

一种基于结构优化的FIR滤波器舍入噪声性能改进方案

庄陵 关鹃* 马靖怡 王光宇

(重庆邮电大学移动通信技术重点实验室 重庆 400065)

摘要: 针对滤波器组系统硬件实现时原型滤波器的有限字长效应问题, 该文研究如何改善FIR原型滤波器由信号量化引起的舍入噪声, 即降低舍入噪声增益, 提出一种FIR滤波器优化结构。通过分析舍入噪声来源, 利用多项式参数化方法对舍入噪声增益表达式进行推导。仿真实例证明, 在不同字长约束条件下所提结构滤波器的幅频相频响应与理想状态基本吻合; 通过与现有算法对比, 所提结构具有较小的舍入噪声增益。

关键词: FIR滤波器; 有限字长; 舍入噪声增益

中图分类号: TN911.72; TN713

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)04-0932-07

DOI: 10.11999/JEIT180480

An Improvement Project of Roundoff Noise Performance of FIR Filters Based on Structure Optimization

ZHUANG Ling GUAN Juan MA Jingyi WANG Guangyu

(Key Laboratory of Mobile Communications Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: For the problem of the finite word length effect of prototype filters in hardware implementation of the filter bank system, this paper studies how to improve the performance of roundoff noise caused by signal quantization for the FIR prototype filter, that is, to reduce the roundoff noise gain. An FIR filter optimization structure is proposed. By analyzing the source of roundoff noise, a polynomial parameterization method is used to derive the roundoff noise gain expression. The simulation example shows that the amplitude-frequency and phase-frequency response of the proposed structure filter are basically consistent with the ideal state under different constraint of word length. Compared with the existing algorithms, the proposed structure has a smaller roundoff noise gain.

Key words: FIR filter; Finite word length; Roundoff noise gain

1 引言

移动通信系统从第1代发展到第5代, 已进入飞速发展时期。滤波器组技术可将信号整个频带划分为小子带进行分别处理, 无论是4G中使用的正交频分复用技术(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM), 还是5G热门备选方案之一即基于滤波器组的多载波技术(Filter Bank Based Multicarrier, FBMC)都是其典型应用^[1-3]。滤波器组系统由原型滤波器频域搬移而成, 原型滤波器设

计是系统设计的关键。目前关于滤波器组中原型滤波器也即FIR滤波器优化研究有很多成果^[4-7], 这些在无限精度下设计的滤波器直接应用到工程中系统实际性能与预期偏差较大。文献[8]在研究正弦波拟合算法时发现舍入误差是影响系统性能的根本原因。文献[9]指出量化误差会导致FIR滤波器零点产生畸变。文献[10]指出由于量化导致的FIR滤波器系数误差会引起频率特性的失真。以上研究表明, 有限字长(Finite Word Length, FWL)效应是引起性能问题的主要原因, 即引入舍入噪声与系数误差, 其中滤波器系数的有限字长误差常用灵敏度衡量, 而因量化内部信号导致的舍入误差通常用舍入噪声来衡量。

有限字长问题在数字滤波器硬件实现时不可避免。数字滤波器在无限精度下有多种等效实现方式, 而滤波器的最终实现是在有限字长的数字元件中。Matlab仿真平台最高可达双精度即64位二进

收稿日期: 2018-05-21; 改回日期: 2018-10-12; 网络出版: 2018-11-15

*通信作者: 关鹃 guan_juan@163.com

基金项目: 国家科技重大专项(2016ZX03001010), 重庆市教委科学技术研究项目(KJ1500435)

Foundation Items: The National Science and Technology Major Project (2016ZX03001010), The Scientific and Technological Research Program of Chongqing Municipal Education Commission (KJ1500435)

制，而原型滤波器硬件实现时通常存储在16或32位字长的存储器中，这种理论设计与实际实现之间的差距会导致实际系统频率响应偏差，影响系统性能，严重时甚至破坏滤波器组重建条件使系统不能完全重构。解决这个问题本可通过使用更高精度的处理器来增加字长，但会大幅度增加成本，特别是在一些要求低成本高性能的工程应用中并不适用。

目前关于FIR滤波器降低有限字长效应的研究包括：基于混合整数规划的全局优化^[11]和基于局部邻域搜索的次优化^[12]两种经典算法，以及近年来兴起的最小二乘优化的Tabu算法^[13]和模拟退火算法^[14]。本文提出一种FIR原型滤波器结构优化方法来改善硬件实现时字长效应从而提升滤波器舍入噪声性能。结构安排如下：首先给出优化结构及其系统函数表达式；其次通过将舍入噪声建模为高斯白噪

声，利用多项式参数化方法给出所提结构舍入噪声增益解析表达式，为其应用于高性能滤波器设计提供必要理论基础；最后仿真验证部分通过频域仿真分析所提结构在有限字长约束下自由参数对滤波器性能的影响，并利用数值举例对比优化结构及现有的有限字长优化算法舍入噪声性能并给出结论。

