

## 分块压缩感知的全变差正则化重构算法

谌德荣<sup>①</sup> 吕海波<sup>①</sup> 李秋富<sup>①</sup> 宫久路<sup>\*①</sup> 厉智强<sup>②</sup> 韩肖君<sup>③</sup>

<sup>①</sup>(北京理工大学 北京 100081)

<sup>②</sup>(北京宇航系统工程研究所 北京 100076)

<sup>③</sup>(北京航宇天穹科技有限公司 北京 100043)

**摘要:** 针对分块压缩感知(BCS)重建图像质量较差问题, 该文提出一种最小化 $l_0$ 范数的分块压缩感知全变差(TV)正则化迭代阈值图像重构算法(BCS-TVIT)。BCS-TVIT算法考虑图像的局部平滑、有界变差等性质, 将最小化 $l_0$ 范数与图像的全变差TV正则项结合, 构建目标函数。针对目标函数中 $l_0$ 范数项和分块测量约束项无法直接优化问题, 采用迭代阈值法使重构图像 $l_0$ 范数最小化, 并通过凸集投影保证满足约束条件, 完成了目标函数的优化求解。实验表明, 与基于 $l_0$ 范数最小化的分块压缩感知平滑投影算法(BCS-SPL)相比, BCS-TVIT算法重构图像峰值信噪比提高2 dB, 能消除BCS-SPL的“亮斑”效应, 且在视觉效果上明显优于BCS-SPL算法; 与最小全变差算法相比, BCS-TVIT算法重构图像峰值信噪比提升1 dB, 且能降低重构时间约2个数量级。

**关键词:** 分块压缩感知;  $l_0$ 范数; 全变差; 阈值滤波; 凸集投影

中图分类号: TN919.81

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)09-2217-07

DOI: 10.11999/JEIT180931

## Total Variation Regularized Reconstruction Algorithms for Block Compressive Sensing

CHEN Derong<sup>①</sup> LÜ Haibo<sup>①</sup> LI Qiufu<sup>①</sup> GONG Jiulu<sup>①</sup>  
LI Zhiqiang<sup>②</sup> HAN Xiaojun<sup>③</sup>

<sup>①</sup>(Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

<sup>②</sup>(Beijing Institute of Astronautical Systems Engineering, Beijing 100076, China)

<sup>③</sup>(Beijing HYTQ Technology Ltd. Co., Beijing 100043, China)

**Abstract:** In order to improve the quality of reconstruction image by Block Compressed Sensing (BCS), a Total Variation Iterative Threshold regularization image reconstruction algorithm (BCS-TVIT) is proposed. Combining the properties of local smoothing and bounded variation of the image, BCS-TVIT uses the minimization  $l_0$  norm and total variation to construct the objective function. To solve the problem that  $l_0$  norm term and the block measurement constraint can not be optimized directly, the iterative threshold method is used to minimize the  $l_0$  norm of the reconstructed image, and the convex set projection is employed to guarantee the block measurement constraint condition. Experiments show that BCS-TVIT has better performance than BCS-SPL in PSNR by 2 dB. Meanwhile, BCS-TVIT can eliminate the “bright spot” effect of BCS-SPL, having better visual effect. Comparing with the minimum total variation, the proposed algorithm increases PSNR by 1 dB, and the reconstruction time is reduced by two orders of magnitude.

**Key words:** Block Compressed Sensing (BCS);  $l_0$  norm; Total Variation (TV); Threshold filtering; Convex set projection

### 1 引言

分块压缩感知(Block Compressed Sensing, BCS)解决了整体压缩感知<sup>[1-3]</sup>具有存储空间需求量大、计算复杂度高问题, BCS通过将原始图像分

成小图像块, 然后对这些小图像块分别进行测量, 有效地减少了测量矩阵所占的内存, 同时降低了压缩端计算复杂度<sup>[4,5]</sup>。BCS的分块处理会给解码图像带来“块效应”等人工产物, 针对该问题, 文献<sup>[6]</sup>提出了平滑投影算法(Smoothed Projected Landweber, SPL)与BCS结合的BCS-SPL算法, 有效抑制“块效应”, 提升解码图像的主观视觉效果

收稿日期: 2018-09-30; 改回日期: 2019-02-18; 网络出版: 2019-03-23

\*通信作者: 宫久路 lujiugong@bit.edu.cn

果。BCS-SPL属于最小化 $l_0$ 范数<sup>[7-10]</sup>的迭代阈值收缩方法<sup>[11,12]</sup>，通过在重构过程中加入了维纳滤波消除“块效应”，但破坏了图像的整体结构，导致重构图像出现了“亮斑”现象。

