O(M)$, M 为阵元数目。相比于利用矩阵分解或迭代法估计噪声子空间的方法, 本文方法的计算效率要高得多, 而且当 $N \leq 4$ 时, 式(9)有闭式根, 因此可以迅速而准确地得到方程的根, $N \geq 5$ 时式(9)可以用数值方法求解。得到方程的 $M-1$ 根 X_i 之后, 选择在复平面上距离单位圆最近的 N 个根, 利用式(10)可得到 1 维信号 DOA 估计, 其中 $\arg$ 表示求辐角

$$\theta_i = \arcsin \left(\frac{\lambda}{2\pi d} \arg(X_i) \right), \quad i = 1, \dots, N \quad (10)$$

由上述推导过程可知,本方法不需要计算接收信号协方差矩阵,无需特征分解,信号的相干性对算法不产生影响,只用简单的代数运算即可获得信号的 DOA 估计,因此计算量远小于传统超分辨 DOA 估计算法。

3 基于 V 形阵的 2 维 DOA 估计方法

利用双线阵实现 2 维 DOA 估计是一种常用的方法,但是存在两个问题:一是信号在两个线阵上的信号波达方向参数是独立解算的,因此存在参数配对的问题;二是当多个信号的俯仰角重合时,利用垂直双线阵测向会因为角度兼并问题造成波达角估计失败。一般基于特征分解的 2 维 DOA 估计方法是利用相同信号的特征向量相关这个特点来解决参数配对问题的^[12],而本方法不涉及特征分解,因此无法采用这种方法。本文考虑在 V 形天线阵的基础上增加一个参考阵元组成稀疏平面阵(如图 1 所示)。采用 V 形双线阵可以在俯仰角兼并的情况下保持测向性能,同时利用参考阵元的输出数据来实现正确的参数配对。

仍采用经典阵列信号模型,设有 N 个远场信号的到达角为 $(\theta_i, \varphi_i), i = 1, 2, \dots, N$, 采用 M 阵元的稀疏平面阵, M 为不小于 $2(N+1)$ 的偶数,则其导向矢量为

$$\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i) = [1 \ e^{-j\omega\tau_2^i} \ \dots \ e^{-j\omega\tau_M^i}]^T \quad (11)$$

ω 沿用之前定义,根据图 2 中所示的到达角定义, τ_j^i 可以表示为

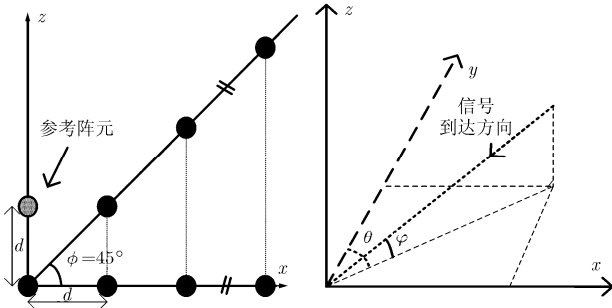


图 1 稀疏平面阵示意图

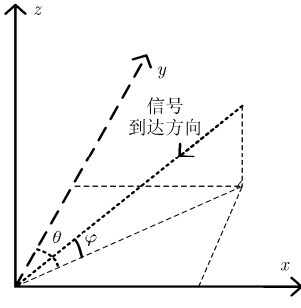


图 2 信号到达角示意图

$$\tau_j^i = x_j \sin \theta_i \cos \varphi_i + z_j \sin \varphi_i \quad (12)$$

$[x_j, z_j]$ 是第 j 个阵元在 X - Z 平面上的坐标,阵元位于 X - Z 平面上,坐标向量为 $d \cdot [(0,0), (1,1), \dots, (M/2-1, M/2-1), (1,0), \dots, (M/2-1, 0), (0,1)]$, d 是阵元间距。令 $X_i = e^{-j\omega d \sin \theta_i \cos \varphi_i}$, $Y_i = e^{-j\omega d \sin \varphi_i}$, 则导向矢量可写为

$$\mathbf{a}(\theta_i, \varphi_i) = [1, W_i, \dots, W_i^{M/2-1}, X_i, \dots, X_i^{M/2-1}, Y_i]^T \quad (13)$$

其中 $W_i = X_i Y_i$ 。与 1 维 DOA 估计方法同理,得到接收数据 $\mathbf{Z}$ 的均值向量 $\mathbf{Z}_m$, 利用信号同均值的性质

可建立方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N W_i = \frac{N \cdot z_2}{z_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N W_i^N = \frac{N \cdot z_{M/2}}{z_1} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N X_i = \frac{N \cdot z_{M/2+1}}{z_1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N X_i^N = \frac{N \cdot z_{M-1}}{z_1} \end{array} \right\}, \quad (14)$$

