

## 基于稀疏和低秩恢复的稳健DOA估计方法

王洪雁\* 于若男

(大连大学信息工程学院 大连 116622)

**摘要:** 该文针对有限次采样导致传统波达方向角(DOA)估计算法存在较大估计误差的问题, 提出一种基于稀疏低秩分解(SLRD)的稳健DOA估计方法。首先, 基于低秩矩阵分解方法, 将接收信号协方差矩阵建模为低秩无噪协方差及稀疏噪声协方差矩阵之和; 而后基于低秩恢复理论, 构造关于信号和噪声协方差矩阵的凸优化问题; 再者构建关于采样协方差矩阵估计误差的凸模型, 并将此凸集显式包含进凸优化问题以改善信号协方差矩阵估计性能进而提高DOA估计精度及稳健性; 最后基于所得最优无噪声协方差矩阵, 利用最小方差无畸变响应(MVDR)方法实现DOA估计。此外, 基于采样协方差矩阵估计误差服从渐进正态分布的统计特性, 该文推导了一种误差参数因子选取准则以较好重构无噪声协方差矩阵。数值仿真表明, 与传统常规波束形成(CBF)、最小方差无畸变响应(MVDR)、传统多重信号分类(MUSIC)及基于稀疏低秩分解的增强拉格朗日乘子(SLD-ALM)算法相比, 有限次采样条件下所提算法具有较高DOA估计精度及较好稳健性能。

**关键词:** 波达方向; 低秩恢复; 稀疏; 凸优化

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)03-0589-08

DOI: 10.11999/JEIT190263

## Sparse and Low Rank Recovery Based Robust DOA Estimation Method

WANG Hongyan YU Ruonan

(College of Information Engineering, Dalian University, Dalian 116622, China)

**Abstract:** Focusing on the problem of rather large estimation error in the traditional Direction Of Arrival (DOA) estimation algorithm induced by finite subsampling, a robust DOA estimation method based on Sparse and Low Rank Decomposition (SLRD) is proposed in this paper. Following the low-rank matrix decomposition method, the received signal covariance matrix is firstly modeled as the sum of the low-rank noise-free covariance matrix and sparse noise covariance one. After that, the convex optimization problem associated with the signal and noise covariance matrix is constructed on the basis of the low rank recovery theory. Subsequently, a convex model of the estimation error of the sampling covariance matrix can be formulated, and this convex set is explicitly included into the convex optimization problem to improve the estimation performance of signal covariance matrix such that the estimation accuracy and robustness of DOA can be enhanced. Finally, with the obtained optimal noiseless covariance matrix, the DOA estimation can be implemented by employing the Minimum Variance Distortionless Response (MVDR) method. In addition, exploiting the statistical characteristics of the sampling covariance matrix estimation error subjecting to the asymptotic normal distribution, an error parameter factor selection criterion is deduced to reconstruct the noise-free covariance matrix preferably. Compared with the traditional Conventional Beamforming (CBF), Minimum Variance Distortionless Response(MVDR), Multiple Signal Classification (MUSIC) and Sparse and Low-rank Decomposition based Augmented Lagrange Multiplier(SLD-ALM) algorithms, numerical simulations show that the proposed algorithm has higher DOA estimation accuracy and better robustness performance under finite sampling snapshot.

**Key words:** Direction Of Arrival (DOA); Low rank recovery; Sparse; Convex optimization

收稿日期: 2019-04-17; 改回日期: 2019-09-27; 网络出版: 2019-10-14

\*通信作者: 王洪雁 gglongs@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61301258, 61271379), 中国博士后科学基金(2016M590218), 重点实验室基金(61424010106)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China(61301258, 61271379), The Postdoctoral Science Foundation of China (2016M590218), The Key Laboratory Foundation (61424010106)

## 1 引言

波达方向角(Direction Of Arrival, DOA)估计是阵列信号处理领域的研究热点之一,在雷达、声呐、导航、无线通信、语音处理和射电天文学等领域具有较为广泛的应用<sup>[1,2]</sup>。波束形成技术也称为空域滤波,通过对各阵元加权空域滤波以增强期望信号,同时抑制干扰及噪声,进而实现对期望信号的DOA估计。噪声及干扰条件下,众多有效的DOA估计方法相继被提出以改善信号角度估计性能,其中以常规波束形成(Conventional Beamforming, CBF)<sup>[3]</sup>算法为代表的波束形成技术在较高信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)条件下可较为精确估计目标DOA。然而,SNR较低场景下,其估计性能将显著下降<sup>[4]</sup>。针对此问题,文献<sup>[5]</sup>提出一种最小方差无畸变响应(Minimum Variance Distortionless Response, MVDR)<sup>[6]</sup>算法,其在CBF基础上确保设定目标方向增益最大,同时尽可能减小其他方向增益以提高波束形成性能。此外,文献<sup>[7]</sup>提出一种基于矩阵补全的DOA估计方法,其利用矩阵补全理论重构无噪声信号协方差,而后基于传统多重信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)<sup>[8]</sup>算法实现DOA估计。需要注意的是,信源数已知条件下,MUSIC算法可获得较为准确的DOA估计,然而其估计性能易受相关信号等影响<sup>[9]</sup>。文献<sup>[10]</sup>提出一种基于干扰加噪声协方差矩阵(Interference-plus-noise Covariance Matrix, INCM)和导向矢量重构的RAB(Robust Adaptive Beamforming)算法,其采用MVDR功率谱积分以重构不含期望信号的INCM,并基于所得INCM估计目标期望信号导向矢量,而后联合二者进行波束形成以获得较好DOA估计性能,然而积分操作导致其运算量较大,从而限制该算法的实际应用。因此,如何提高噪声和干扰场景下传统DOA估计算法性能并降低算法计算量是当前阵列信号处理领域的研究热点之一。