图像的全变差<sup>[13-16]</sup>用于表示图像的整体结构，是非负常数，这一性质被称为图像的有限变差性。最小全变差法利用图像有限变差性来建立优化方程，通过梯度下降法进行优化求解，该方法虽然能够保持解码图像的整体结构，但是全变差最小化直接反映的是图像在梯度域中的稀疏性，无法很好地利用图像在变换域中的稀疏性，因此其解码图像质量并不理想。

本文提出了BCS-TVIT(BCS-Total Variation Iterative Threshold)算法将图像的全变差作为正则项引入最小化 $l_0$ 范数中构建目标函数，增强基于 $l_0$ 范数重构图像对整体信息反映能力，通过充分利用图像的局部平滑、有界变差等性质提高重构图像质量。针对构建目标函数优化问题，采用梯度下降获得最小全变差，并通过迭代阈值法使重构图像 $l_0$ 范数最小化。实验表明，提出的BCS-TVIT算法重构图像能很好地抑制BCS-SPL算法引起的“亮斑”现象，比现有的分块压缩感知算法BCS-SPL获得更高的峰值信噪比，而且在视觉效果上也优于BCS-SPL算法；此外，该算法同最小全变差算法相比，能减小数个数量级的重构时间，并有更好的重构效果。

## 2 BCS-TVIT算法设计

本节介绍将全变差作为正则项引入到最小化 $l_0$ 范数中构建目标函数，然后提出重构算法TVIT，介绍算法具体实现步骤，并确定算法参数。

### 2.1 目标函数构建

利用图像在变换域具有稀疏的特点，最小化 $l_0$ 范数压缩感知重构方法将式(1)作为目标函数。

$$\left. \begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{X} \in R^{r \times l}} \|\Psi^{-1} \mathbf{X}\|_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{y}_j = \Phi \mathbf{x}_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中， $\mathbf{X}$ 表示图像， $\mathbf{x}_j$ 表示分成的小图像块展开的向量， $\mathbf{y}_j$ 表示测量值， $\Phi$ 表示测量矩阵， $\Psi$ 表示稀疏矩阵。该目标函数通过最小化图像在变换域中的

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(s+1)} &= \mathbf{X}^{(s)} - \mu^{(s)} \left\{ \alpha \frac{\partial \|\mathbf{X}^{(s)}\|_{\text{TV}}}{\partial \mathbf{X}^{(s)}} + \frac{\partial \|\Psi^{-1} \mathbf{X}^{(s)}\|_0}{\partial \mathbf{X}^{(s)}} + \frac{1}{2} \frac{\partial \left( \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \|\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j^{(s)}\|^2 \right)}{\partial \mathbf{X}^{(s)}} \right\} \\ &= \mathbf{X}^{(s)} - \mu^{(s)} \left\{ \alpha g_1(\mathbf{X}^{(s)}) + g_2(\mathbf{X}^{(s)}) + g_3(\mathbf{X}^{(s)}) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

式中，参数 $\mu^{(s)}$ 为步长因子。 $g_1(\mathbf{X})$ 表示正则项 $\|\mathbf{X}\|_{\text{TV}}$ 关于矩阵 $\mathbf{X}$ 的梯度，可以直接求解。 $g_1(\mathbf{X})$ 是一个矩

$l_0$ 范数保证重构图像的质量，由于 $l_0$ 范数最优化求解的复杂性和不确定性，通常采用 $l_1$ 范数等代替 $l_0$ 范数进行求解。

利用大部分图像具有有限变差性(其本质是图像在梯度域中的稀疏性)，最小全变差CS方法将式(2)作为目标函数。

$$\left. \begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{X} \in R^{r \times l}} \|\mathbf{X}\|_{\text{TV}} \\ \text{s.t. } \mathbf{y}_j = \Phi \mathbf{x}_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中， $\|\mathbf{X}\|_{\text{TV}}$ 是图像的全变差<sup>[8]</sup>，是反映图像数据的震荡程度和整体结构的变量，可以表示为

$$\|\mathbf{X}\|_{\text{TV}} = \sum_{i,j} \sqrt{|D_1 \mathbf{X}(i,j)|^2 + |D_2 \mathbf{X}(i,j)|^2} \quad (3)$$

式中， $D_1, D_2$ 分别表示 $\mathbf{X}$ 垂直方向和水平方向的差分，即 $D_1 \mathbf{X}(i,j) = \mathbf{X}(i,j) - \mathbf{X}(i-1,j)$ ， $D_2 \mathbf{X}(i,j) = \mathbf{X}(i,j) - \mathbf{X}(i,j-1)$ 。

本文将全变差作为正则项引入最小化 $l_0$ 范数中，构建目标函数

$$\left. \begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{X} \in R^{r \times l}} \|\Psi^{-1} \mathbf{X}\|_0 + \alpha \|\mathbf{X}\|_{\text{TV}}, \\ \text{s.t. } \mathbf{y}_j = \Phi \mathbf{x}_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中， $\alpha \in R^+$ 是正则化参数，用于平衡图像矩阵 $\mathbf{X}$ 的稀疏性和整体结构信息。将全变差作为正则项引入到最小化 $l_0$ 范数中，可以使重构图像在还原图像细节的同时，保证图像的整体结构。