根据式(8), 式(9)分别构造两个一元 $M/2-1$ 次方程, 可以求解出两组根 $\{W_i\}, \{X_i\}, i = 1, 2, \dots, M/2-1$, 从中分别选出离复平面单位圆最近的 N 个根。理想情况下, 只有当两组根正确匹配时(即 $i = j$), 以下判别式才取得最小值

$$(X_i, W_j) \text{ 满足 } \min_{i,j \in (1,N)} \left| \sum_{i,j=1}^N \frac{W_j}{X_i} - \frac{N \cdot z_M}{z_1} \right| \quad (15)$$

由此可以实现两组根的唯一正确配对。无论是否存在俯仰角兼并问题, 两组根都没有重根, 因此角度兼并问题不影响本算法的 2 维 DOA 估计性能。首先计算俯仰角

$$\varphi_i = \arcsin \left(\frac{\lambda}{2\pi d} \arg(W_i/X_i) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

进而求出方位角

$$\theta_i = \arcsin \left(\frac{\arg(X_i)}{\sqrt{4\pi^2 d^2 / \lambda^2 - \arg(W_i/X_i)^2}} \right), \quad i=1, 2, \dots, N \quad (17)$$

4 算法性能分析

之前是在无噪声的情况下进行的推导, 现在对噪声的影响加以分析。不失一般性, 设信号和通道噪声皆服从正态分布, 有

$$\left\{ \begin{array}{l} s_i \sim N(u_{s0}, \sigma_s^2), \quad i = 1, 2, \dots, N \\ n_j(t) \sim N(u_{n0}, \sigma_n^2), \quad j = 1, 2, \dots, M \end{array} \right\} \quad (18)$$

理想情况下, 第 j 个通道方程的解的真值表示为

$$\sum_{i=1}^N X_i^{j-1} = \frac{z_j}{u_{s0}} \quad (19)$$

考虑到噪声及有限快拍数的影响, 实际中第 j 个通道的方程应写为

$$u_s \cdot \sum_{i=1}^N X_i^{j-1} + u_n = z_j \quad (20)$$

其中 $u_s \sim N(u_{s0}, \sigma_s^2/L)$, $u_n \sim N(u_{n0}, \sigma_n^2/L)$, L 是快拍数, 因此方程解的估计值近似满足以下分布

$$\sum_{i=1}^N \hat{X}_i^{j-1} \sim N \left(\frac{z_j}{u_{s0}} - \frac{u_{n0}}{u_{s0}}, \frac{(z_j - u_{n0}) \cdot \sigma_s^2 + u_{s0} \cdot \sigma_n^2}{(z_j - u_{n0}) \cdot u_{s0} \cdot L} \right) \quad (21)$$

信号的均值和方差为定值,因此解的误差主要由噪声的均值、方差以及快拍数决定,其中解的误差均值只与噪声均值与信号均值的比值有关,当噪声均值为零时,可以得到真实解的无偏估计,而解的方差主要与噪声功率以及快拍数有关,噪声功率一定时,快拍数越大则解的精度越高。至于噪声的其它性质,如非白或非高斯噪声,对本方法性能不产生影响。

方程的根与信号波达角度是一一对应的关系,因此 DOA 估计的结果也服从与式(21)近似的分布。需要说明的是,在式(16),式(17)所表示的变换过程中只用到根的辐角,方程根在复数空间的径向误差对角度估计不产生影响,因此用求根法估计的角度误差比角度搜索的估计误差小一些,这就是 Root-MUSIC 算法性能优于一般的 MUSIC 算法的原因^[13]。

5 仿真实验及分析

实验 1 采用阵元间隔为半波长的 3 阵元均匀线阵对两个信号进行 DOA 估计,信号到达角度分别为 15° 和 21° 。设通道噪声为零均值复高斯白噪声,两信号具有相同的非零均值,分别在两信号相干和不相干的情况下比较 Root-MUSIC 算法与本文方法的性能。

当两信号不相干时,整体上两种方法的测向性能大致相当,在信噪比较低时,本文方法性能略优于 Root-MUSIC 算法(图 3(a)),这是因为本方法中

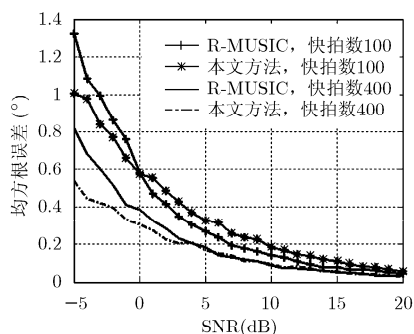
对接收数据取均值的步骤对随机噪声有一定的抑制作用。当快拍数减少时,两方法的性能都有所下降,本方法的性能恶化更为明显,原因是当快拍数较少,信号和噪声的实际均值与其期望值的偏差较大,此时本方法的结果不再是无偏估计。当多信号相干时,Root-MUSIC 算法性能严重恶化,而本文方法性能不受影响(图 3(b))。