近年来,随着稀疏重构算法<sup>[11-13]</sup>研究的不断深入,基于信号空域稀疏特性的DOA估计方法相继被提出,文献<sup>[14]</sup>提出一种基于INCM的稀疏重构RAB算法,其利用来波信号方向稀疏特性估计干扰导向矢量及其对应功率以重构INCM从而避免具有较高计算复杂度的积分运算,进而提升DOA估计性能并显著降低算法复杂度。然而,该算法需要阵列结构先验信息确知,因而易受阵列误差(比如阵元位置、通道误差)影响,从而限制了该算法的应用。针对此问题,文献<sup>[15]</sup>提出一种改进的INCM重构算法,通过构造关于导向矢量的凸不确定性集

以降低阵列校准误差。文献<sup>[16]</sup>提出一种基于加权 $l_1$ 范数稀疏重构DOA估计算法,其利用信号稀疏性并基于改进Capon算法的倒谱函数来设计权值并构造加权 $l_1$ 范数凸优化问题以实现未知信源数目先验信息下DOA的有效估计。文献<sup>[17]</sup>提出一种采样协方差矩阵确知条件下基于稀疏低秩分解的增强拉格朗日乘子(Sparse and Low-rank Decomposition based Augmented Lagrange Multiplier, SLD-ALM)DOA估计方法,其利用信号协方差矩阵的稀疏及低秩特性构造关于DOA的凸优化问题,而后采用ALM算法求解该优化问题以获得有限次采样快拍下DOA的有效估计。需要注意的是,上述优化问题皆基于有限次采样快拍场景下实现。然而,众所周知,由于采样次数的有限性,采样协方差矩阵不可能确知,即实际应用中采样协方差矩阵估计存在误差。因而,基于估计得到的采样协方差矩阵的DOA估计性能对采样协方差矩阵估计误差比较敏感,进而限制了相应算法的工程应用。针对采样协方差矩阵估计存在估计误差情况,文献<sup>[18]</sup>提出一种非均匀噪声下基于酉矩阵补全的非圆信号DOA估计方法,其基于酉矩阵补全方法重构无噪声信号协方差,并利用改进的共轭酉ESPRIT算法(the Conjugate Unitary ESPRIT, CU-ESPRIT)算法实现DOA估计,但其未考虑噪声惩罚项对参数估计性能的影响。

针对上述问题,基于低秩恢复理论<sup>[7,19]</sup>,本文提出一种采样协方差矩阵存在误差条件下基于噪声协方差矩阵稀疏及信号协方差矩阵低秩特性重构无噪声协方差矩阵的稳健MVDR波达方向角估计方法(Sparse and Low-Rank Decomposition based Robust MVDR, SLRD-RMVDR)。高斯噪声条件下,基于低秩矩阵分解方法,接收信号协方差矩阵可分解为低秩无噪声协方差和稀疏噪声协方差矩阵之和,而后基于低秩恢复理论,构造关于信号和噪声协方差矩阵的凸优化问题;接着构建关于采样协方差矩阵估计误差的凸模型,并基于采样协方差矩阵估计误差服从渐进正态分布的统计特性推导估计误差上界,而后将此凸集显式包含进上述凸问题以改善信号及噪声协方差矩阵估计的稳健性;最后基于所得最优无噪声协方差矩阵,利用MVDR方法实现DOA估计。仿真实验证明了所提SLRD-RMVDR算法的有效性。

## 2 阵列信号模型

假设 $Q$ 个远场窄带信号 $\{s_q(t)\}_{q=0}^{Q-1}$ 入射至阵元数为 $M$ 的均匀线性阵列,则 $t$ 时刻接收信号模型可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t) \\ &= \mathbf{a}(\theta_0)s_0(t) + \sum_{q=1}^{Q-1} \mathbf{a}(\theta_q)s_q(t) + \mathbf{n}(t)\end{aligned}\quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}(t)$ 为接收数据,  $\mathbf{x}_s(t)$ ,  $\mathbf{x}_i(t)$ 分别为 $t$ 时刻包含在接收信号数据中的期望信号分量和干扰信号分量,  $\mathbf{a}(\theta_0) = [1 \ e^{-j2\pi d \sin \theta_0/\lambda} \dots e^{-j(M-1)2\pi d \sin \theta_0/\lambda}]^T$ 和  $\mathbf{a}(\theta_q) = [1 \ e^{-j2\pi d \sin \theta_q/\lambda} \dots e^{-j(M-1)2\pi d \sin \theta_q/\lambda}]^T$ 分别表示期望信号及第 $q$ 个干扰信号的导向矢量,  $d$ 和 $\lambda$ 分别为阵元间距及载波波长, 通常 $d \leq \lambda/2$ ,  $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{Q-1}\}$ 为 $Q$ 个信源DOA,  $s_q(t)$ 为第 $q$ 个信号源的信号幅度,  $\mathbf{n}(t) = [n_1(t) n_2(t) \dots n_M(t)]^T$ 为互不相关高斯白噪声。

为便于推导, 式(1)接收信号模型可进一步改写为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_0) \ \mathbf{a}(\theta_1) \ \dots \ \mathbf{a}(\theta_{Q-1})] \in \mathbb{C}^{M \times Q}$ 为阵列导向矢量矩阵,  $\mathbf{s}(t) = [s_0(t) \ s_1(t) \ \dots \ s_{Q-1}(t)]^T \in \mathbb{C}^{Q \times 1}$ 为波形矢量。