### 2.2 目标函数优化

使用拉格朗日乘子法可将式(4)中的有约束优化问题转为式(5)所示的无约束优化问题

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{X} \in R^{r \times l}} \|\Psi^{-1} \mathbf{X}\|_0 + \alpha \|\mathbf{X}\|_{\text{TV}} \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \|\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j\|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

式中， $\lambda_j$ 是拉格朗日乘子。式(5)中某些项的梯度解析形式不能直接求解，所以难以直接使用拉格朗日乘子法对规划问题式(5)直接求解。

对于式(5)的规划问题，本文采用梯度下降法进行迭代求解，其相应的迭代格式为

阵, 其坐标 $(i, j)$ 的系数表达式为

$$g_1(\mathbf{X})(i, j) = \left( \frac{\partial \|\mathbf{X}^{(S)}\|_{\text{TV}}}{\partial \mathbf{X}^{(S)}} \right) (i, j) = \frac{2\mathbf{X}(i, j) - \mathbf{X}(i-1, j) - \mathbf{X}(i, j-1)}{\sqrt{(\mathbf{X}(i, j) - \mathbf{X}(i-1, j))^2 + (\mathbf{X}(i, j) - \mathbf{X}(i, j-1))^2 + \delta}} + \frac{\mathbf{X}(i, j) - \mathbf{X}(i+1, j)}{\sqrt{(\mathbf{X}(i+1, j) - \mathbf{X}(i, j))^2 + (\mathbf{X}(i+1, j) - \mathbf{X}(i+1, j-1))^2 + \delta}} + \frac{\mathbf{X}(i, j) - \mathbf{X}(i, j+1)}{\sqrt{(\mathbf{X}(i, j+1) - \mathbf{X}(i, j))^2 + (\mathbf{X}(i, j+1) - \mathbf{X}(i-1, j+1))^2 + \delta}} \quad (7)$$

式中,  $\delta > 0$ 用以避免实际计算中出现分母为0的情况。为了尽量消除对计算结果的影响,  $\delta$ 取值应该尽可能小, 同时, 考虑到计算机的计算精度,  $\delta$ 不可能无穷小, 在实际计算中将该值取为 $10^{-7}$ 。

式(6)中,  $g_2(\mathbf{X}) = \partial \|\Psi^{-1} \mathbf{X}^{(S)}\|_0 / \partial \mathbf{X}^{(S)}$ , 由于 $\|\Psi^{-1} \mathbf{X}\|_0$ 关于 $\mathbf{X}$ 不可微,  $g_2(\mathbf{X})$ 难以直接求解。根据规划问题, 在迭代式(6)中, 图像矩阵沿着 $\|\Psi^{-1} \mathbf{X}^{(S)}\|_0$ 的负梯度方向下降, 以达到使得 $\|\Psi^{-1} \mathbf{X}^{(S+1)}\|_0$ 最小化的目的, 最终得到在 $\Psi$ 域中是最稀疏的图像解码矩阵。参考迭代阈值算法<sup>[3,4]</sup>, 使用阈值滤波代替 $g_2(\mathbf{X}^{(S)})$ 的求解。

对于 $g_3(\mathbf{X})$ , 有

$$g_3(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \frac{\partial \left( \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \|\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j\|^2 \right)}{\partial \mathbf{X}} = - \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \Phi^T (\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j) \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial \mathbf{X}} \quad (8)$$

式中,  $\partial \mathbf{x}_j / \partial \mathbf{X}$ 是一种形式化表达, 其表达式很难确定; 但根据迭代格式式(6),  $g_3(\mathbf{X})$ 是与 $\mathbf{X}$ 大小相同的矩阵; 结合式(8)和式(6),  $g_3(\mathbf{X})$ 的作用是使 $\lambda_j \Phi^T (\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j)$ 按照式(9)对矩阵 $\mathbf{X}$ 的每个子块 $\mathbf{X}_j$ 进行更新。

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j + \lambda_j \Phi^T (\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j) \quad (9)$$

事实上, 式(9)是对图像矩阵 $\mathbf{X}$ 的每个子块 $\mathbf{X}_j$ 进行凸集投影, 保证最终解码矩阵的各个子块满足规划问题中的约束条件 $\mathbf{y}_j = \Phi \mathbf{x}_j, j = 0, 1, \dots, N-1$ 。用函数 $\text{Pc}(\mathbf{X}^{(S)}, \lambda_j)$ 表示迭代式中 $g_3(\mathbf{X}^{(S)})$ 的作用; 它首先将矩阵 $\mathbf{X}^{(S)}$ 分块为 $\mathbf{X}_j^{(S)} = \text{Bk}(\mathbf{X}^{(S)})$ , 并将每一个子块向量化为 $\mathbf{x}_j^{(S)} = \text{Vc}(\mathbf{X}_j^{(S)})$ ; 然后按照式(9)对每一个向量 $\mathbf{x}_j^{(S)}$ 进行更新; 最后将这些向量重组为新的矩阵 $\mathbf{X}^{(S)}$ 。