2 FIR滤波器优化结构

线性时不变FIR数字滤波器：

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^N b_n z^{-n} \quad (1)$$

对同一传递函数，不同结构由于量化对系统性能产生不同影响。下面采用FIR滤波器直接型转置结构，具体实现如图1所示，称为传统结构。

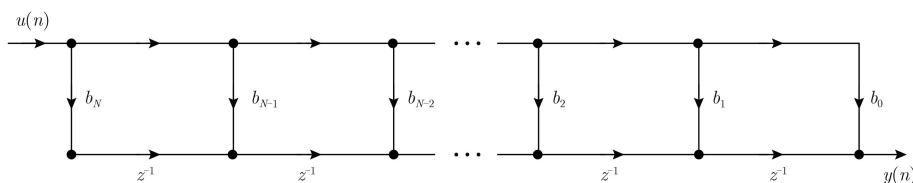


图1 FIR滤波器的直接型转置结构

本文提出基本结构如图2所示，称为 δ_l^{-1} 结构，其中 $K_l (l = 1, 2, \dots, N)$ 称作自由因子， l, K_l 为给定常数。

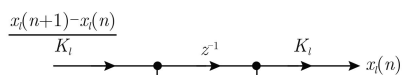


图2 δ_l^{-1} 基本结构

图2的输入输出关系为 $z = 1 + K_l \varepsilon$ ，代入式(1)得优化结构如图3所示。

记式(1)描述的FIR滤波器系统函数：

$$H(z) \triangleq \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_{N-1} z + b_N}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N} \quad (2)$$

其中， $a_0 = 1, a_i = 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ 。优化结构的

系统函数为

$$H(\varepsilon) = H(z)|_{z=1+K_l \varepsilon} = \frac{\beta_0 \varepsilon^N + \beta_1 \varepsilon^{N-1} + \dots + \beta_{N-1} \varepsilon + \beta_N}{\alpha_0 \varepsilon^N + \alpha_1 \varepsilon^{N-1} + \dots + \alpha_{N-1} \varepsilon + \alpha_N} \quad (3)$$

记

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{V}_a &= [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{N-1} \ a_N]^T \\ \mathbf{V}_b &= [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{N-1} \ b_N]^T \\ \mathbf{V}_\alpha &= [\alpha_0 \ \alpha_1 \ \dots \ \alpha_{N-1} \ \alpha_N]^T \\ \mathbf{V}_\beta &= [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{N-1} \ \beta_N]^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

则有

$$\mathbf{V}_\alpha = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V}_a, \mathbf{V}_\beta = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V}_b \quad (5)$$

其中， $\bar{\mathbf{K}} = \prod_{l=1}^N K_l$ 。

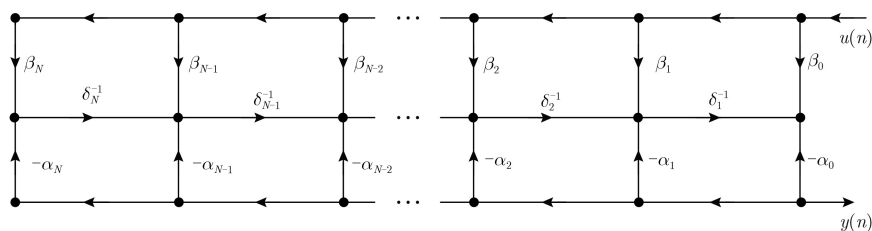


图3 FIR滤波器的优化结构

$$M = \begin{bmatrix} \prod_{l=1}^N K_l & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sum_{m=1}^N \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^N K_l & \prod_{l=2}^N K_l & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{l=1}^N K_l & \sum_{l=2}^N K_l & \cdots & K_N & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

3 推导舍入噪声增益表达式

优化结构用状态空间表示有

$$\begin{cases} \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}_\delta \mathbf{x}(n) + \mathbf{B}_\delta u(n) \\ y(n) = \mathbf{C}_\delta \mathbf{x}(n) + \mathbf{D}_\delta u(n) \end{cases} \quad (7)$$

其中, \mathbf{x} 表示系统状态变量, u 表示滤波器的输入, y 表示输出; $\mathbf{A}_\delta \in R^{N \times N}$, $\mathbf{B}_\delta \in R^{N \times 1}$, $\mathbf{C}_\delta \in R^{1 \times N}$, $\mathbf{D}_\delta \in R$.