假设信号和噪声互不相关, 且信源相互独立<sup>[20]</sup>, 则接收信号协方差可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbb{E} \{ \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) \} \\ &= \mathbb{E} \{ [\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t)] [\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t)]^H \} \\ &= \mathbb{E} \{ [\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t)] [\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t)]^H \} \\ &\quad + \mathbb{E} \{ \mathbf{n}(t)\mathbf{n}^H(t) \} = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n\end{aligned}\quad (3)$$

其中,  $\mathbf{x}_i$ 表示干扰信号,  $\mathbf{R}_s$ 表示信号和干扰协方差矩阵之和,  $\mathbf{R}_n$ 则为噪声协方差矩阵, 可分别表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_s &= \mathbb{E} \{ [\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t)] [\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t)]^H \} \\ &= \sum_{q=0}^{Q-1} \sigma_q^2 \mathbf{a}(\theta_q) \mathbf{a}^H(\theta_q)\end{aligned}\quad (4)$$

$$\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I} \quad (5)$$

其中,  $\sigma_q^2 = \mathbb{E} [s_q(t)s_q^H(t)]$ 表示第 $q$ 个期望信号和干扰功率,  $\sigma_n^2$ 为噪声功率。

### 3 波束形成技术

设阵列接收权值矢量  $\mathbf{w} = [w_1 w_2 \dots w_M]^T$ , 则阵列 $t$ 时刻输出 $y(t)$ 可表示为

$$y(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \quad (6)$$

基于式(1), 式(6)可进一步表示为

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathbf{w}^H [\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t)] \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{x}_s(t) + \mathbf{w}^H \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{w}^H \mathbf{n}(t)\end{aligned}\quad (7)$$

其中,  $\mathbf{w}^H \mathbf{x}_s(t)$ ,  $\mathbf{w}^H \mathbf{x}_i(t)$ ,  $\mathbf{w}^H \mathbf{n}(t)$ 分别对应输出的期望信号、干扰和噪声分量。

基于MVDR准则, 权值矢量 $\mathbf{w}$ 需保证期望信号无失真通过, 即 $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) = 1$ , 且最小化如下期望功率

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \{ |y_{i+n}|^2 \} &= \mathbb{E} \{ |\mathbf{w}^H [\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t)]|^2 \} \\ &= \mathbf{w}^H \mathbb{E} \{ [\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t)] [\mathbf{x}_i(t) + \mathbf{n}(t)]^H \} \mathbf{w} \\ &= \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w}\end{aligned}\quad (8)$$

基于以上所述, 可得如式(9)的优化问题

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{R}_{i+n}$ 为干扰加噪声协方差矩阵。

基于拉格朗日乘子法<sup>[21]</sup>求解上述优化问题, 可得最优权值矢量为

$$\mathbf{w}_{\text{MVDR}} = \frac{\mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (10)$$

然而, 实际应用中 $\mathbf{R}_{i+n}$ 一般是未知的, 通常利用采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 代替 $\mathbf{R}_{i+n}$ , 即

$$\mathbf{w}_{\text{MVDR}} = \frac{\hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (11)$$

其中,  $L$ 次快拍条件下采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 可表示为

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t) \quad (12)$$

基于式(12), MVDR功率谱可表示为<sup>[9]</sup>

$$P_{\text{MVDR}}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (13)$$

由式(13)可知, 采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 包含信号, 干扰和噪声协方差分量。低SNR条件下, 采样协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 中信号分量 $\mathbf{R}_s$ 较小, 求逆后对 $\hat{\mathbf{R}}^{-1}$ 影响较大, 从而导致DOA估计性能严重下降<sup>[22]</sup>。此外, 实际应用中采样次数通常有限, 随着快拍数减小, 协方差矩阵估计会出现较大误差, 进而严重影响DOA估计精度<sup>[23]</sup>。

需要注意的是, 通常情况下, 阵元数远大于需要估计的信源数( $M \gg Q$ ), 则可得 $\text{rank}(\mathbf{R}_s) = Q < M$ , 即无噪声信号协方差矩阵 $\mathbf{R}_s$ 具有低秩特性。此外, 高斯白噪声条件下, 噪声协方差矩阵 $\mathbf{R}_n = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ , 可知其为满秩矩阵, 即 $\text{rank}(\mathbf{R}_n) = M$ , 且其除对角线元素非零外, 其余元素均为零, 即具有稀疏特性。基于此观察, 本文利用低秩恢复理论, 基于采样协方差矩阵的低秩及稀疏特性构建考虑采样协方差矩阵估计误差的稳健稀疏恢复问题以重构无噪声协方差矩阵, 进而改善有限次快拍场景下DOA估计性能。

#### 4 基于低秩恢复理论重构无噪声协方差矩阵

基于上述讨论, 可将样本协方差矩阵  $\mathbf{R}$  建模为低秩无噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_s$  及稀疏噪声协方差矩阵  $\mathbf{R}_n$  之和, 而后基于低秩恢复理论重构无噪声协方差矩阵。需要注意的是, 通常基于秩函数表述低秩优化问题, 而利用  $l_0$  范数表述稀疏优化问题<sup>[24,25]</sup>。由此可得如下关于低秩矩阵  $\mathbf{R}_s$  及稀疏矩阵  $\mathbf{R}_n$  的优化问题

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n} \text{rank}(\mathbf{R}_s) + \beta \|\mathbf{R}_n\|_0 \\ \text{s.t. } A(\mathbf{R}_s) = A(\mathbf{R}), \mathbf{R}_s \geq 0, \mathbf{R}_n \in \mathbf{D}^+ \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