综上, 迭代分3步实现:

$$(1) \text{梯度下降 } \mathbf{X}^{(S,1)} = \mathbf{X}^{(S,0)} - \mu^{(S)} \alpha \frac{\partial \|\mathbf{X}^{(S)}\|_{\text{TV}}}{\partial \mathbf{X}^{(S)}};$$

$$(2) \text{阈值滤波 } \mathbf{X}^{(S,2)} = \text{Th}(\mathbf{X}^{(S,1)}, \Psi);$$

$$(3) \text{凸集投影 } \mathbf{X}^{(S+1,0)} = \text{Pc}(\mathbf{X}^{(S,2)}, \lambda_j)。$$

由于提出的算法利用了图像全变差(TV)最小化, 并通过迭代阈值获得最小化 $l_0$ 范数。故将提出的算法称为TVIT(Total Variation Iterative Threshold)。

TVIT重构算法步骤如下:

(1)设置最大迭代次数为 $S_{\max}$ , 停机准则 $\varepsilon$ , 置图像重建初始值为 $\mathbf{x}^{(0)} = \Phi^T \mathbf{y}$ , 令 $S = 0$ , 置 $\mathbf{X}^{(S,0)} = \mathbf{X}^{(0)}$ ;

(2)梯度下降,  $\mathbf{X}^{(S,1)} = \mathbf{X}^{(S,0)} - \mu^{(S)} \alpha \frac{\partial \|\mathbf{X}^{(S)}\|_{\text{TV}}}{\partial \mathbf{X}^{(S)}};$

(3)阈值滤波,  $\mathbf{X}^{(S,2)} = \text{Th}(\mathbf{X}^{(S,1)}, \Psi);$

(4)凸集投影,  $\mathbf{X}^{(S+1,0)} = \text{Pc}(\mathbf{X}^{(S,2)}, \lambda_j);$

(5) $S = S + 1$ , 若 $S < S_{\max}$ 且 $\|\mathbf{X}^{(S+1,0)} - \mathbf{X}^{(S,0)}\| > \varepsilon$ , 返回第(2)步, 否则输出 $\mathbf{X}^{(S+1,0)}$ 并退出迭代。

## 2.3 参数选择

BCS-TVIT算法涉及到参数包括 $\alpha, \mu^{(S)}, \lambda_j$ 等, 其中 $\alpha$ 用于平衡矩阵 $\mathbf{X}$ 的稀疏性和其整体结构信息,  $\mu^{(S)}$ 是式(6)的步长因子,  $\lambda_j$ 是拉格朗日乘子。 $\alpha$ 与原始图像数据 $\mathbf{X}$ 相关, 属于超参数, 应在迭代算法开始之前取定。根据最优化理论, 步长因子 $\mu^{(S)}$ 应使得规划问题式(5)的目标函数在式(6)所确定的搜索方向上取得最小值。然而, 由于使用阈值滤波和凸集投影去实现式(6)所示的迭代格式, 参数 $\mu^{(S)}$ 与参数 $\alpha$ 在事实上有相同的作用, 因此本文建议步长因子 $\mu^{(S)}$ 取定为常数 $\mu$ , 在迭代算法开始之前确定其值。

对于投影参数 $\lambda_j$ , 当参数 $\lambda_j=1$ 时, 式(9)退化为Landweber投影。在TVIT解码算法中使用Landweber投影, 算法仍然可行。此处, 依据优化理论推导 $\lambda_j$ 的表达式。根据拉格朗日乘子法, 结合式(5), 有

$$\frac{\partial \|\Psi^{-1}\mathbf{X}\|_0}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \|\mathbf{X}\|_{\text{TV}}}{\partial \mathbf{x}_j} + \lambda_j \Phi^T(\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \|\Psi^{-1}\mathbf{X}\|_0}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}_j} + \alpha \frac{\partial \|\mathbf{X}\|_{\text{TV}}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}_j} + \lambda_j \Phi^T(\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j) = 0 \quad (11)$$

$$\left( \frac{\partial \|\Psi^{-1}\mathbf{X}\|_0}{\partial \mathbf{X}} + \alpha \frac{\partial \|\mathbf{X}\|_{\text{TV}}}{\partial \mathbf{X}} \right) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}_j} = -\lambda_j \Phi^T(\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j) \quad (12)$$

