

## 基于方向图匹配重构的波束扫描测角方法

朱晓丹<sup>\*①②</sup> 朱伟强<sup>①</sup> 陈卓<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(中国航天科工集团8511研究所 南京 210007)

<sup>②</sup>(中国航天科工集团二院研究生院 北京 100854)

**摘要:** 利用单个旋转天线实现波束扫描高精度测角具有十分重要的意义。为了以低计算复杂度实现高精度角度估计, 该文提出一种基于模式分量分离的闭式估计方法。首先将天线方向图表示为指数和形式, 将角度估计问题转化为包含角度信息的模式分量估计问题, 从而实现单模角度估计。结合模式分量的理论估计误差, 推导得到多模联合估计式和理论估计精度。针对非理想观测条件下, 模式分量求解出现的数值不稳定问题, 提出对方向图进行匹配重构的方法, 首先通过对观测序列和方向图抽样点进行互相关计算, 估计得到粗略角度, 确定方向图重构的角度范围, 再通过匹配重构避免观测角度矩阵的病态问题。理论和仿真结果表明, 所提的基于模式分量分离的多模测角方法具有估计精度高、计算简单的优点, 提出的匹配重构方法提高了估计算法的适应性。

**关键词:** 测角; 波束扫描; 病态问题; 互相关; 模式分量; 匹配重构

中图分类号: TN97

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)11-2691-07

DOI: 10.11999/JEIT180002

## Direction Finding Using Scanned Beams Based on Matched Reconstruction of Antenna Pattern

ZHU Xiaodan<sup>①②</sup> ZHU Weiqiang<sup>①</sup> CHEN Zhuo<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(No.8511 Research Institute of China Aerospace Science and Industry Corporation, Nanjing 210007, China)

<sup>②</sup>(Graduate School of The Second Academy of China Aerospace, Beijing 100854, China)

**Abstract:** Estimation of Direction Of Arrival (DOA) with scanned beams of single rotational antenna is meaningful. To obtain precise estimation with low computation burden, a closed-form estimator is proposed based on estimating the mode component. Firstly, the problem can be transformed into the estimation of mode component when antenna pattern is expressed with a formula of exponential sums, thus DOA can be induced from each mode. Considering the estimation error, a multi-mode estimator with its theoretical error is derived. Non-ideal observing conditions result in an ill-determined problem for the estimation of mode component. A modified method is proposed by reconstructing the antenna pattern. By calculating cross-correlation of the observed amplitude trains with the antenna pattern samples, a coarse estimation of DOA is obtained to determine the angle range under the matched reconstruction. Then, ill-determined problem can be avoided if the converted mode component is calculated with the new pattern. Both theoretical and simulation results demonstrate that the proposed method can obtain high precise estimation with low computation cost, and the proposed matched reconstruction approach extends the adaptability of the method.

**Key words:** Direction finding; Beam scanning; Ill-determined problem; Cross-correlation; Mode component; Matched reconstruction

### 1 引言

角度估计是雷达、侦察等领域的重要内容<sup>[1]</sup>, 目前较为常见的高精度测角方法通常需要利用多个通道布置相对较长的基线。与多通道测角系统不同, 利用旋转单天线进行角度测量的方法仅需单个

通道, 无需形成基线, 是一种容易实现的方法。旋转单天线测角方法主要分为旋转多普勒测角<sup>[2]</sup>和波束扫描测角两类方法。受限于多普勒频率的测量精度, 旋转多普勒测角方法精度一般较低; 旋转单天线波束扫描法主要包括最大幅度法<sup>[1]</sup>、最小幅度法<sup>[3]</sup>、相邻波束比幅法<sup>[4]</sup>, 以及一些参数化的估计方法<sup>[5]</sup>。总地来看, 这类方法主要利用天线在不同角度上增益的差异进行测角, 算法计算量较大, 且测角精度

收稿日期: 2018-01-02; 改回日期: 2018-09-03; 网络出版: 2018-09-07

\*通信作者: 朱晓丹 xldanzh@163.com

较低,但由于幅度容易测量,该方法在雷达领域得到了广泛的应用<sup>[6]</sup>。此外,对运动平台利用基于合成孔径雷达的原理也可以实现单天线单通道角度估计<sup>[7]</sup>,或采用对方向敏感的天线实现单天线单通道测角<sup>[8]</sup>,但是这些方法本质上是增加了额外的辅助条件,提高了实现的难度,或难以应用于无源测角问题中。

传统波束扫描测角方法的不足本质在于只利用了方向图的主瓣等包络特征,不仅难以提高测角精度,也限制了测角方法的适应性。为此,文献<sup>[9-11]</sup>提出了基于谱估计、稀疏分解的单天线测角方法,但这些方法普遍存在计算复杂较高的问题,且通常将天线主瓣近似为2次函数,引入了模型误差。