其中,  $\text{rank}(\cdot)$  为秩函数,  $\|\cdot\|_0$  表示  $l_0$  范数,  $\mathbf{D}^+$  为半正定对角矩阵集合。  $\beta$  为权衡秩函数和稀疏度的正则化因子, 若  $\beta$  值较大, 则 DOA 估计精度较差; 若  $\beta$  值较小, 则易出现伪峰, 由文献<sup>[26]</sup>可知, 其可设置为  $\beta = 1/\sqrt{M}$ 。  $A$  为矩阵变换投影算子, 定义为

$$[A(\mathbf{M})]_{i,j} = \begin{cases} 0, & i = j \\ M_{i,j}, & \text{其他} \end{cases} \quad (15)$$

由于秩函数  $\text{rank}(\cdot)$  和  $l_0$  范数皆为 NP-hard 问题, 上述优化问题难以求解<sup>[27]</sup>。为求解此问题, 通常将秩函数松弛为核范数, 将  $l_0$  范数松弛为  $l_1$  范数<sup>[28,29]</sup>, 则问题式(14)可等价于

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n} \|\mathbf{R}_s\|_* + \beta \|\mathbf{R}_n\|_1 \\ \text{s.t. } A(\mathbf{R}_s) = A(\mathbf{R}), \mathbf{R}_s \geq 0, \mathbf{R}_n \in \mathbf{D}^+ \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中,  $\|\cdot\|_*$  为核范数,  $\|\cdot\|_1$  为  $l_1$  范数。

基于式(15), 上述问题可进一步等价于<sup>[30]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n} \|\mathbf{R}_s\|_* + \beta \|\mathbf{R}_n\|_1 \\ \text{s.t. } \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n = \mathbf{R}, \mathbf{R}_s \geq 0, \mathbf{R}_n \in \mathbf{D}^+ \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

如前所述, 接收信号协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  可由式(12)得到。然而, 由于实际应用中采样次数有限, 因而存在估计误差, 即  $\hat{\mathbf{R}} \neq \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n$ 。针对此问题, 类似于文献<sup>[20]</sup>, 本文构建如下凸误差模型

$$\left\| \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R} \right\|_F \leq \varepsilon \quad (18)$$

其中,  $\|\cdot\|_F$  为矩阵 Frobenius 范数,  $\varepsilon$  为误差参数因子。

基于上述误差凸集, 问题式(17)可重新表示为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n} \|\mathbf{R}_s\|_* + \beta \|\mathbf{R}_n\|_1 \\ \text{s.t. } \left\| \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_n \right\|_F \leq \varepsilon, \mathbf{R}_s \geq 0, \mathbf{R}_n \in \mathbf{D}^+ \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由于  $\mathbf{R}_s$  为半正定矩阵, 可得  $\|\mathbf{R}_s\|_* = \text{tr}(\mathbf{R}_s)$ <sup>[24]</sup>, 其中  $\text{tr}(\cdot)$  为矩阵迹。因此, 式(19)可进一步表示为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n} \text{tr}(\mathbf{R}_s) + \beta \|\mathbf{R}_n\|_1 \\ \text{s.t. } \left\| \hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_n \right\|_F \leq \varepsilon, \mathbf{R}_s \geq 0, \mathbf{R}_n \in \mathbf{D}^+ \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

由式(20)可知, 求解上述优化问题需要误差上界  $\varepsilon$  确知。然而, 此值在实际中难以确知, 通常基于经验确定。基于此, 本文基于协方差估计误差服从渐进正态分布的统计特性, 推导误差上界的确定方法。由文献<sup>[31]</sup>分析可知, 矢量化协方差矩阵误差  $\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$  服从渐进正态 (Asymptotically Normal, AsN) 分布, 即

$$\text{vec}(\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}) \sim \text{AsN}(0, \mathbf{C}) \quad (21)$$

其中,  $\text{vec}(\cdot)$  为矢量化算子,  $\text{AsN}(\mu, \sum)$  表示均值为  $\mu$ , 方差为  $\sum$  的渐进正态分布,  $\mathbf{C} = 1/L(\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{R})$ ,  $\otimes$  为 Kronecker 积。

经过简单矩阵运算, 式(21)可重新表示为

$$\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_n) \sim \text{AsN}(0, \mathbf{I}_{M^2}) \quad (22)$$

由正态分布特性可得<sup>[32]</sup>

$$\left\| \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_n) \right\|_2^2 \sim \text{As}\chi^2(M^2) \quad (23)$$

其中,  $\chi^2(\cdot)$  表示卡方分布,  $\text{As}\chi^2(M^2)$  表示自由度为  $M^2$  的渐进卡方分布,  $M$  为阵元数。

基于此, 问题式(20)可重新表示为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n} \text{tr}(\mathbf{R}_s) + \beta \|\mathbf{R}_n\|_1 \\ \text{s.t. } \left\| \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_n) \right\|_2^2 \leq \eta, \\ \mathbf{R}_s \geq 0, \mathbf{R}_n \in \mathbf{D}^+ \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中,  $\eta$  为误差参数因子, 可由式(25)求得

$$\Pr\{\chi^2(M^2) \leq \eta\} = p, \eta = \chi_p^2(M^2) \quad (25)$$

其中,  $\Pr\{\cdot\}$  表示概率分布,  $p$  为概率值。由式(25)可知,  $\eta$  与  $M$  以及  $p$  在统计意义上存在关系, 则  $M$  和  $p$  的取值皆对  $\eta$  产生影响, 即 DOA 重构精度及性能亦与阵元数  $M$  和  $p$  相关。为此, 式(25)给出一种较为准确的选取方法, 即  $\eta$  可通过自由度为  $M^2$  的  $\chi^2(\cdot)$  分布函数确定。然而, 由于  $\eta$  与  $p$  存在如上复杂非线性关系, 因而较难以确定  $p$  的最优值。由文献<sup>[20]</sup>中仿真实验可知,  $p$  一般设置为 0.999 可获得较好的 DOA 估计精度。