导数为0是无约束化问题解的必要条件, 据此, 式(10)成立。式(11)依据链式法则对式(10)进行展开。在式(10)–式(12)中,  $\partial \mathbf{X}/\partial \mathbf{x}_j$ 是形式化表示, 其具体表达式并不清楚。由式(12)右侧, 可知左侧表示一个大小为 $N \times 1$ 的列向量。依据式(6)及其实现方式, 应有

$$-\left( \frac{\partial \|\Psi^{-1}\mathbf{X}\|_0}{\partial \mathbf{X}} + \alpha \frac{\partial \|\mathbf{X}\|_{\text{TV}}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \mathbf{X}^{(s,2)} - \mathbf{X}^{(s,0)}$$

即

$$\lambda_j^{(s)} \Phi^T(\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j^{(s,0)}) = \text{Vc} \left( \text{Bk} \left( \mathbf{X}^{(s,2)} - \mathbf{X}^{(s,0)} \right)_j \right) \quad (13)$$

$$\lambda_j^{(s)} = \frac{\left\| \text{Vc} \left( \text{Bk} \left( \mathbf{X}^{(s,2)} - \mathbf{X}^{(s,0)} \right)_j \right) \right\|}{\left\| \Phi^T(\mathbf{y}_j - \Phi \mathbf{x}_j^{(s,0)}) \right\|} \quad (14)$$

式(13)两边取范数后, 得式(14)。参数 $\lambda_j^{(s)}$ 可在事实上起到步长因子的作用。

### 3 实验结果与分析

为了验证BCS-TVIT算法图像重构质量, 对Barbara, Lax, Building, Aerial等通用测试图像、红外图像序列和南加州大学的SIPI图像库中的Miscellaneous部分44幅图像<sup>[17]</sup>进行了测试, SIPI图像数据库中包含了共44幅图像, 涵盖了人物肖像图、航拍图以及虚构图等。通过对不同类型图像进行测试, 保证了实验数据的丰富性, 比较不同类型图像的实验结果更好地反映了提出算法的通用性。

利用峰值信噪比(PSNR)对BCS-TVIT算法性能进行定量分析, 并与BCS-SPL<sup>[6]</sup>和BCS-TV<sup>[15]</sup>进行对比分析。实验条件为: Matlab R2016b, Windows 7 64位操作系统, Intel(R) Core(TM) i5-2400 CPU@3.10 GHz、内存4 GB。测试时, 图像均被分成 $32 \times 32$ 的子块, BCS-TVIT算法在阈值滤波中采用的稀疏变换是双树复小波变换<sup>[18-20]</sup>, 这种变换更具有平移不变性以及方向选择性, 更适合阈值滤波使用, 相应地, 滤波方法选择双阈值滤波<sup>[21-23]</sup>; BCS-SPL参数设置参考文献<sup>[6]</sup>提到的最好的参数条件; BCS-TV参数设置参考文献<sup>[15]</sup>中提到的最好的参数条件。

图1为BCS-TVIT, BCS-SPL和BCS-TV算法在采样率为0.1时对标准测试图像Building和Lax的重构结果对比, 其中图1(a)和图1(d)是BCS-SPL算法重构结果, 图1(b)和图1(e)是BCS-TV算法重构结果, 图1(c)和图1(f)是BCS-TVIT算法重构结果。由图1可见, BCS-TVIT算法有效地抑制了BCS-SPL算法的“亮斑”现象, 并且整幅图像视觉效果得到了显著提升。

表1是3种算法在不同采样率下对4幅标准图像测试结果的对比。由表1可见, 在不同采样率下BCS-TVIT重构图像PSNR值均高于BCS-SPL和BCS-TV, 且采样率越高, BCS-TVIT相对于BCS-SPL和BCS-TV的PSNR提高幅度越大。如对于Aerial图像, 在采样率0.1时, BCS-TVIT比BCS-SPL的PSNR高0.65 dB, 而在采样率0.5时, 高3.7 dB。对Barbara图像, BCS-SPL的重构效果要优于BCS-TV。而其它3张图像, 当采样率增加, BCS-TV的重构效果要明显好于BCS-SPL, 而BCS-TVIT算法在所有测试中都取得了最好的实验结果。

表2是相同条件下, BCS-TVIT, BCS-SPL和BCS-TV算法重构时间对比结果。由表2可见, BCS-TV算法是3个算法中耗时最长的, 且耗时都在1000 s数量级上, 随着采样率的增加, 重构时间也随之增加; BCS-SPL和BCS-TVIT的重构时间都明显少于BCS-TV算法, 它们的重构时间为10 s数量级, 且随着采样率的增加, 重构时间都随之减少; 提出算法BCS-TVIT的重构时间都要略长于BCS-SPL, 这是因为提出算法BCS-TVIT中迭代过程引入了梯度下降, 与原有的BCS-SPL算法相比, 计算更加复杂, 重构所需时间更长。