实验 2 在通道噪声为非零均值高斯白噪声情况下,考察噪声均值与信号均值之比(u_{n0}/u_{s0})和快拍数变化时本方法估计误差的平均值和方差。信噪比固定为 10 dB。

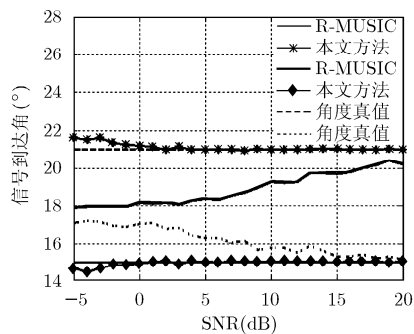
仿真结果显示,随着 u_{n0}/u_{s0} 逐渐增大,测向误差均值逐渐偏离 0,呈单调增加趋势(图 4(a));当噪声功率确定时,估计误差的方差受 u_{n0}/u_{s0} 的影响不明显,只是略有下降趋势,而主要与快拍数有关(图 4(b))。仿真结果完全验证了式(21)的分析结论。

实验 3 采用 8 阵元的稀疏平面阵对 3 个信号的 2 维到达角进行估计,信号到达角分别为 $(-3.5^\circ, 2.4^\circ)$ 、 $(0.5^\circ, 7^\circ)$ 、 $(4.8^\circ, -3.5^\circ)$, SNR=0 dB。

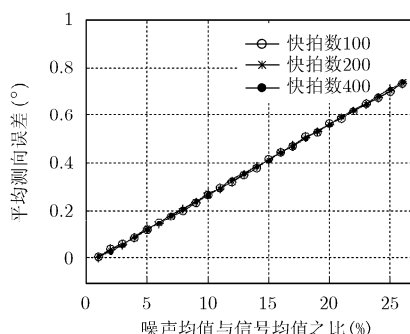
利用双线阵进行 2 维测向需要解决参数配对的问题,本文提出增加一个参考阵元的方法来解决这一问题。在理想情况下,当参数正确配对的时候判别式(15)达到最小值,但当信噪比较低和信号波达角度相互接近时,仍会发生错误配对并导致出现虚假角度(如图 5 所示)。实际上,当方程根的误差大于各个根在复平面上的距离的一半时就会出现根的



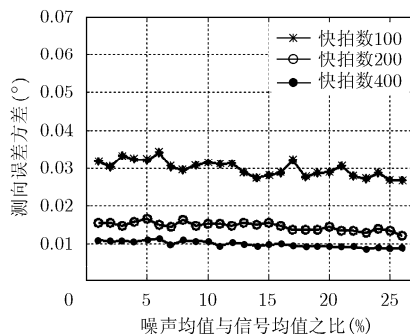
(a)两种DOA估计方法性能比较



(b)两种方法对相干信号测向性能比较



(a)本文算法DOA估计误差的均值



(b)本文算法DOA估计误差的方差

图 3

图 4

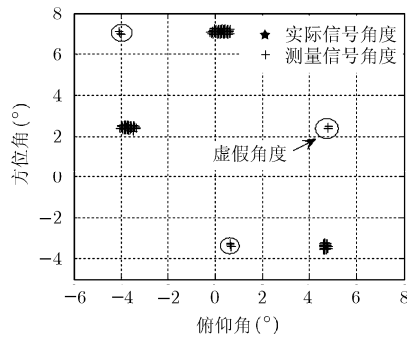


图5 2维 DOA 估计结果(SNR=0 dB)

错误配对,而当信噪比较高、快拍数或信号角度差增加时虚假信号出现的概率将随之降低。

实验 4 假设有两个信号,其到达角分别为 $(\theta, -\theta)$, $(-\theta, \theta)$, 图 6 中曲线表示当 θ (单位为 $^\circ$) 和信噪比变化时出现虚假角度的概率,其中噪声为零均值高斯白噪声,快拍数为 400。在这里,定义以实际到达角度为中心,半径为 θ 的两个圆形区域为“有效区域”,落在“有效区域”之外的角度估计值为虚假角度,每一个数据为 100 次独立实验的统计结果。