为了以低计算复杂度算法实现高精度测角,本文提出一种基于模式分量分离的估计算法,首先将天线方向图表示为指数和形式,通过模式分量分离得到单模角度解析估计,同时结合多模式分量进行联合估计;对于观测角度范围有限时模式分量估计存在的数值不稳定问题,提出一种天线方向图匹配重构方法,首先通过互相关法进行粗测角,确定方向图的重构范围,再通过匹配重构实现对模式分量的稳定估计,继而实现角度的精估计。

## 2 问题模型

将天线方向图表示为式(1)所示的指数和的形式<sup>[12]</sup>。

$$F(\theta) = \sum_{m=-M}^M c_m e^{jm\theta} = c_0 + \sum_{m=1}^M (c_m + c_{-m}) \cos(m\theta) + j \sum_{m=1}^M (c_m - c_{-m}) \sin(m\theta) \quad (1)$$

式中, $m$ 为方向图模式序号, $m, M$ 为整数,  $-M \leq m \leq M$ ;  $c_m$ 称为第 $m$ 个模式的大小,  $m$ 绝对值越大,  $c_m$ 对方向图的贡献越小,超过一定范围的模式可以忽略,  $M$ 一般取4~8即可表示各种形式的方向图<sup>[9]</sup>。模式大小 $c_m$ 可通过天线的测试计算得到。因 $F(\theta)$ 为正实数,结合式(1)可推知 $c_m = c_{-m}^*$ , “\*”表示共轭,则

$$F(\theta) = c_0 + 2 \sum_{K=1}^M \operatorname{Re}(c_m) \cos(m\theta) - 2 \sum_{m=1}^M \operatorname{Im}(c_m) \sin(m\theta) \quad (2)$$

式中,  $\operatorname{Im}(\bullet)$ ,  $\operatorname{Re}(\bullet)$ 分别表示取实部和取虚部。如果天线方向图关于 $0^\circ$ 方向对称,结合式(1)可推知

$c_m$ 为实数,式(2)中等号右端的第3项为零。

记天线波束 $0^\circ$ 指向为观测角度,对角度为 $\theta_0$ 的待估计目标,旋转天线在 $N$ 个不同的观测角度 $\phi_n (1 \leq n \leq N)$ 接收信号,假定在同样位置利用 $0$  dB增益天线测量该信号得到的功率为 $P_0$ ,则利用该天线在不同观测角度收到的信号功率可表示为

$$s_n \triangleq s_n(\theta_0) = P_0 \sum_{m=-M}^M c_m e^{jm(\theta_0 - \phi_n)} = \sum_{m=-M}^M (P_0 e^{jm\theta_0}) c_m e^{-jm\phi_n} \quad (3)$$

式(3)所示的模型假定目标信号功率保持恒定。对于功率时变的目标,可增加1个天线,将两天线的增益比值和接收到的目标信号的比值分别看成新的天线和新天线收到的信号,从而可以转化为类似式(3)所示的模型。

## 3 多模式联合角度估计方法

### 3.1 模式分量分离

由式(3)可以看出,  $s_n$ 中包含目标信息的量为 $P_0 e^{jm\theta_0}$ ,称为模式分量,记作 $y_m \triangleq P_0 e^{jm\theta_0} = r_m + j i_m$ 。其中,  $r_m = P_0 \cos(m\theta_0)$ ,  $i_m = P_0 \sin(m\theta_0)$ ,满足 $y_{-m} = y_m^*$ ,将式(3)整理成向量形式为

$$\mathbf{s} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{s} = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_N]^T$ ,  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_N]^T$ ,  $\mathbf{b}_n = [c_0 \ \mathbf{b}_{n,c}^T \ \mathbf{b}_{n,s}^T]^T$ ,  $\mathbf{b}_{n,c} = [2c_1 \cos(\phi_n) \ 2c_2 \cos(\phi_n) \ \dots \ 2c_M \cos(M\phi_n)]^T$ ,  $\mathbf{b}_{n,s} = [2c_1 \sin(\phi_n) \ 2c_2 \sin(\phi_n) \ \dots \ 2c_M \sin(M\phi_n)]^T$ ,  $\mathbf{a} = [y_0 \ r_1 \ \dots \ r_M \ i_1 \ \dots \ i_M]^T$ 。由于采用同一接收处理通道,可认为各次测量误差独立,1阶矩和2阶矩分别为0,  $\sigma_r^2$ 。在满足 $N \geq 2M + 1$ 的条件下可对式(4)通过加权最小二乘法可估计得到

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{s} \quad (5)$$

估计误差的协方差矩阵为 $\mathbf{W}_y = \sigma_r^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1}$ ,

$$\mathbf{W}_y \text{可分块表示为 } \mathbf{W}_y = \begin{bmatrix} w_0 & \mathbf{w}_{r0}^T & \mathbf{w}_{i0}^T \\ \mathbf{w}_{r0} & \mathbf{W}_{rr} & \mathbf{W}_{ri} \\ \mathbf{w}_{i0} & \mathbf{W}_{ir} & \mathbf{W}_{ii} \end{bmatrix},$$