图2是实验中测试的红外图像序列, 图2(a)是图像序列中的第100帧, 图2(b)是图像序列中的第400帧。图像尺寸为 $512 \times 512$ , 8 bit。表3是图2中的2帧图像在采样率为0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5的情况

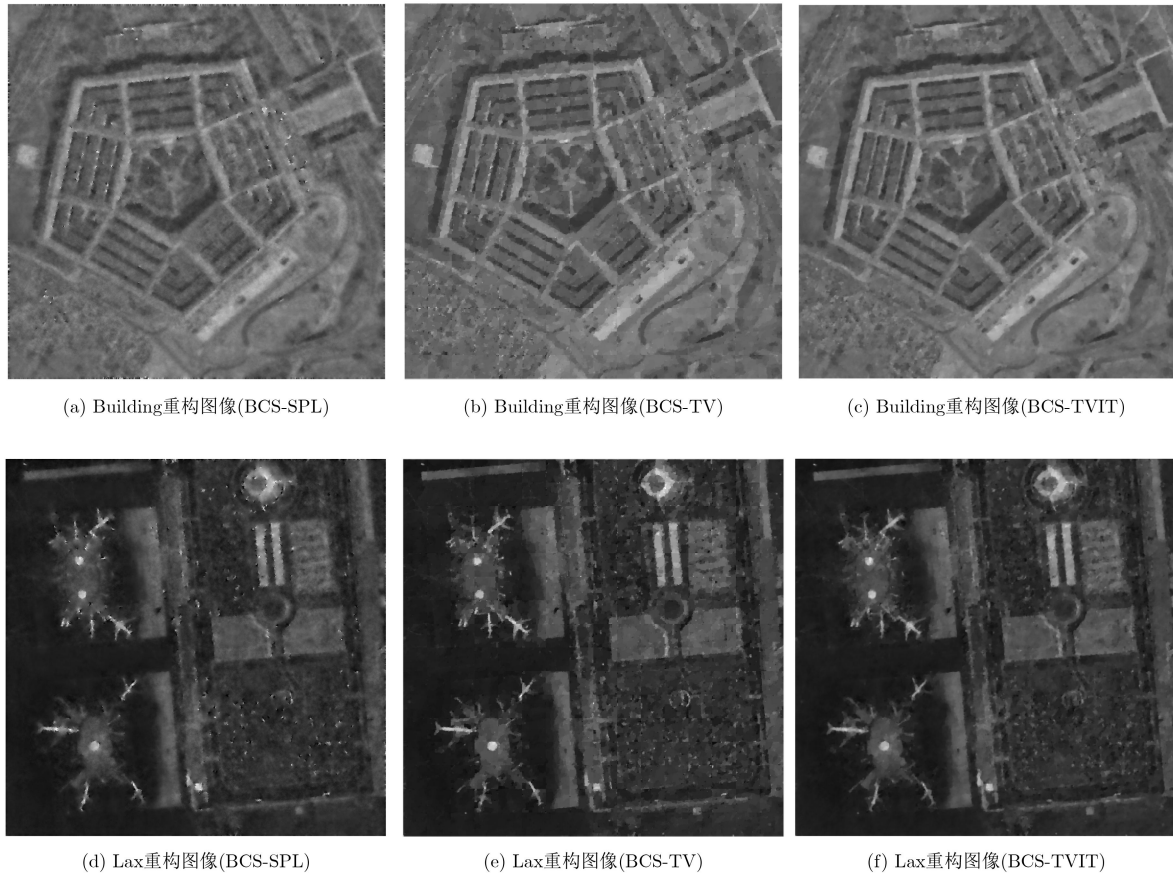


图 1 0.1采样率下BCS-SPL, BCS-TV, BCS-TVIT重构图像

表 1 各算法的重构PSNR (dB)

算法	采样率					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
Barbara	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	22.50	24.02	25.64	27.28	28.91
	BCS-TV <sup>[15]</sup>	22.38	23.52	24.48	25.56	26.73
	BCS-TVIT	22.67	24.41	26.46	28.73	31.58
Lax	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	23.73	25.30	26.57	27.72	29.01
	BCS-TV <sup>[15]</sup>	23.75	26.05	28.06	29.93	31.77
	BCS-TVIT	24.16	26.88	28.69	30.50	32.28
Building	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	25.54	27.10	28.27	29.39	30.59
	BCS-TV <sup>[15]</sup>	25.45	27.99	29.88	31.69	33.50
	BCS-TVIT	26.28	28.99	30.63	32.19	33.74
Aerial	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	23.37	25.32	26.80	28.31	29.56
	BCS-TV <sup>[15]</sup>	23.22	25.63	27.67	29.42	31.41
	BCS-TVIT	24.02	27.28	29.57	31.56	33.26

表 2 各算法的重构时间(s)