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{pmatrix} -\alpha_1 K_1 + 1 & K_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_2 K_2 & 1 & K_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_{N-1} K_{N-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 & K_{N-1} \\ -\alpha_N K_N & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_\delta = \begin{pmatrix} (\beta_1 - \alpha_1 \beta_0) K_1 \\ (\beta_2 - \alpha_2 \beta_0) K_2 \\ \vdots \\ (\beta_{N-1} - \alpha_{N-1} \beta_0) K_{N-1} \\ (\beta_N - \alpha_N \beta_0) K_N \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_\delta = (1 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0), \mathbf{D}_\delta = \beta_0 \quad (8)$$

根据式(5)及式(7)可求得 $K_l = 1 \forall l$ 时优化结构的系统函数系数 $\overline{\mathbf{V}}_\alpha$, $\overline{\mathbf{V}}_\beta$ 及其相应的状态空间表达 $(\overline{\mathbf{A}}_\delta, \overline{\mathbf{B}}_\delta, \overline{\mathbf{C}}_\delta, \overline{\mathbf{D}}_\delta)$ 和可控格莱姆矩阵 $\overline{\mathbf{W}}_c^\delta$, 同时可根据任意给定下 K_l 得到 \mathbf{V}_α , \mathbf{V}_β 及 $(\mathbf{A}_\delta, \mathbf{B}_\delta, \mathbf{C}_\delta, \mathbf{D}_\delta)$.

为获得更好的性能, 接下来先对自由因子进行优化, 再采用多项式参数化方法对优化结构舍入噪声增益公式进行推导。

3.1 自由因子 K_l 的优化

自由因子 K_l 即耦合系数, 可以用来控制节点处状态变量 $x_l(n)$ 的动态范围^[15]. 对 $\forall l$, 通常 K_l 取值相同. 为改善舍入噪声性能, 接下来的优化过程会使得对于不同的 l , K_l 取不同的值. 为了降低有限寄存器长度效应产生的溢出误差, 通常使用 l_2 -缩放约束状态变量, 即 $W_c^\delta(m, m) = 1 \forall m$.

$(\overline{\mathbf{A}}_\delta, \overline{\mathbf{B}}_\delta, \overline{\mathbf{C}}_\delta, \overline{\mathbf{D}}_\delta)$ 通过相似变化可得到 $(\mathbf{A}_\delta, \mathbf{B}_\delta, \mathbf{C}_\delta, \mathbf{D}_\delta)$, 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_\delta &= \mathbf{T} \overline{\mathbf{A}}_\delta \mathbf{T}^{-1}, \mathbf{B}_\delta = \mathbf{T} \overline{\mathbf{B}}_\delta \\ \mathbf{C}_\delta &= \overline{\mathbf{C}}_\delta \mathbf{T}^{-1}, \mathbf{D}_\delta = \overline{\mathbf{D}}_\delta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\mathbf{W}_c^\delta = \mathbf{T} \overline{\mathbf{W}}_c^\delta \mathbf{T}^T \quad (10)$$

其中, $\mathbf{T} = \text{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_N)$, $d_i = \frac{1}{\sqrt{W_c^\delta(i, i)}}$, 称

非奇异矩阵 \mathbf{T}^{-1} 为相似矩阵. 对同一个系统函数所表示的滤波器, 这种相似变换可找到无穷组状态空间表示, 不同的状态空间表示具有不同的舍入噪声增益。

由式(9)及图2可得 $d_m = \prod_{l=1}^m K_l^{-1}$, 也即

$$K_1 = \sqrt{W_c^\delta(1, 1)}, \quad K_m = \sqrt{\frac{W_c^\delta(m, m)}{W_c^\delta(m-1, m-1)}},$$

$$m = 2, 3, \cdots, N \quad (11)$$

通过上面的优化, 可确保滤波器的每个节点处都不会溢出, 降低节点处舍入噪声增益, 从而改善滤波器的舍入噪声性能。

3.2 优化结构的舍入噪声增益

将舍入噪声 $e_l(n)$ 建模为统计独立的高斯白噪声, 即均值为零, 方差为 σ_0^2 , 由于 $e_l(n)$ 存在, 使得输出 $y^*(n)$ 偏离之前的理论输出 $y(n)$, 记 $\Delta y(n) = y^*(n) - y(n)$, 则舍入噪声增益定义为 $G_l \triangleq \frac{E[(\Delta y(n))^2]}{E[e_l^2(n)]}$.

记以 $e_l(n)$ 为输入, $\Delta y(n)$ 为输出的滤波器的传递函数为 $H_l(\varepsilon)$, 则有

$$H_l(\varepsilon) = \mathbf{D}_\delta + \mathbf{C}_\delta (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{A}_\delta)^{-1} \mathbf{B}_\delta \quad (12)$$

根据留数定理得舍入噪声增益

$$G_l = \|H_l(\varepsilon)\|_2^2 = \text{tr}(\mathbf{D}_\delta^T \mathbf{D}_\delta + \mathbf{B}_\delta^T \mathbf{W}_c^\delta \mathbf{B}_\delta) \quad (13)$$