下标 $0, r, i$ 分别表示 $y_0$ 、模式分量实部、模式分量虚部,  $w_0, \mathbf{w}_{r0}, \mathbf{w}_{i0}, \mathbf{W}_{rr}, \mathbf{W}_{ri}, \mathbf{W}_{ir}, \mathbf{W}_{ii}$ 的元素分别为 $w_{y_0, y_0}, w_{r_m, y_0}, w_{i_m, y_0}, w_{r_m, r_m}, w_{r_m, i_m}, w_{i_m, r_m}, w_{i_m, i_m}$ 。在角度估计时需要考虑 $r_m, i_m$ 的估计误差的相关性。

### 3.2 单模角度估计

由 $r_m, i_m$ 可估计得到单模角度估计

$$\hat{\theta}_{0,m}^A = \frac{1}{m} \tan^{-1} \frac{r_m}{i_m} \quad (6)$$

式中,  $\hat{\theta}_{0,m}^A$  表示存在模糊性的角度估计, 结合  $r_m, i_m$  的正负性可以知道, 模糊周期为  $2\pi/m$ , 模式越高, 不模糊范围越小。对式(6)进行误差分析可以得到

$$\sigma_{\theta_{0,m}} = \frac{\sigma_r}{mP_0^2} \sqrt{r_m^2 w_{i_m, i_m} + i_m^2 w_{r_m, r_m}} \quad (7)$$

由式(7)可以看出, 各个模式对应的角度估计精度不同, 由于低次模式系数较大, 测角精度也更高。因此, 可以用1次模测角结果求解高次模式测角的模糊数。对高次模式角度估计的解模糊方法为

$$\hat{\theta}_{0,m} = \hat{\theta}_{0,m}^A + \frac{2\pi}{m} \left\lfloor \frac{m\hat{\theta}_{0,m}^A}{2\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor - \frac{\pi}{m} \quad (8)$$

式中,  $\left\lfloor \frac{m\hat{\theta}_{0,m}^A}{2\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$  表示大于  $\frac{m\hat{\theta}_{0,m}^A}{2\pi} + \frac{1}{2}$  的最小整数。

### 3.3 多模联合估计

根据单模分量估计得到的角度  $\hat{\theta}_{0,m}$ , 结合角度估计的协方差矩阵可进行多模式分量联合估计。首先求解单模角度估计误差的协方差矩阵  $\mathbf{W}_{\theta_0}$ , 其元素  $\{\mathbf{W}_{\theta_0}\}_{mm'}$  为

$$\begin{aligned} \{\mathbf{W}_{\theta_0}\}_{mm'} &= E\{d\theta_{0,m} d\theta_{0,m'}\} \\ &= \frac{\sigma_r^2}{mm'P_m^2} \left( r_m^2 w_{i_m, i_{m'}} + i_m^2 w_{r_m, r_{m'}} \right. \\ &\quad \left. - r_m i_{m'} w_{i_m, r_{m'}} - i_m r_m w_{r_m, i_{m'}} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $\{\mathbf{W}_{\theta_0}\}_{mm'}$  包含的  $r_m, i_m, r_{m'}, i_{m'}$  都是未知的, 与目标角度和  $P_0$  有关。

在得到各个模式对应的粗估计值之后, 再进行多模联合估计。记  $\mathbf{W}_{\theta_0}^{-1} = \frac{P_0^2}{\sigma_r^2} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{M1} & \cdots & v_{MM} \end{bmatrix}$ , 可求得多模联合估计的加权最小二乘估计:

$$\hat{\theta}_0 = \frac{\sum_{m=1}^M \hat{\theta}_{0,m} \sum_{m'=1}^M v_{mm'}}{\sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M v_{mm'}} \quad (10)$$

对应的联合估计理论误差为  $\sigma_{\hat{\theta}_0} = \frac{\sigma_r}{P_0} / \sqrt{\sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M v_{mm'}}$ , 其中,  $v_{mm'}$  是未知的, 可采用估计得到的模式分量和单模角度估计代替真实值进行近似计算  $\mathbf{W}_{\theta_0}$  并求取  $v_{mm'}$ 。

上述算法是基于模式分量  $y_1 \sim y_M$  得到的, 并未利用到模式分量  $y_0$ 。尽管  $y_0$  不包含角度信息, 但提供了关于  $y_1 \sim y_M$  中未知的  $P_0$  的信息, 因此需要分析估计算法的理论性能损失。

## 4 理论估计误差分析

### 4.1 模型理论误差

对式(3)微分并整理成矩阵形式为

$$\mathbf{C} \begin{bmatrix} d\theta_0 \\ dP_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ds_1 \\ \vdots \\ ds_N \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2]$ ,  $\mathbf{C}_1 = [C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_N]^T$ ,  $C_n = P_0 \sum_{m=-M}^M j m c_m e^{jm(\theta_0 - \phi_n)}$ ,  $\mathbf{C}_2 = \frac{1}{P_0} [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_N]^T$ 。