实际应用中, 协方差矩阵  $\hat{\mathbf{R}}$  可由式(12)求得, 相应地  $\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{L}(\hat{\mathbf{R}}^T \otimes \hat{\mathbf{R}})$ 。因此, 式(24)优化问题可等价于

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n} \text{tr}(\mathbf{R}_s) + \beta \|\mathbf{R}_n\|_1 \\ \text{s.t. } \left\| \hat{\mathbf{C}}^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_n) \right\|_2^2 \leq \eta, \\ \mathbf{R}_s \geq 0, \mathbf{R}_n \in \mathbf{D}^+ \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

整理得

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{R}_s, \mathbf{R}_n, t} t \\ \text{s.t.} \quad \left\| \hat{\mathbf{C}}^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_n) \right\|_2^2 \leq \eta, \\ \text{tr}(\mathbf{R}_s) + \beta \|\mathbf{R}_n\|_1 \leq t, \mathbf{R}_s \geq 0, \mathbf{R}_n \in \mathbf{D}^+ \end{array} \right\} \quad (27)$$

其中, 式(27)可通过Matlab凸优化工具包CVX实现高效求解<sup>[33]</sup>。

基于上述优化问题所得无噪声协方差矩阵估计 $\mathbf{R}_s$ , MVDR空间信号功率谱可表示为<sup>[17]</sup>

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)(\mathbf{R}_s + \delta \mathbf{I})^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad (28)$$

其中,  $\delta$ 为对角加载因子, 其可保证功率谱 $P(\theta)$ 求解问题中矩阵 $\mathbf{R}_s + \delta \mathbf{I}$ 可逆。

综上所述, 本文所提SLRD-RMVDR算法可表述为

- (1) 求解 $\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t)$ ;
- (2) 求解式(25)以获得误差参数 $\eta$ 的最优估计值;
- (3) 求解式(27)获得最优无噪声协方差矩阵 $\mathbf{R}_s$ ;
- (4) 求解式(28)得到信号功率谱 $P(\theta)$ , 搜索谱峰获得DOA估计。

## 5 实验仿真及分析

本节通过与传统CBF, MVDR及SLD-ALM算法在DOA估计精度及稳健性方面的性能对比, 验证所提SLRD-RMVDR算法有效性。仿真条件设置如下: 阵元数 $M = 12$ , 快拍数 $L = 400$ , 阵元间距 $d = \lambda/2$ 。对角加载因子 $\delta$ 通过仿真可确定最优值, 本文取 $\delta = 10^{-8}$ 。其中, DOA估计精度的衡量标准可采用均方根误差(Root-Mean-Square Error, RMSE)<sup>[34]</sup>, 定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{KN} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_{i,k} - \theta_i)^2} \quad (29)$$

其中,  $K$ 为蒙特卡洛试验次数,  $N$ 为目标个数,  $\hat{\theta}_{i,k}$ 为第 $k$ 次实验对第 $i$ 个DOA估计,  $\theta_i$ 为第 $i$ 个真实DOA。

**实验1** 考虑2个入射角度分别为 $15^\circ, 20^\circ$ 的非相干信号和1个入射角度为 $26^\circ$ 的干扰信号, SNR=0 dB, 干噪比INR=0 dB, 快拍数 $L = 400$ 。图1为CBF, MVDR, MUSIC, SLD-ALM和本文所提SLRD-RMVDR算法的空域谱估计输出对比图。由图1可知, 有限次采样快拍数条件下, CBF和MVDR算法分辨力较差, 均无法正确分辨位于 $15^\circ$ 和 $20^\circ$ 的邻近信号及 $26^\circ$ 的干扰信号, SLD-ALM虽可正确辨识 $26^\circ$ 的干扰信号, 但未考虑有限次采样条件下接

收数据协方差存在估计误差, 故而不能有效分辨 $15^\circ$ 和 $20^\circ$ 的两个邻近角度。此外, MUSIC虽可有效辨识两个邻近信号, 但由于噪声和有限次快拍所得采样协方差的限制, 导致其估计性能较差, 而所提SLRD-RMVDR算法在信号协方差矩阵估计问题中考虑接收数据协方差估计误差, 故可改善有限次采样条件下协方差矩阵估计误差带来的不利影响, 因而可有效分辨两个相邻信号及干扰角度。

**实验2** 考虑入射角分别为 $10^\circ$ 和 $20^\circ$ 的非相干信号, SNR=5 dB, 快拍数 $L = 400$ 。图2为5种算法空域谱估计对比图。由图2可知, 给定仿真条件下, CBF, MVDR, MUSIC, SLD-ALM和SLRD-RMVDR算法均能有效分辨位于 $10^\circ$ 和 $20^\circ$ 的目标。然而, 需要注意的是, CBF虽可正确估计两个角度, 但相比其它4种算法, 其估计精度较差。此外, 由图2还可看出, 与MVDR, MUSIC和SLD-ALM相比, SLRD-RMVDR具有较窄主瓣及较低旁瓣, 从而表明所提SLRD-RMVDR算法具有较高的DOA估计精度。