其中, \mathbf{W}_c^δ 是优化结构状态空间实现时的可观格莱姆矩阵。

由图2和图3在无限精度下有

$$\left. \begin{aligned} y(n) &= \beta_0 u(n) + x_1(n) \\ &\vdots \\ x_{l+1}(n+1) &= K_{l+1} [\beta_{l+1} u(n) - \alpha_{l+1} y(n) \\ &\quad + x_{l+2}(n)] + x_{l+1}(n) \\ x_l(n+1) &= K_l [\beta_l u(n) - \alpha_l y(n) + x_{l+1}(n)] \\ &\quad + x_l(n) \\ x_{l-1}(n+1) &= K_{l-1} [\beta_{l-1} u(n) - \alpha_{l-1} y(n) \\ &\quad + x_l(n)] + x_{l-1}(n) \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中, $x_{N+1}(n) = 0$. 数字系统无论是硬件还是仿真软件实现, 参数0和 ± 1 都可以精确实现不会引起系统函数偏差, 即不会引起有限字长的问题, 通常称这类参数为平凡参数. 而 α_l , β_l 和 K_l 为非平凡参数, 硬件实现时会引入舍入误差. 下面逐个讨论以

上每个参数引入的误差对系统性能影响。

(1) 系数 $\beta_l (l \neq 0)$ 与输入信号 $u(n)$ 相乘经过有限字长存储器引入的舍入噪声使式(14)变为

$$\left. \begin{aligned} y^*(n) &= \beta_0 u(n) + x_1^*(n) \\ \vdots \\ x_{l+1}^*(n+1) &= K_{l+1} [\beta_{l+1} u(n) - \alpha_{l+1} y^*(n) \\ &\quad + x_{l+2}^*(n)] + x_{l+1}^*(n) \\ x_l^*(n+1) &= K_l [\beta_l u(n) + \varepsilon_l(n) - \alpha_l y^*(n) \\ &\quad + x_{l+1}^*(n)] + x_l^*(n) \\ x_{l-1}^*(n+1) &= K_{l-1} [\beta_{l-1} u(n) - \alpha_{l-1} y^*(n) \\ &\quad + x_l^*(n)] + x_{l-1}^*(n) \\ \vdots \end{aligned} \right\} (15)$$

其中, $\varepsilon_l(n) = q[\beta_l u(n)] - \beta_l u(n)$, 表示由于量化器 $q[\cdot]$ 的存在而引入的舍入噪声, 记 $\Delta x_l(n) = x_l^*(n) - x_l(n)$, 对比式(8)和式(15), 则有

$$\left. \begin{aligned} \Delta y(n) &= \Delta x_1(n) \\ \vdots \\ \Delta x_{l+1}(n+1) &= K_{l+1} [-\alpha_{l+1} \Delta y(n) \\ &\quad + \Delta x_{l+2}(n)] + \Delta x_{l+1}(n) \\ \Delta x_l(n+1) &= K_l [\varepsilon_l(n) - \alpha_l \Delta y(n) \\ &\quad + \Delta x_{l+1}(n)] + \Delta x_l(n) \\ \Delta x_{l-1}(n+1) &= K_{l-1} [-\alpha_{l-1} \Delta y(n) \\ &\quad + \Delta x_l(n)] + \Delta x_{l-1}(n) \\ \vdots \end{aligned} \right\} (16)$$

记以 $\varepsilon_l(n)$ 为输入, $\Delta y(n)$ 为输出的系统函数为 $H_l(\varepsilon)$ 。对比式(8), 则 $\mathbf{B}_\delta = K_l \mathbf{e}_l(n)$, $\mathbf{D}_\delta = 0$ 。其中 $\mathbf{e}_l(n)$ 是 N 维列向量, 除了第 l 个元素为1外, 其余元素都为零。得

$$H_l(\varepsilon) = \mathbf{C}_\delta (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{A}_\delta)^{-1} K_l \mathbf{e}_l(n) \quad (17)$$

因此, 因系数 $\beta_l (l \neq 0)$ 量化引入的舍入噪声增益可表示为

$$G_{\beta_l} = K_l^2 \mathbf{e}_l^T \mathbf{W}_o^\delta \mathbf{e}_l \quad (18)$$

同理, 系数 α_l 的舍入噪声增益为

$$G_{\alpha_l} = G_{\beta_l} = K_l^2 \mathbf{e}_l^T \mathbf{W}_o^\delta \mathbf{e}_l \quad (19)$$

(2) 系数 β_0 引入的舍入噪声使式(14)变为

$$\left. \begin{aligned} y^*(n) &= \beta_0 u(n) + \varepsilon_0 + x_1^*(n) \\ \vdots \\ x_{l+1}^*(n) &= K_{l+1} [\beta_{l+1} u(n) - \alpha_{l+1} y^*(n) \\ &\quad + x_{l+2}^*(n)] + x_{l+1}^*(n) \\ x_l^*(n+1) &= K_l [\beta_l u(n) - \alpha_l y^*(n) + x_{l+1}^*(n) \\ &\quad + x_l^*(n)] \\ x_{l-1}^*(n+1) &= K_{l-1} [\beta_{l-1} u(n) - \alpha_{l-1} y^*(n) \\ &\quad + x_l^*(n)] + x_{l-1}^*(n) \\ \vdots \end{aligned} \right\} (20)$$