求得均方估计误差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{SE} &= E \left\{ \begin{bmatrix} d\theta_0 \\ dP_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_0 \\ dP_0 \end{bmatrix}^T \right\} \\ &= \sigma_r^2 (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

则角度的均方根估计误差为  $\sqrt{\mathbf{M}_{SE}(1,1)}$ ,  $\mathbf{M}_{SE}(1,1)$  表示矩阵  $\mathbf{M}_{SE}$  第1行第1列的元素。

### 4.2 算法理论误差

类似4.1节, 对模式分量  $y_m = P_0 e^{jm\theta_0}$  通过微分分析可推导出估计误差协方差:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{SE} &= E \left( \begin{bmatrix} d\theta_0 \\ dP_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\theta_0 \\ dP_0 \end{bmatrix}^T \right) \\ &= (\mathbf{C}'^T \mathbf{W}_y'^{-1} \mathbf{C}')^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{C}' = [\mathbf{C}'_1 \ \mathbf{C}'_2]$ ,  $\mathbf{C}'_1 = P_0 [-\sin \theta_0 \ \cdots \ -M \cdot \sin(M\theta_0) \ \cos \theta_0 \ \cdots \ M \cos(m\theta_0)]^T$ ,  $\mathbf{C}'_2 = [\cos \theta_0 \ \cdots \ \cos(M\theta_0) \ \sin \theta_0 \ \cdots \ \sin(m\theta_0)]^T$ ;  $\mathbf{W}_y' = E\{d\mathbf{b}' d\mathbf{b}'^T\}$ ,  $\mathbf{b}' = [r_1 \ \cdots \ r_M \ i_1 \ \cdots \ i_M]^T$ 。根据式(13), 角度估计误差为  $\sqrt{\mathbf{M}'_{SE}(1,1)}$ ,  $\mathbf{M}'_{SE}(1,1)$  表示矩阵  $\mathbf{M}'_{SE}$  第1行第1列的元素。

由2.1节可以知道  $\mathbf{W}_y' = \sigma_r^2 \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{rr} & \mathbf{W}_{ri} \\ \mathbf{W}_{ir} & \mathbf{W}_{ii} \end{bmatrix}$ , 求得  $\mathbf{W}_y'^{-1} = \mathbf{B}_0 \mathbf{W}_0 \mathbf{B}_0^T$ ,  $\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1,c} & \cdots & \mathbf{b}_{N,c} \\ \mathbf{b}_{1,s} & \cdots & \mathbf{b}_{N,s} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{W}_0 = \mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ ,  $\mathbf{I}$  为  $N$  维单位矩阵,  $\mathbf{1}$  为  $N$  维元素全为1的列向量。可以证明  $\mathbf{C}'^T \mathbf{B}_0 = \mathbf{C}^T - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ c_0 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$ , 从而有

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}'^T \mathbf{W}_y'^{-1} \mathbf{C}')^{-1} &= (\mathbf{C}^T \mathbf{W}_0 \mathbf{C})^{-1} \\ &= (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} + \mathbf{G} \end{aligned} \quad (14)$$

式中,  $\mathbf{G} = \frac{(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1}}{N - \mathbf{1}^T \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{1}}$ ,  $\mathbf{G}$  是非负的。根据式(14)有

$$\mathbf{M}'_{SE} = \mathbf{M}_{SE} + \sigma_r^2 \mathbf{G} \quad (15)$$

因此本文提出的多模式联合估计方法的理论误差大于模型理论误差, 未利用  $y_0$  带来的精度损失体现为协方差矩阵  $\sigma_r^2 \mathbf{G}$ 。

## 5 非理想观测下的方向图重构测角

### 5.1 病态问题分析

2.1节已经指出对式(4)进行求解的观测角度数目要求, 即  $N \geq 2M + 1$ , 此外, 观测角度的分布还关系到能否对式(4)进行稳定的求解。例如, 在观测角度范围较小时, 模式分量的求解会出现数值不稳定问题, 较小的扰动造成较大的求解误差, 即矩阵病态问题。对病态问题一般可以通过矩阵的条件数进行评估, 条件数越大病态问题越严重。图1给出了在不同的观测角度范围内, 观测角度构成的系数矩阵  $\mathbf{B}$  的条件数, 横坐标和纵坐标分别表示起始和结束的观测角度, 目标角度为  $0^\circ$ , 观测角度间隔为  $1^\circ$ , 矩阵条件数已取对数。图中反对角线上的空白处对应的观测角度数目不满足模式分量求解的条件, 因此未画出条件数。仿真中随机产生的  $c_0 \sim c_7$  为 4.068, 0.436, 0.316, 0.180, 0.016, 0.064, 0.068, 0.024。