实验结果显示,当信噪比大于 0 dB 且两信号到达角之差大于 4° 的时候,虚假角度出现的概率很小,可以忽略不计。本文方法的最大特点是计算量小,因此可以在较短时间内进行多次 DOA 估计,进而用统计的方法排除虚假角度。

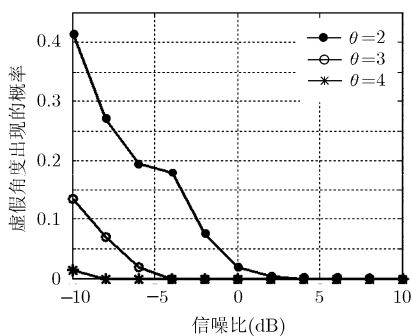


图6 虚假角度出现的概率

6 结束语

当各个信号的均值相等且不为零时,均匀线阵接收信号的噪声子空间具有解析形式,因此可以快速而精确地获得噪声子空间的估计,进而利用多项式求根的方式实现信号 DOA 估计。本文推导了特殊信号环境下的噪声子空间表达式,并在此基础上研究了一维和二维信号 DOA 估计方法,实验结果显示,该方法具有与 Root-MUSIC 算法相近的 DOA 估计性能,而且对多信号之间的相干性不敏感,尤其是本方法中不涉及任何矩阵计算或子空间逼近问

题,因此计算量远小于传统超分辨 DOA 估计算法,在当前计算条件下完全可以将其应用于实际工程之中。

参考文献

- [1] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, ASSP-34(3): 276-280.
- [2] Roy R H and Kailath T. ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, 1989, ASSP-37(7): 984-995.
- [3] Shan Tie-jun, Wax Mati, and Kailstth Thomas. On spatial smoothing for direction of arrival estimation of coherent signals[J]. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, 1985, ASSP-33(4): 806-811.
- [4] Ye Zhong-fu and Xu Xu. DOA Estimation by Exploiting the Symmetric Configuration of Uniform linear Array[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2007, 55(12): 3717-3720.
- [5] 曾操, 廖桂生. 基于数据矩阵分解的相干源方向估计新方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2005, 27(4): 303-305.
Zeng Cao and Liao Gui-sheng. Direction finding in the presence of coherent signals based on data matrix decomposition[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2005, 27(4): 303-305.
- [6] Hu Xiao-qin, Chen Jian-wen, and Chen Hui, et al. Estimation DOAs of the Coherent Sources Based on Toeplitz Decorrelation[C]. *Proceeding of Congress on Image and Signal Processing*, Sanya, May, 2008: 54-58.
- [7] 黄磊, 吴顺君, 张林让. 采用Lanczos算法快速估计噪声子空间[J]. *电子与信息学报*, 2006, 28(1): 21-25.
Huang Lei, Wu Shun-jun, and Zhang Lin-rang. Fast noise subspace estimation via the Lanczos algorithm[J]. *Journal of Electronics and Information Technology*, 2006, 28(1): 21-25.
- [8] Strobach Prter. The fast Householder Bi-SVD subspace tracking algorithm[J]. *Signal Processing*, 2008, 88(11): 2651-2661.
- [9] Strobach Peter. The Householder compressor theorem and its application in subspace tracking[J]. *Signal Processing*, 2009, 89(5): 857-875.
- [10] Shi Zhen, Li Yan, and Yuan Wen-liang. Modeling of guidance signal of anti-radiation missile in the case of multiple sources[C]. *Proceedings of the 2006. IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. Luoyang, Jun. 2006: 2264-2268.
- [11] 司锡才, 崔冬槐, 司伟建. 反辐射导弹对抗低截获概率雷达和诱饵技术[J]. *系统工程与电子技术*, 2005, 27(9): 1549-1552.
Si Xi-cai, Cui Dong-huai, Si Wei-jian. Technology of ARM

- contradict LIP radar and bait [J]. *Systems Engineering and Electronic*, 2005, 27(9): 1549-1552.
- [12] 刁鸣, 缪善林. 一种二维ESPRIT算法参数配对新方法[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(8): 1226-1229.
- Diao Ming and Miao Shan-li. New method of parameter matching for 2-D ESPRIT algorithm[J]. *Systems Engineering and Electronic*, 2007, 29(8): 1226-1229.
- [13] Rao B D and Hari K S. Performance analysis of Root-MUSIC[J]. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech, Signal Processing*, 1989, ASSP-37(12): 1939-1949.
- 艾名舜: 男, 1981 年生, 博士生, 研究方向为信号与信息处理、电子战技术.
- 马红光: 男, 1959 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为信号处理、非线性理论等.
- 刘 刚: 男, 1976 年生, 博士, 高级工程师, 研究方向为无源定位、电子战技术等.