其中, $\varepsilon_0(n) = q[\beta_0 u(n)] - \beta_0 u(n)$, 对比式(8)和式(20), 则有

$$\left. \begin{aligned} \Delta y(n) &= \varepsilon_0 + \Delta x_1(n) \\ \vdots \\ \Delta x_{l+1}(n+1) &= K_{l+1} [-\alpha_{l+1} \Delta y(n) \\ &\quad + \Delta x_{l+2}(n)] + \Delta x_{l+1}(n) \\ \Delta x_l(n+1) &= K_l [-\alpha_l \Delta y(n) + \Delta x_{l+1}(n)] \\ &\quad + \Delta x_l(n) \\ \Delta x_{l-1}(n+1) &= K_{l-1} [-\alpha_{l-1} \Delta y(n) \\ &\quad + \Delta x_l(n)] + \Delta x_{l-1}(n) \\ \vdots \end{aligned} \right\} (21)$$

记以 $\varepsilon_0(n)$ 为输入, $\Delta y(n)$ 为输出的传递函数为 $H_0(\varepsilon)$, 对比式(8), 则 $\mathbf{B}_\delta = \overline{\mathbf{K}} \boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{D}_\delta = 1$ 。其中, $\overline{\mathbf{K}} \boldsymbol{\alpha} \triangleq [K_1 \alpha_1 \quad K_2 \alpha_2 \quad \dots \quad K_N \alpha_N]^\top$, 可得

$$H_0(\varepsilon) = -\mathbf{C}_\delta (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{A}_\delta)^{-1} \overline{\mathbf{K}} \boldsymbol{\alpha} + 1 \quad (22)$$

因此, 由系数 β_0 引入的舍入噪声增益为

$$G_{\beta_0} = 1 + \overline{\mathbf{K}} \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{W}_o^\delta \overline{\mathbf{K}} \boldsymbol{\alpha} \quad (23)$$

(3) 参数 K_l 引入的舍入噪声使式(14)变为

$$\left. \begin{aligned} y^*(n) &= \beta_0 u(n) + x_1^*(n) \\ \vdots \\ x_{l+1}^*(n) &= K_{l+1} [\beta_{l+1} u(n) - \alpha_{l+1} y^*(n) \\ &\quad + x_{l+2}^*(n)] + x_{l+1}^*(n) \\ x_l^*(n+1) &= K_l [\beta_l u(n) - \alpha_l y^*(n) + x_{l+1}^*(n) \\ &\quad + \varepsilon_l(n) + x_l^*(n)] \\ x_{l-1}^*(n+1) &= K_{l-1} [\beta_{l-1} u(n) - \alpha_{l-1} y^*(n) \\ &\quad + x_l^*(n)] + x_{l-1}^*(n) \\ \vdots \end{aligned} \right\} (24)$$

对比式(8)和式(24), 则有

$$\left. \begin{aligned} \Delta y(n) &= \Delta x_1(n) \\ \vdots \\ \Delta x_{l+1}(n+1) &= K_{l+1} [-\alpha_{l+1} \Delta y(n) \\ &\quad + \Delta x_{l+2}(n)] + \Delta x_{l+1}(n) \\ \Delta x_l(n+1) &= K_l [-\alpha_l \Delta y(n) + \Delta x_{l+1}(n)] \\ &\quad + \varepsilon_l(n) + \Delta x_l(n) \\ \Delta x_{l-1}(n+1) &= K_{l-1} [-\alpha_{l-1} \Delta y(n) + \Delta x_l(n)] \\ &\quad + \Delta x_{l-1}(n) \\ \vdots \end{aligned} \right\} (25)$$

记以 $\varepsilon_l(n)$ 为输入, $\Delta y(n)$ 为输出的传递函数为 $H_l(\varepsilon)$, 对比式(8), 则 $\mathbf{B}_\delta = \mathbf{e}_l(n)$, $\mathbf{D}_\delta = 0$, 得

$$H_l(\varepsilon) = \mathbf{C}_\delta (\varepsilon \mathbf{I} - \mathbf{A}_\delta)^{-1} \mathbf{e}_l(n) \quad (26)$$

因此, 由参数 K_l 引入的舍入噪声增益为

$$G_{K_l} = \mathbf{e}_l^T \mathbf{W}_o^\delta \mathbf{e}_l \quad (27)$$

则优化结构采用多项式优化方法时的舍入噪声增益表达式如式(28):

$$\begin{aligned}
 G_\delta &= \sum_{l=1}^N G_{\alpha_l} + \sum_{l=0}^N G_{\beta_l} + \sum_{l=1}^N G_{K_l} \\
 &= 2 \sum_{l=1}^N G_{\beta_l} + G_{\beta_0} + \sum_{l=1}^N G_{K_l} \\
 &= 2 \sum_{l=1}^N K_l^2 W_o^\delta(l, l) + 1 + \overline{K\alpha}^T W_o^\delta \overline{K\alpha} \\
 &\quad + \text{tr}(W_o^\delta) \tag{28}
 \end{aligned}$$