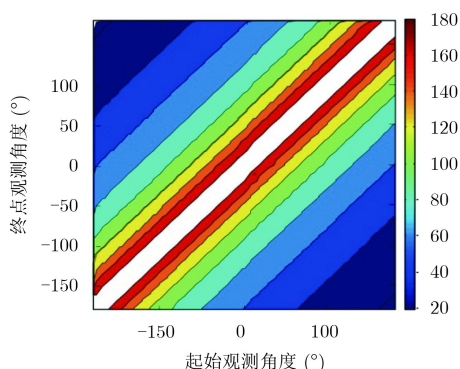


图1 系数矩阵条件数

由图1可以看出, 在观测角度范围为  $-\pi \sim \pi$  附近时, 矩阵条件数较小; 平行于反对角线的方向上, 观测范围相同, 矩阵条件数近似相同; 距离反对角线越近, 矩阵条件数越大, 且增大的速度也越快, 可见观测范围的大小是导致病态问题的最显著因素。在实际的应用场景中, 如目标信号是猝发

的、目标信号较弱或已知目标大致角度范围, 此时只能或只需在有限的观测角度范围内接收信号, 从而带来非理想的观测问题。

### 5.2 方向图匹配重构

由于病态问题主要与观测角度有关, 为此可以将分布范围有限的观测角度映射为  $2\pi$  的角度范围上, 通过改变观测矩阵的结构来避免病态问题。映射的方法是将方向图按照观测范围进行延拓, 重构为新的等效方向图。文献[10]考虑了目标角度处于波束主瓣扫描范围之内, 且扫描范围关于天线  $0^\circ$  对称分布的情形, 并给出了重构的方法, 本文中称该方法为对称重构方法。但在实际应用中, 目标处于波束主瓣扫描范围之外的情形是普遍存在, 且也无法保证扫描范围的对称性。为此, 本文提出方向图匹配重构方法, 仅对观测角度对应的部分方向图进行重构, 可解决对称重构方法难以适应的病态非对称观测问题。

如图2所示, 对多次观测在真实方向图中的抽样序列按照中心角度进行拉伸, 中心角度为  $\theta_{\perp} = (\theta_{-} + \theta_{+})/2$ , 不限定是否为  $0^\circ$ ; 拉伸比例为  $1/k$ ,  $k = (\theta_{+} - \theta_{-})/2\pi < 1$ 。拉伸后的角度变化关系为  $\theta' = \theta/k$ ,  $\phi_n' = \phi_n/k$ 。由此可见, 对称重构只是匹配重构在对称观测条件下的特例。

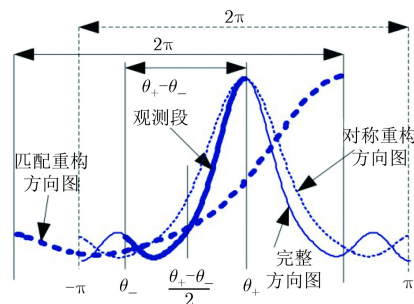


图2 天线方向图匹配重构示意图

重构后方向图周期延伸为  $2\pi$ , 范围为  $[\theta_{-}/k, \theta_{+}/k]$ , 重构后的方向图可表示为

$$G(\theta') \triangleq \sum_{m=-M'}^{M'} c'_m e^{jm\theta'} \quad (16)$$

根据第1节的分析, 重构后非对称的方向图模式系数  $c'$  可用共轭复数对表示, 即  $c' = [c'_0 \text{Re}(c'_1) \cdots \text{Re}(c'_M) \text{Im}(c'_1) \cdots \text{Im}(c'_M)]^T$ 。根据角度变换关系和真实方向图增益, 可求得重构后的方向图模式大小, 再根据式(5)所示的方法进行模式分量分离。值得指出的是, 对称重构方法中待估计的模式系数  $\mathbf{c}$  为  $M + 1$  维向量, 而匹配重构中待估计的

$c'$ 为 $2M+1$ 维向量。因此当观测范围越接近对称分布时，匹配重构方法的优势逐渐下降；反之，匹配重构方法的优势更为明显，角度估计精度更高。经过重构，式(5)的求解不再出现病态问题，可得到稳定的模式分量估计 $y'_m$ ，继而估计得到 $\hat{\theta}_m = \frac{k}{m} \tan^{-1} \frac{r'_m}{i'_m}$ 。进一步，类似式(8)~式(10)得到多模联合估计 $\hat{\theta}_0$ 。

### 5.3 角度粗估计

为了进行重构，首先需要知道观测角度的范围，即知道目标的角度。结合图1可以看出，在观测角度范围接近 $-\pi \sim \pi$ 时，矩阵条件数较小，条件数随着观测范围变小而增大的速度相对小，这说明在重构时，只需要知道大致的观测范围，而无需知道精确的观测范围。这就降低了粗测角度的精度要求，即使粗测角误差达到 $5^\circ$ ，也基本不影响匹配重构的效果。下面将给出一种简单的粗估计算法，可满足重构的需要。