算法	采样率					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	
Barbara	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	52	16	12	12	9
	BCS-TV <sup>[15]</sup>	1210	1514	1759	2136	2690
	BCS-TVIT	70	57	32	21	21
Lax	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	35	28	27	25	24
	BCS-TV <sup>[15]</sup>	1179	1499	1737	2097	2638
	BCS-TVIT	39	30	28	29	25
Building	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	51	35	25	24	21
	BCS-TV <sup>[15]</sup>	1222	1539	1781	2153	2684
	BCS-TVIT	53	38	26	26	22
Aerial	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	50	30	26	24	18
	BCS-TV <sup>[15]</sup>	1170	1492	1750	2125	2666
	BCS-TVIT	51	30	28	23	19

下的重构图像PSNR。从结果中可以看出提出算法在整体上比BCS-SPL算法有更高的PSNR值。

为了验证提出算法通用性，本文还对南加州大学的SIPI图像库中的Miscellaneous部分进行了测试。表4是采样率为0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5情况下重构图像的PSNR的平均值、最大值以及最小值的统计结果。由表4可见，提出算法的PSNR平均值、

最大值以及最小值都比BCS-SPL高。在采样率0.5时，本文算法PSNR平均值甚至对比算法提高了2.68 dB。

#### 4 结束语

本文提出了一种分块压缩感知的正则化重构方法BCS-TVIT。BCS-TVIT算法考虑自然图像的离



(a) 第100帧 (512×640)



(b) 第400帧 (512×640)

图2 红外图像序列

表3 重构图像PSNR (dB)

	算法	采样率				
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
第100帧	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	32.38	40.35	43.05	44.73	46.25
	BCS-TVIT	37.70	40.54	42.45	45.06	45.63
第400帧	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	33.47	35.20	37.23	38.93	40.51
	BCS-TVIT	33.78	36.54	38.49	40.16	41.75

表4 重构图像PSNR (dB)的统计结果

	算法	采样率				
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
平均值	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	25.71	28.58	30.56	32.23	33.83
	BCS-TVIT	25.98	29.82	32.07	34.20	36.51
最大值	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	31.81	35.64	37.39	39.22	41.00
	BCS-TVIT	32.55	36.99	39.47	41.41	44.41
最小值	BCS-SPL <sup>[6]</sup>	15.47	19.22	22.27	23.18	24.23
	BCS-TVIT	18.60	22.13	23.49	24.71	26.01

散梯度具有稀疏的性质, 将图像的全变差做为正则项引入最小化 $l_0$ 范数中, 构建目标函数, 并提出具体重构方法。在与基于 $l_0$ 范数的分块压缩感知算法BCS-SPL和最小全变差算法BCS-TV做比较后发现, 本文算法能够有效消除BCS-SPL重构图像的“亮斑”效应, 让重构图像质量得到普遍提高。在相同采样率下, BCS-TVIT算法由于更好地利用图像的有界变差等性质, 使得重构图像与现有算法如BCS-SPL以及BCS-TV相比, 获得了更高的峰值信噪比, 视觉效果也得到了改善, 同时该算法所需的重构时间较少。本文主要考虑将TV正则项引入 $l_0$ 范数中, 更加充分地利用图像固有的性质, 使重构效果得到了显著提升。在此基础上, 如何构建更能反映图像性质的目标函数, 是未来研究的主要方向。

### 参考文献

[1] CANDÈS E J, ELДАР Y C, NEEDELL D, *et al.*

Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2010, 31(1): 59–73. doi: [10.1016/j.acha.2010.10.002](https://doi.org/10.1016/j.acha.2010.10.002).

- [2] KABANAVA M and RAUHUT H. Cosparsity in Compressed Sensing[M]. Cham: Birkhäuser, 2015: 315–339.
- [3] ZHOU Chengwei, GU Yujie, ZHANG Y D, *et al.* Compressive sensing-based coprime array direction-of-arrival estimation[J]. *IET Communications*, 2017, 11(11): 1719–1724. doi: [10.1049/iet-com.2016.1048](https://doi.org/10.1049/iet-com.2016.1048).
- [4] GAN Lu. Block compressed sensing of natural images[C]. 2007 5th International Conference on Digital Signal Processing, Cardiff, UK, 2007: 403–406. doi: [10.1119/ICDSP.2007.4288604](https://doi.org/10.1119/ICDSP.2007.4288604).
- [5] VAN CHIEN T, DINH K Q, JEON B, *et al.* Block compressive sensing of image and video with nonlocal Lagrangian multiplier and patch-based sparse representation[J]. *Signal Processing: Image Communication*, 2017, 54: 93–106. doi: [10.1016/j.image.2017.02.012](https://doi.org/10.1016/j.image.2017.02.012).
- [6] MUN S and FOWLER J E. Block compressed sensing of images using directional transforms[C]. The 16th IEEE International Conference on Image Processing, Cairo, Egypt, 2009: 3021–3024. doi: [10.1109/ICIP.5414429](https://doi.org/10.1109/ICIP.5414429).
- [7] 唐朝伟, 王雪锋, 杜永光. 一种稀疏度自适应分段正交匹配追踪算法[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2016, 47(3): 784–792. doi: [10.11817/j.issn.1672-7207.2016.03.011](https://doi.org/10.11817/j.issn.1672-7207.2016.03.011).  
TANG Chaowei, WANG Xuefeng, and DU Yongguang. A sparsity adaptive stagewise orthogonal matching pursuit algorithm[J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2016, 47(3): 784–792. doi: [10.11817/j.issn.1672-7207.2016.03.011](https://doi.org/10.11817/j.issn.1672-7207.2016.03.011).
- [8] CANDÈS E J and TAO T. Near-optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(12): 5406–5425. doi: [10.1109/TIT.2006.885507](https://doi.org/10.1109/TIT.2006.885507).
- [9] EFTEKHARI A and WAKIN M B. New analysis of manifold embeddings and signal recovery from compressive measurements[J]. *Applied and Computational Harmonic*