4 实验仿真及分析

下面利用FIR滤波器实例从两方面仿真验证所提结构的性能。一方面为得到字长对优化结构性能的影响，同时观察自由因子优化的效果，对不同字长、不同自由因子下优化结构的频谱进行仿真，并将其与理想状态对比分析；另一方面通过数值仿真得到优化结构的舍入噪声增益，并与现有有限字长算法对比并给出结论。

4.1 频率响应特性仿真

以23阶线性相位FIR低通数字滤波器为例给出所提优化结构频响特性，仿真参数如表1所示。

表1 低通滤波器仿真参数

参数	数值
通带截止频率	0.3π rad
阻带截止频率	0.5π rad
通带最大衰减	1 dB
阻带最小衰减	40 dB

图4—图7中仿真自由因子 K 为定值时不同字长 B 约束下优化结构的频谱。

$K = 10^{-4}$ 时，不同字长约束时量化后优化结构、传统结构及其在理想状态下频域对比如图4和图5所示。可以看出当 $B = 16$ 时，量化对频域的影响不太明显，量化后两种结构的幅频与相频都基本与理想状态基本完全重合。当 $B = 12$ 时，量化对传统结构高频阶段的幅频与相频都有明显影响，而对优化结构的幅频相频响应几乎无影响。这是因为优化结构通过引入自由因子控制节点处能量使字长得到充分利用，从而有效降低字长量化对FIR滤波器频域特性的影响，使得优化后的FIR滤波器有良好的抗有限字长性能。

$B = 16$ 时，不同自由因子下量化后优化结构、传统结构及其在理想状态下频域对比如图4和图6所示。可以看出当 $K = 10^{-4}$ 时，量化对频域的影响