由于侦收信号的功率采样点包络与方向图包络是相同的，可采用经典的相关法进行匹配估计，即将采样点包络与方向图包络看成是两路信号，两路信号的延迟量即为待估计的角度。观测角度 $\phi_n$ 可以是分布集中的，也可以是间断的，可以在主瓣侦收，也可以是在旁瓣侦收。根据互相关法，可以得到

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \text{Cor}(s_n, F(\theta - \phi_n)) \quad (17)$$

式中，Cor表示相关计算， $F(\theta - \phi_n)$ 为 $F(\theta)$ 按照观测角度的抽样序列。

## 6 仿真分析

### 6.1 理想观测条件下的测角分析

图3给出了观测角度范围为 $-180^\circ \sim 180^\circ$ ，间隔为 $1^\circ$ 时，模式分量1,4以及多模联合角度估计的精度，以及式(12)所示模型理论估计精度、式(13)所示的算法理论估计精度与信噪比的关系，天线参数同4.1节仿真，信号的平均功率 $P_0$ 为1。在此观测条

件下，各个目标角度的估计精度是相同的，因此这里只给出了目标角度为 $0^\circ$ 时的仿真。图3还给出了比幅测角的精度[1]，利用2次函数拟合主瓣，波束拟合范围分别为 $-20^\circ \sim 20^\circ$ 和 $-30^\circ \sim 30^\circ$ ，比幅的两波束分别间隔 $20^\circ$ 和 $30^\circ$ 。

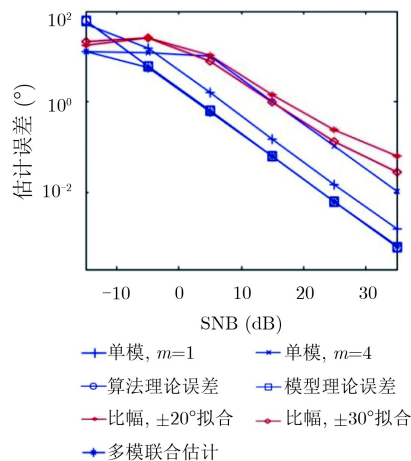


图3 理想观测条件下的角度估计

由图3可以看出，本文方法测角精度均优于传统比幅测角方法；通过多模估计可提高估计精度，并达到算法理论精度，且逼近模型理论精度，算法中忽略 $y_0$ 对测角的影响；算法和理论估计精度随着信噪比的提高而提高(在信噪比较低时出现的算法精度优于理论精度是由于角度模糊限定了角度估计范围，从而限制了角度估计误差的范围)。

### 6.2 病态问题分析

为与图1进行对比，图4(a)，图4(b)分别给出了在不同的观测角度范围内，文献[10]中的对称重构方法以及本文提出的匹配重构方法中得到的系数矩阵 $B, B'$ 的条件数，其余标示的意义与图1相同。

由图1,图4可以看出：匹配重构后系数矩阵条件数小于对称重构系数矩阵条件数，且均小于重构前系数矩阵的条件数；图4(a)中，整体上，观测角度范围越小，条件数越大，这与图1是相同的；在

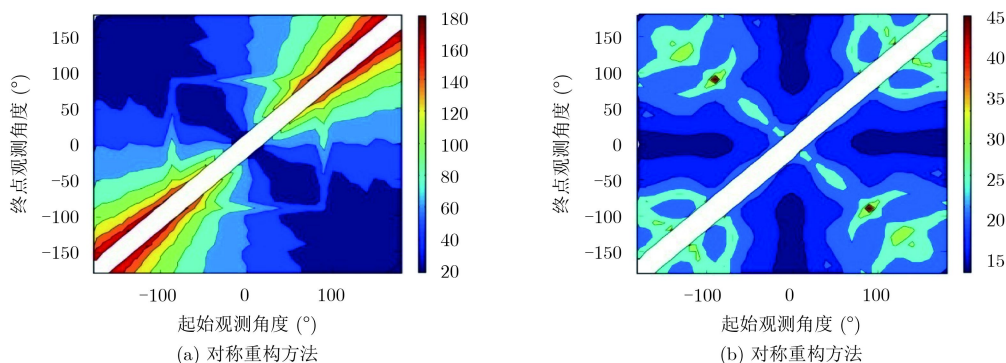


图4 方向图重构前后的矩阵条件数

平行于反对角线的方向上，矩阵条件数不再相同，这是因为在对角线中段，观测范围关于 $0^\circ$ 对称，而在对角线的两端，对称性越不明显，即在观测范围对称的条件下，对称重构方法可以更好地降低矩阵条件数，而在观测范围不对称的条件下，对称重构方法的效果大大降低。由图4(b)可以看出，经过匹配重构，矩阵条件数相对重构前以及对称重构方法大为降低。在反对角线附近方向上，观测范围较小，因而矩阵条件数相对较大，在正对角线附近方向上，由于匹配重构方法忽略了观测范围关于 $0^\circ$ 的对称性，矩阵条件数反而大于远离对角线方向的区域，这是因为接近对称观测条件时，模式系数计算精度较差，这与5.2节的分析一致。