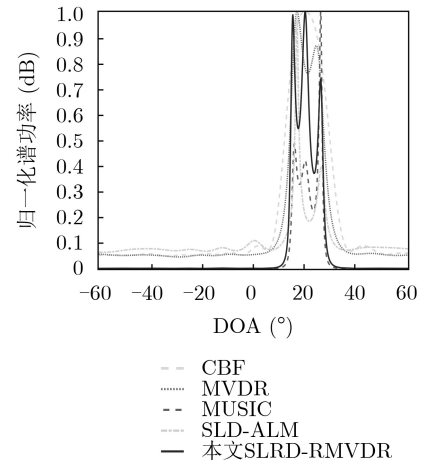


图1 有限次快拍条件下邻近非相干信号空域谱

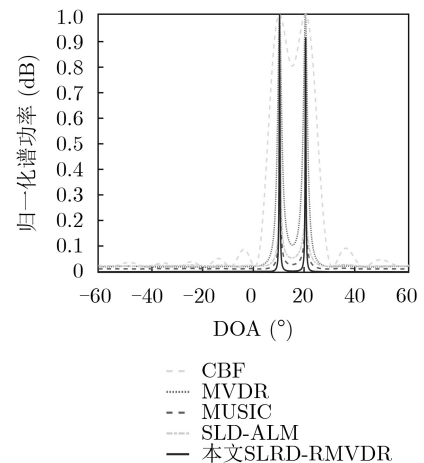


图2 非相干信号空域谱

**实验3** 考虑入射角分别为 $20^\circ$ 和 $26^\circ$ 的非相干信号,进行200次蒙特卡洛独立重复实验。图3(a)为5种算法DOA估计RMSE随SNR变化曲线,快拍数为 $L=400$ , $SNR=[-4:2:10]$ 。由图3(a)知,低SNR条件下,传统CBF,MVDR和MUSIC算法DOA估计RMSE相对较高,SLD-ALM和所提算法RMSE较低,且所提算法估计性能明显优于SLD-ALM。此外,随着SNR增加,5种算法DOA估计RMSE均逐渐降低。图3(b)为5种算法DOA估计RMSE随快拍数变化曲线, $SNR=0$  dB,快拍数 $L=[100:1100]$ 。由图3(b)知,随着快拍数增加,本文所提SLRD-RMVDR及CBF,MVDR,MUSIC和SLD-ALM的RMSE均逐渐降低。另外,需要注意的是,在相同快拍数条件下,所提SLRD-RMVDR算法RMSE均低于其它4种算法,表明有限快拍数条件下所提SLRD-RMVDR算法具有较好DOA估计性能。

**实验4** 考虑入射角分别为 $20^\circ$ 和 $26^\circ$ 的非相干信号,快拍数 $L=400$ , $SNR=[-4:2:10]$ 条件下,再进行20次实验3中200次蒙特卡洛独立重复实验,即总试验次数为4000次,以验证所提SLRD-RMVDR算法的DOA估计性能稳健性,所得SLD-ALM及所提SLRD-RMVDR算法平均输出RMSE随SNR或者

快拍数的变化曲线如图4所示。由图4可看出,在4000次独立重复实验基础上,SLD-ALM算法所得平均输出RMSE随SNR或快拍数变化仍波动较大,而所提SLRD-RMVDR算法具有较平稳的输出结果,且其RMSE基本上低于SLD-ALM算法,从而表明所提算法具有较好的DOA估计稳健性。

**实验5** 为较全面地评估所提SLRD-RMVDR算法性能,在此分析误差参数 $\eta$ 对所提算法重构性能的影响。在此实验中,考虑2个入射角分别为 $20^\circ$ 和 $26^\circ$ 的非相干信号, $SNR=5$  dB,快拍数 $L=400$ 。由表1可知,误差参数为0.1时,所提SLRD-RMVDR算法能够较好重构无噪声信号协方差矩阵,随着误差参数增加,所提算法重构性能逐渐降低,表明误差参数 $\eta$ 取值对算法重构性能有较大影响。

## 6 结束语

针对有限次采样场景下传统DOA估计算法存在估计误差的问题,基于低秩恢复理论,本文提出一种SLRD-RMVDR方法。为改善有限次采样场景下DOA估计精度及稳健性,该算法首先利用采样协方差矩阵稀疏及低秩特性构造关于信号和噪声协方差矩阵的凸问题,而后构造关于采样协方差矩阵估计误差的凸模型,并将此误差模型显式地包含进