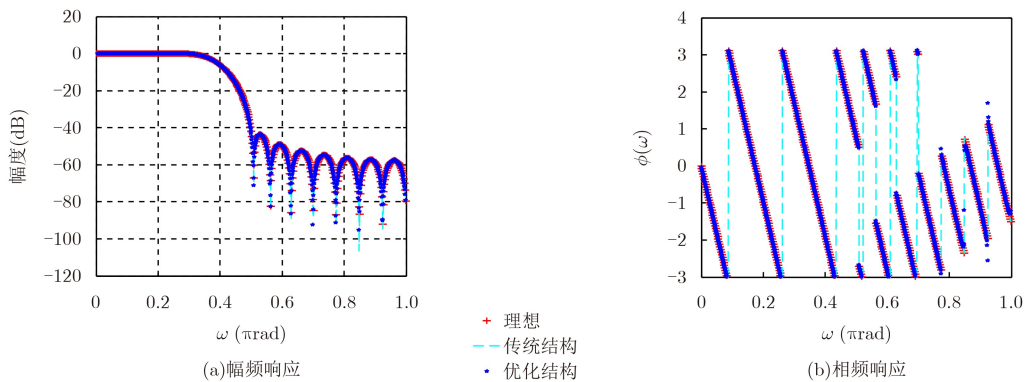


图4 $B = 16, K = 10^{-4}$ 时，量化后优化结构、传统结构及其在理想状态下频域对比

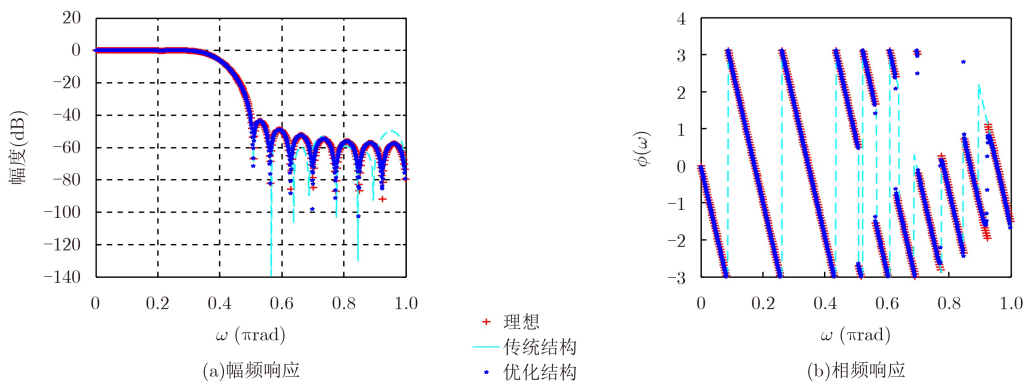


图5 $B = 12, K = 10^{-4}$ 时，量化后优化结构、传统结构及其在理想状态下频域对比

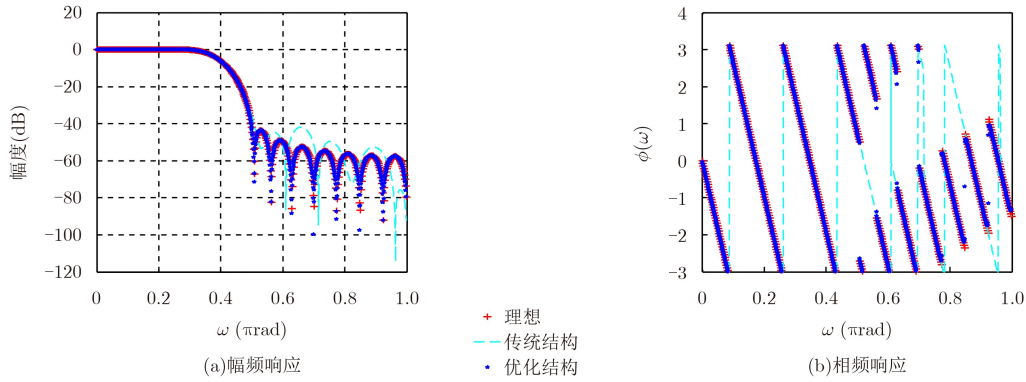


图6 $B = 16, K = 10^{-6}$ 时, 量化后优化结构、传统结构及其在理想状态下频域对比

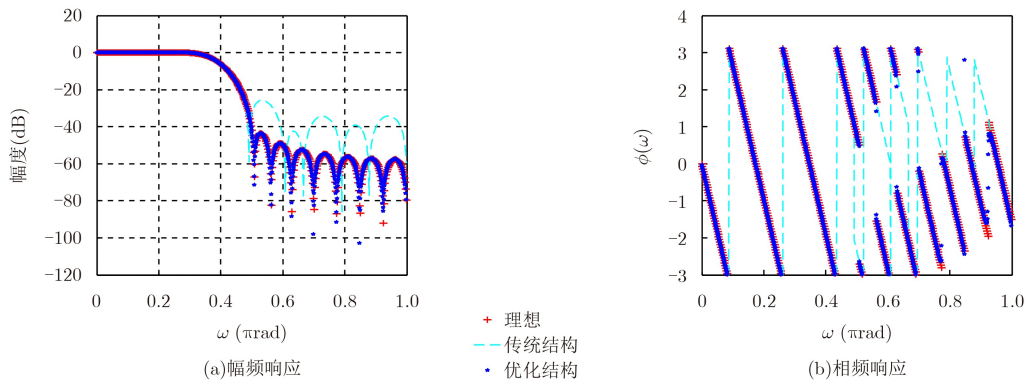


图7 $B = 10$ 时, 量化后优化结构、传统结构及其在理想状态下频域对比

不明显, 无论采用哪种结构, 量化后的幅频与相频响应都基本与理想状态重合。而当 $K = 10^{-6}$ 时, 量化后传统结构高频阶段的幅频与相频都明显偏离理想状态, 而优化结构的幅频响应几乎不受量化的影响。这是因为优化的基本结构中反馈的引入, 使得部分量化引起的误差被削弱, 累积到输出的误差减小。说明引入优化结构能有效解决传统结构高频阶段对量化敏感的问题。

以上分析中自由因子均取定值, 接下来分析自由因子优化后所提结构的性能。

由图7可得, $B = 10$ 时, 使用传统结构设计的滤波器由于字长影响, 实际滤波器阻带截止频率已经小于 0.5π rad, 不满足设计要求。本文所提结构几乎没有受到字长影响, 仍然与理想状态重合。这是因为其独立出来的自由因子通过优化使得每个中间节点的误差都达到最小, 从而使得总误差最小, 有效抵抗有限字长对滤波器频域性能的影响。

由以上仿真可得采用优化结构的FIR滤波器在有限字长约束下仍具有较好的频域性能, 与传统结构的理想情况基本吻合, 可用于抗有限字长的高性能原型滤波器的设计优化中。

4.2 舍入噪声增益性能数值仿真

下面仿真分析上例中低通滤波器的舍入噪声性能。不同自由因子下两种结构的舍入噪声增益对比

如表2所列。

表2中可得当自由因子取值较小时, 优化结构的舍入噪声增益比传统结构低。

由表3得无论是传统结构还是Tabu算法和模拟退火算法, 它们的舍入噪声增益相对优化结构都较大。这是因为一方面基本结构中反馈的引入削弱了部分量化的影响, 另一方面优化结构通过自由因子的优化有效降低每个节点的误差, 从而从根本上降低了舍入噪声的影响。

表2 各结构舍入噪声增益性能对比

自由因子 K	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
优化结构	6.248	6.248	6.248	8.425	10.210
传统结构	24	24	24	24	24

表3 各实现方式舍入噪声增益性能对比

实现方式	舍入噪声增益
传统实现	24
Tabu算法	24
模拟退火算法	24
优化结构	5.273

5 结束语

本文提出一种FIR原型滤波器优化结构, 并采

用多项式参数化方法推导出舍入噪声增益数学表达式。通过多种实现方式及结构对比,仿真实例证明,在有限字长约束下的优化结构幅频和相频响应与理想状态基本吻合,同时其舍入噪声增益性能有明显改善,即在抗有限字长效应方面具有良好数字特性。在滤波器设计时将舍入噪声的影响综合加以考虑,可望为理论设计的滤波器在硬件实现时的有限字长问题提供理论参考。