### 6.3 基于互相关的粗测角方法分析

图5给出了不同观测条件下互相关法的粗估计精度，目标角度为 $0^\circ$ ，观测角度间隔为 $5^\circ$ ，估计时先后按照 $1^\circ, 0.2^\circ, 0.05^\circ$ 的搜索步进求互相关值并搜索峰值。由图5可以看出，估计精度随着信噪比的提高而提高；对比 $-30^\circ\sim 30^\circ, 0^\circ\sim 60^\circ, 60^\circ\sim 120^\circ, 120^\circ\sim 180^\circ$ 的观测条件可以看出，同样的观测范围下，不同的观测角度位置会影响测角精度，观测范围为 $-30^\circ\sim 30^\circ$ 时测角精度最高，而观测范围为 $120^\circ\sim 180^\circ$ 时测角精度最低，直观上看，接近主瓣时估计精度越高、远离主瓣时估计精度越低，这是因为主瓣附近波束的起伏更为明显，增益也更高；对比 $0^\circ\sim 60^\circ, 0^\circ\sim 120^\circ, 0^\circ\sim 180^\circ$ 可以看出，观测范围越大，测角精度越高。在此仿真条件下，测角精度优于 $0.2^\circ$ ，这对方向图匹配重构是足够的。

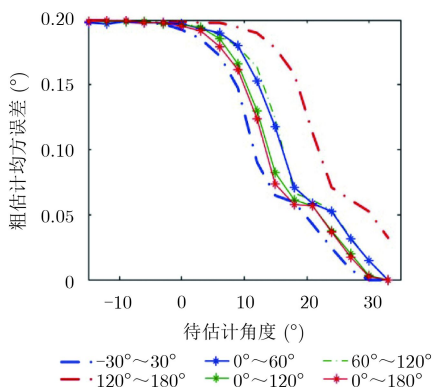


图5 不同观测范围下的粗测角精度

### 6.4 非理想观测下的测角分析

图6给出了对称观测条件下的测角仿真，目标角度为 $0^\circ$ ，观测范围关于 $0^\circ$ 对称，大小分别为 $-10^\circ\sim 10^\circ$ 至 $-180^\circ\sim 180^\circ$ ，观测角度间隔为 $1^\circ$ 。由图6可以看出，重构方法可以达到理论估计精度；在观测范围较小时，重构前无法达到理论估计精

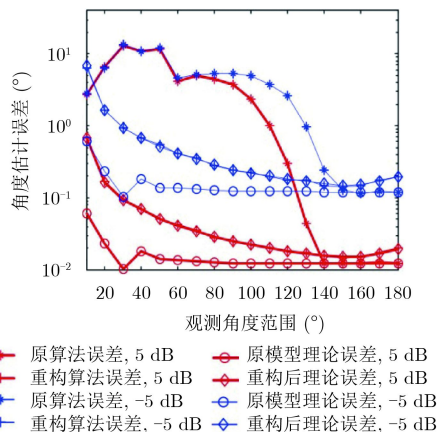


图6 观测范围对称条件下的估计误差

度，出现了病态问题，只有在观测范围较大时，重构前才可以达到理论估计精度；在观测范围小于一定角度(SNR= $-5$  dB时，约为 $150^\circ$ ；SNR= $5$  dB时，约为 $140^\circ$ )时，重构方法测角精度优于未经重构的方法。

图7给出了不同观测范围下的测角仿真。起始观测角度均为 $-180^\circ$ ，终点观测角度分别为 $-160^\circ\sim 180^\circ$ ，SNR为 $5$  dB，其它仿真条件同图6。可以看出，不同方法的测角精度整体上均随着测角范围的扩大而提高；未经重构的方法存在一定的门限观测范围，超过这一门限，测角精度就会快速提高并达到理论精度；对称重构方法难以达到理论估计精度，匹配重构方法可在各种观测条件下达到理论估计精度。从图7还可以看出，理论误差出现了不同程度的起伏，这是因为理论误差的计算也受到矩阵条件数的影响，结合图4可以看出，重构后矩阵条件数随观测范围大小的变化并不总是递变的，而在一定的小范围内出现起伏，在观测范围较小时尤其剧烈，体现为图4中接近反对角线方向上，矩阵条件数的变化越为剧烈。