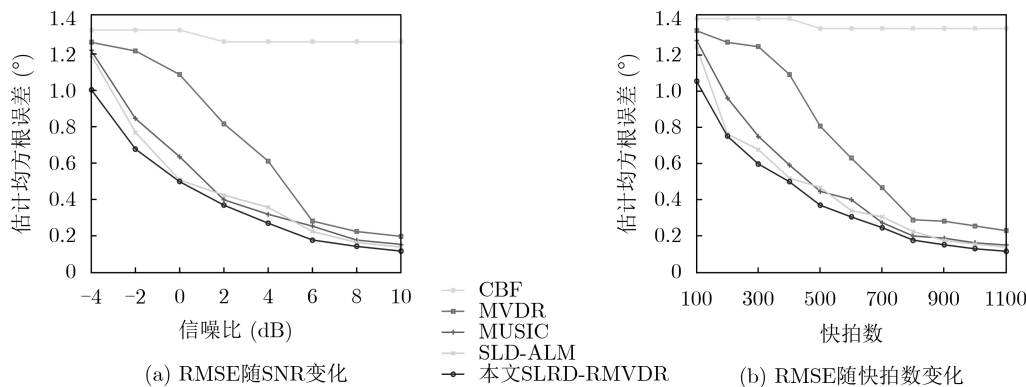


图3 估计均方根误差变化曲线

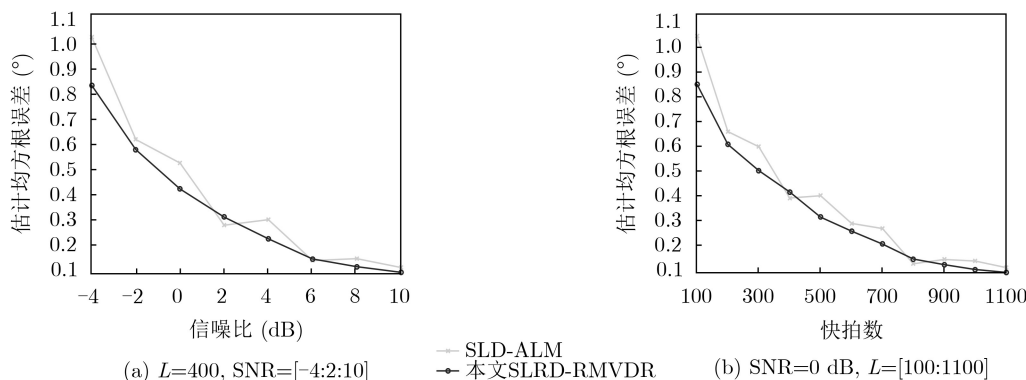


图4 平均输出RMSE随SNR或者快拍数变化

表1 误差参数对算法重构性能影响

误差参数( $\eta$ )	理想 $R_s$ 对角线均值	理想 $R$ 对角线均值	重构 $R_s$ 对角线均值	重构 $R$ 对角线均值
0.1	6.3246	7.4181	6.3110	7.3918
1	6.3246	7.3384	5.9738	7.0775
4	6.3246	7.3271	5.2290	6.2905
8	6.3246	7.3012	4.1855	5.2388
12	6.3246	7.2275	3.0957	4.1583
16	6.3246	7.3268	2.1294	3.1999
19	6.3246	7.3724	1.3133	2.4336

凸优化问题。为较好求解上述稳健优化问题，本文所提方法基于采样协方差矩阵估计误差服从渐进正态分布的统计特性推导出估计误差上界确定方法，而后获得稳健优化问题的高效求解。最后基于所得最优无噪声协方差矩阵，利用MVDR方法实现DOA估计。与传统CBF，MUSIC，MVDR及SLD-ALM算法相比，仿真结果表明，有限次采样快拍条件下所提算法具有较高的DOA估计精度及较好的稳健性能，且估计误差参数对DOA估计性能具有较大影响。

### 参考文献

- [1] GUO Muran, ZHANG Y D, and CHEN Tao. DOA estimation using compressed sparse array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(15): 4133–4146. doi: [10.1109/TSP.2018.2847645](https://doi.org/10.1109/TSP.2018.2847645).
- [2] ZHENG Guimei. DOA estimation in MIMO radar with non-perfectly orthogonal waveforms[J]. *IEEE Communications Letters*, 2017, 21(2): 414–417. doi: [10.1109/LCOMM.2016.2622691](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2016.2622691).
- [3] CAPON J. High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1969, 57(8): 1408–1418. doi: [10.1109/PROC.1969.7278](https://doi.org/10.1109/PROC.1969.7278).
- [4] ZHU Shaohao, YANG Kunde, MA Yuanliang, et al. Robust minimum variance distortionless response beamforming using subarray multistage processing for circular hydrophone arrays[C]. 2016 Techno-Ocean, Kobe, Japan, 2016: 692–696. doi: [10.1109/Techno-Ocean.2016.7890744](https://doi.org/10.1109/Techno-Ocean.2016.7890744).
- [5] 李立欣, 白童童, 张会生, 等. 改进的双约束稳健Capon波束形成算法[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(8): 2014–2019. doi: [10.11999/JEIT151213](https://doi.org/10.11999/JEIT151213).  
LI Lixin, BAI Tongtong, ZHANG Huisheng, et al. Improved double constraint robust capon beamforming algorithm[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(8): 2014–2019. doi: [10.11999/JEIT151213](https://doi.org/10.11999/JEIT151213).
- [6] VAN TREES H L. Optimum Array Processing: Part IV of Detection, Estimation and Modulation Theory[M]. New York: Wiley-Interscience, 2002.
- [7] LIAO Bin, GUO Chongtao, HUANG Lei, et al. Matrix completion based direction-of-arrival estimation in nonuniform noise[C]. 2016 IEEE International Conference on Digital Signal Processing, Beijing, China, 2016: 66–69.
- [8] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: [10.1109/TAP.1986.1143830](https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143830).
- [9] HE Shun, YANG Zhiwei, and LIAO Guisheng. DOA estimation of wideband signals based on iterative spectral reconstruction[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2017, 28(6): 1039–1045. doi: [10.21629/JSEE.2017.06.01](https://doi.org/10.21629/JSEE.2017.06.01).
- [10] GU Yujie and LESHEM A. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix reconstruction and steering vector estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(7): 3881–3885. doi: [10.1109/TSP.2012.2194289](https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2194289).
- [11] 陈沛, 赵拥军, 刘成城. 基于稀疏重构的共形阵列稳健自适应波束形成算法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(2): 301–308. doi: [10.11999/JEIT160436](https://doi.org/10.11999/JEIT160436).  
CHEN Pei, ZHAO Yongjun, and LIU Chengcheng. Robust adaptive beamforming algorithm for conformal arrays based on sparse reconstruction[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(2): 301–308. doi: [10.11999/JEIT160436](https://doi.org/10.11999/JEIT160436).
- [12] HU Rui, FU Yuli, CHEN Zhen, et al. Robust DOA estimation via sparse signal reconstruction with impulsive noise[J]. *IEEE Communications Letters*, 2017, 21(6): 1333–1336. doi: [10.1109/LCOMM.2017.2675407](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2017.2675407).
- [13] HUANG Weibin and LI Hui. An improved DOA estimation algorithm based on sparse reconstruction[C]. The 11th International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory, Guilin, China, 2016: 621–625.
- [14] GU Yujie, GOODMAN N A, HONG Shaohua, et al. Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix sparse reconstruction[J]. *Signal Processing*, 2014, 96: 375–381. doi: [10.1016/j.sigpro.2013.10.009](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2013.10.009).
- [15] HUANG Lei, ZHANG Jing, XU Xu, et al. Robust adaptive beamforming with a novel interference-plus-noise covariance