参考文献

- [1] BELLANGER M, LERUYET D, ROVIRAS D, *et al.* FBMC physical layer: A primer[R]. P7-ICT Project PHYDYAS, 2010.
 - [2] FARHANG-BOROJENY B. OFDM versus filter bank multicarrier[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2011, 28(3): 92–112. doi: [10.1109/MSP.2011.940267](https://doi.org/10.1109/MSP.2011.940267).
 - [3] NADAL J, NOUR C A, and BAGHDADI A. Design and evaluation of a novel short prototype filter for FBMC/OQAM modulation[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 19610–19625. doi: [10.1109/ACCESS.2018.2818883](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2818883).
 - [4] SHARMA I, KUMAR A, SINGH G K, *et al.* Design of multiplierless prototype filter for two-channel filter bank using hybrid method in FCSD space[J]. *IET Circuits, Devices & Systems*, 2017, 11(1): 29–40. doi: [10.1049/iet-cds.2016.0124](https://doi.org/10.1049/iet-cds.2016.0124).
 - [5] JIANG Junzheng, LING Wingkuen, and OUYANG Shan. Efficient design of prototype filter for large scale filter bank-based multicarrier systems[J]. *IET Signal Processing*, 2017, 11(5): 521–526. doi: [10.1049/iet-spr.2016.0566](https://doi.org/10.1049/iet-spr.2016.0566).
 - [6] ROTTENBERG F, MESTRE X, HORLIN F, *et al.* Performance analysis of linear receivers for uplink Massive MIMO FBMC-OQAM systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(3): 830–842. doi: [10.1109/TSP.2017.2778682](https://doi.org/10.1109/TSP.2017.2778682).
 - [7] NA D and CHOI K. Low PAPR FBMC[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2018, 17(1): 182–193. doi: [10.1109/TWC.2017.2764028](https://doi.org/10.1109/TWC.2017.2764028).
 - [8] RENCZES B, KOLLÁR I, MOSCHITTA A, *et al.* Numerical optimization problems of Sine-wave fitting algorithms in the presence of roundoff errors[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2016, 65(8): 1785–1795. doi: [10.1109/TIM.2016.2562218](https://doi.org/10.1109/TIM.2016.2562218).
 - [9] 贾建华. FIR滤波器有限字长效应产生的特性畸变与零点分布的关系[J]. 上海铁道学院学报, 1994, 15(3): 26–31.
JIA Jianhua. The relation of zero distribution and distortion variation for finite register length effects in FIR digital filter[J]. *Journal of Shanghai Institute of Railway Technology*, 1994, 15(3): 26–31.
 - [10] KOTTERI K A, BELL A E, and CARLETTA J E. Quantized FIR filter design using compensating zeros[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2003, 20(6): 60–67. doi: [10.1109/MSP.2003.1253556](https://doi.org/10.1109/MSP.2003.1253556).
 - [11] KODAR D. Design of optimal finite wordlength FIR digital filters using integer programming techniques[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1980, 28(3): 304–308. doi: [10.1109/TASSP.1980.1163407](https://doi.org/10.1109/TASSP.1980.1163407).
 - [12] LIM Y C and PARKER S R. FIR filter design over a discrete powers-of-two coefficient space[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1983, 31(3): 583–591. doi: [10.1109/TASSP.1983.1164085](https://doi.org/10.1109/TASSP.1983.1164085).
 - [13] 殷福亮, 周浩洋. 设计有限字长FIR数字滤波器的Tabu优化算法[J]. 电子与信息学报, 2003, 25(10): 1367–1372.
YIN Fuliang and ZHOU Haoyang. Tabu optimization algorithm for designing finite wordlength FIR digital filters[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2003, 25(10): 1367–1372.
 - [14] BENVENUTO N and MARCHESI M. Digital filters design by simulated annealing[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1989, 36(3): 459–460. doi: [10.1109/31.17597](https://doi.org/10.1109/31.17597).
 - [15] WONG N and NG T S. A generalized direct-form delta-operator based IIR filter with minimum noise gain and sensitivity[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 2001, 48(4): 425–431. doi: [10.1109/82.933811](https://doi.org/10.1109/82.933811).
- 庄陵: 女, 1978年生, 副教授, 博士, 研究方向为移动通信数字信号处理。
关 鹃: 女, 1991年生, 硕士生, 研究方向为滤波器组系统原型滤波器优化。
马靖怡: 女, 1993年生, 硕士生, 研究方向为数字信号处理、数字滤波器结构设计。
王光宇: 男, 1964年生, 教授, 博士, 研究方向为高速信号处理、多速率滤波器组理论。