图8给出了相同观测范围大小、不同观测位置

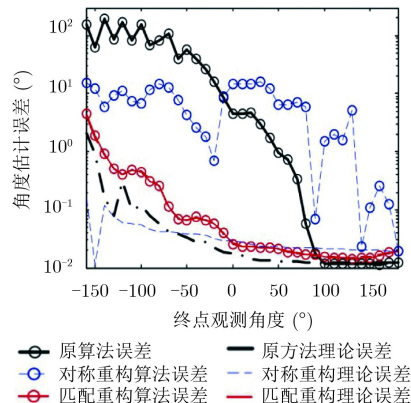


图7 不同观测范围下的估计误差

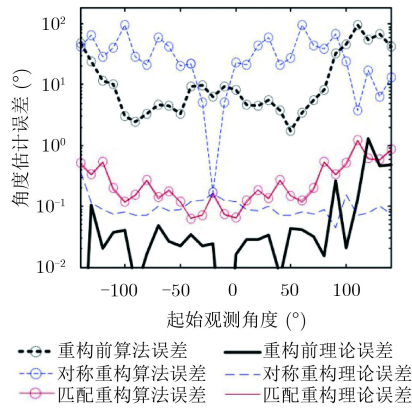


图8 不同观测位置下的估计误差

下的测角仿真。观测角度范围均为 $40^\circ$ ，其它仿真条件同图7。

由图8可以看出，整体上看，匹配重构方法在不同的观测角度位置上均优于未经重构的方法和对称重构方法，且能够达到理论估计精度。由于观测范围较小，重构后矩阵条件数随着观测角度位置的变化出现起伏；在起始观测角度为 $-20^\circ$ 时，满足对称观测的条件，因而对称重构方法出现了误差极小值点，而匹配重构方法由于没有利用到方向图的对称性，出现了估计误差的极大值点。

## 7 结束语

根据各个观测角度处接收到的目标信号，而不同于仅主瓣接收到的目标信号，本文提出一种多模联合角度估计方法，算法计算量低，不涉及复杂的矩阵分解和搜索，且能够达到理论估计精度。提出的匹配重构方法较好地适应各种非理想的观测情形，拓展了算法的适应性。这种利用单天线功率测量实现高精度角度估计的方法具有十分重要的理论和工程意义，由于系统简单、容易实现，有望应用于各种微小型平台。本文主要研究了单目标的测角问题，还需要进一步研究多信号同时测角问题。

## 参考文献

- [1] 赵国庆. 雷达对抗原理[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1999: 44–58.  
ZHAO Guoqing. Principle of Radar Reconnaissance[M]. Xi'an: Xidian University Press, 1999: 44–58.
- [2] TUNCAY K A, SEN E, and TANIK Y. Direction finding with a circularly rotated antenna[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Istanbul, 2000: 3077–3080.
- [3] MARKO M, DUŠAN G, and PETER P. Angle of arrival measurement using multiple static monopole antennas[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2015, 15(6): 3328–3337. doi: 10.1109/JSEN.2014.2386537.
- [4] SHI Jiangyi, LIU Hongwei, and MA Peijun. A monopulse scheme in radar angle-measurement based on beam-comparison[C]. International Congress on Image and Signal Processing, BioMedical Engineering and Informatics, Datong, 2016: 1263–1267.
- [5] FUAD A and MICHAEL I. Biased estimators for spinning antenna DOA measurements[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, 52(3): 1499–1513. doi: 10.1109/TAES.2016.150637.
- [6] NAUMAN A B, MOHAMMAD B M, MUHAMMAD Z, et al. Efficient target detection and joint estimation of target parameters with a two-element rotating antenna[J]. *IEEE Access*, 2016, 4: 4442–4451. doi: 10.1109/ACCESS.2016.2598965.
- [7] TAN Ke, LI Wenchao, HUANG Yulin, et al. Angular resolution enhancement of real-beam scanning radar base on accelerated iterative shrinkage/thresholding algorithm[C]. IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Beijing, 2016: 929–932.
- [8] SIAKA F, TEHRANI M A, LAURIN J J, et al. Radar system with enhanced angular resolution based on a novel frequency scanning reflector antenna[J]. *IET Radar, Sonar and Navigation*, 2017, 11(2): 350–358. doi: 10.1049/iet-rsn.2016.0320.
- [9] LIE J, BLU T, and SEE C. Single antenna power measurements based direction finding[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(11): 5682–5692. doi: 10.1109/TSP.2010.2065227.
- [10] LIE J, BLU T, and SEE C. Single antenna power measurements based direction finding with incomplete spatial coverage[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Kyoto, 2012: 2641–2644.
- [11] ZHANG Shenglan, WAN Qun, and WANG Hui. DOA estimation in mechanical scanning radar systems using sparse signal reconstruction methods[C]. International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, Wuhan, 2011: 1–4.
- [12] BELLONI F, RICHTER A, and KOIVUNEN V. DOA estimation via manifold separation for arbitrary array structures[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(10): 4800–4810. doi: 10.1109/TSP.2007.896115.

朱晓丹: 男, 1990年生, 博士生, 研究方向为无源定位、电子侦察。  
朱伟强: 男, 1962年生, 研究员, 博士, 博士生导师, 研究方向为空间电子对抗技术、无源定位技术。  
陈卓: 女, 1969年生, 研究员, 硕士生导师, 研究方向为电子侦察技术、无源定位。