- matrix reconstruction method[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(7): 1643–1650. doi: [10.1109/tsp.2015.2396002](https://doi.org/10.1109/tsp.2015.2396002).
- [16] 韦娟, 计永祥, 牛俊儒. 一种新的稀疏重构的DOA估计算法[J]. 西安电子科技大学学报: 自然科学版, 2018, 45(5): 13–18. doi: [10.3969/j.issn.1001-2400.2018.05.003](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-2400.2018.05.003).
- WEI Juan, JI Yongxiang, and NIU Junru. Novel algorithm for DOA estimation based on the sparse reconstruction[J]. *Journal of Xidian University: Natural Science*, 2018, 45(5): 13–18. doi: [10.3969/j.issn.1001-2400.2018.05.003](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-2400.2018.05.003).
- [17] CHEN Yong, WANG Fang, WAN Jianwei, et al. Sparse and low-rank decomposition of covariance matrix for efficient DOA estimation[C]. The 9th IEEE International Conference on Communication Software and Networks, Guangzhou, China, 2017: 957–961.
- [18] WANG Xianpeng, ZHU Yanghui, HUANG Mengxing, et al. Unitary matrix completion-based DOA estimation of noncircular signals in nonuniform noise[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 73719–73728. doi: [10.1109/ACCESS.2019.2920707](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2920707).
- [19] CANDÈS E J and PLAN Y. Matrix completion with noise[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98(6): 925–936. doi: [10.1109/jproc.2009.2035722](https://doi.org/10.1109/jproc.2009.2035722).
- [20] HE Zhenqing, SHI Zhiping, and HUANG Lei. Covariance sparsity-aware DOA estimation for nonuniform noise[J]. *Digital Signal Processing*, 2014, 28: 75–81. doi: [10.1016/j.dsp.2014.02.013](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2014.02.013).
- [21] BLANCHARD P and BRÜNING E. Constrained Minimization Problems (Method of Lagrange Multipliers)[M]. BLANCHARD P and BRÜNING E. *Mathematical Methods in Physics*. Cham: Birkhäuser, 2015: 537–546.
- [22] LEE S, YOON Y J, LEE J E, et al. Two-stage DOA estimation method for low SNR signals in automotive radars[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2017, 11(11): 1613–1619. doi: [10.1049/iet-rsn.2017.0221](https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2017.0221).
- [23] TIAN Ye, SUN Xiaoying, and ZHAO Shishun. DOA and power estimation using a sparse representation of second-order statistics vector and  $\ell_0$ -norm approximation[J]. *Signal Processing*, 2014, 105: 98–108. doi: [10.1016/j.sigpro.2014.05.014](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2014.05.014).
- [24] HU Yao, ZHANG Debing, YE Jieping, et al. Fast and accurate matrix completion via truncated nuclear norm regularization[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(9): 2117–2130. doi: [10.1109/tpami.2012.271](https://doi.org/10.1109/tpami.2012.271).
- [25] MALIOUTOV D, ÇETIN M, and WILLSKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022. doi: [10.1109/TSP.2005.850882](https://doi.org/10.1109/TSP.2005.850882).
- [26] WRIGHT J, GANESH A, RAO S, et al. Robust principal component analysis: Exact recovery of corrupted low-rank matrices[J]. arXiv: 0905.0233, 2009.
- [27] HAN Le and LIU Xiaolan. Convex relaxation algorithm for a structured simultaneous low-rank and sparse recovery problem[J]. *Journal of the Operations Research Society of China*, 2015, 3(3): 363–379. doi: [10.1007/s40305-015-0089-8](https://doi.org/10.1007/s40305-015-0089-8).
- [28] WANG Xianpeng, WANG Luyun, LI Xiumei, et al. Nuclear norm minimization framework for DOA estimation in MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2017, 135: 147–152. doi: [10.1016/j.sigpro.2016.12.031](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2016.12.031).
- [29] LUO Xiaoyu, FEI Xiaochao, GAN Lu, et al. Direction-of-arrival estimation using an array covariance vector and a reweighted norm[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2015, E98.A(9): 1964–1967. doi: [10.1587/transfun.E98.A.1964](https://doi.org/10.1587/transfun.E98.A.1964).
- [30] LIAO Bin, GUO Chongtao, and SO H. Direction-of-arrival estimation in nonuniform noise via low-rank matrix decomposition[C]. The 22nd International Conference on Digital Signal Processing, London, UK, 2017: 1–4.
- [31] OTTERSTEN B, STOICA P, and ROY R. Covariance matching estimation techniques for array signal processing applications[J]. *Digital Signal Processing*, 1998, 8(3): 185–210. doi: [10.1006/dspr.1998.0316](https://doi.org/10.1006/dspr.1998.0316).
- [32] HORN R A and JOHNSON C R. *Matrix Analysis*[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1985: 1–162.
- [33] ARLOT S and CELISSE A. A survey of cross-validation procedures for model selection[J]. *Statistics Surveys*, 2010, 4: 40–79. doi: [10.1214/09-SS054](https://doi.org/10.1214/09-SS054).
- [34] DAS A. Theoretical and experimental comparison of off-grid sparse Bayesian direction-of-arrival estimation algorithms[J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 18075–18087. doi: [10.1109/ACCESS.2017.2747153](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2747153).
- 王洪雁: 男, 1979年生, 副教授, 博士, 研究方向为MIMO雷达信号处理、毫米波通信、机器视觉。
- 于若男: 女, 1995年生, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理、毫米波通信。