- Analysis*, 2015, 39(1): 67–109. doi: [10.1016/j.acha.2014.08.005](https://doi.org/10.1016/j.acha.2014.08.005).
- [10] 陈勇, 吴春婷, 刘焕林. 基于改进压缩感知的缺损光纤Bragg光栅传感信号修复方法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(2): 386–393. doi: [10.11999/JEIT170424](https://doi.org/10.11999/JEIT170424).  
CHEN Yong, WU Chunting, and LIU Huanlin. A repaired algorithm based on improved compressed sensing to repair damaged fiber bragg grating sensing signal[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(2): 386–393. doi: [10.11999/JEIT170424](https://doi.org/10.11999/JEIT170424).
- [11] BLUMENSATH T and DAVIES M E. Iterative hard thresholding for compressed sensing[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 27(3): 265–274. doi: [10.1016/j.acha.2009.04.002](https://doi.org/10.1016/j.acha.2009.04.002).
- [12] 宋和平, 王国利. 稀疏信号重构的阈值化迭代检测估计[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(10): 2431–2437. doi: [10.3724/SP.J.1146.2013.01696](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2013.01696).  
SONG Hepin and WANG Guoli. Sparse signal recovery via iterative detection estimation with thresholding[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(10): 2431–2437. doi: [10.3724/SP.J.1146.2013.01696](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2013.01696).
- [13] XIAO Yunhai, YANG Junfeng, and YUAN Xiaoming. Alternating algorithms for total variation image reconstruction from random projections[J]. *Inverse Problems & Imaging*, 2012, 6(3): 547–563. doi: [10.3934/ipi.2012.6.547](https://doi.org/10.3934/ipi.2012.6.547).
- [14] CANDÈS E J, ROMBERG J, and TAO T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(2): 489–509. doi: [10.1109/TIT.2005.862083](https://doi.org/10.1109/TIT.2005.862083).
- [15] CANDÈS E J, ROMBERG J K, and TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207–1223. doi: [10.1002/cpa.20124](https://doi.org/10.1002/cpa.20124).
- [16] CHEN Gao, LI Gang, and ZHANG Jiashu. Tensor compressed video sensing reconstruction by combination of fractional-order total variation and sparsifying transform[J]. *Signal Processing: Image Communication*, 2017, 55: 146–156. doi: [10.1016/j.image.2017.03.021](https://doi.org/10.1016/j.image.2017.03.021).
- [17] USC. The USC-SIPI image database[EB/OL]. <http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=misc&image12>, 2018.
- [18] CHEN Duo, WAN Suiren, XIANG Jing, *et al.* A high-performance seizure detection algorithm based on Discrete Wavelet Transform (DWT) and EEG[J]. *PLoS One*, 2017, 12(3): e0173138. doi: [10.1371/journal.pone.0173138](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0173138).
- [19] YANG Jingyu, XU Wenli, DAI Qionghai, *et al.* Image compression using 2D Dual-tree Discrete Wavelet Transform (DDWT)[C]. 2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems, New Orleans, USA, 2007: 297–300. doi: [10.1109/ISCAS.2007.378394](https://doi.org/10.1109/ISCAS.2007.378394).
- [20] SAI N S T and PATIL R C. Image retrieval using 2D dual-tree discrete wavelet transform[J]. *International Journal of Computer Applications*, 2011, 14(6): 1–8. doi: [10.5120/1891-2513](https://doi.org/10.5120/1891-2513).
- [21] SENDUR L and SELESNICK I W. Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(11): 2744–2756. doi: [10.1109/TSP.2002.804091](https://doi.org/10.1109/TSP.2002.804091).
- [22] GOMATHI R, and SELVAKUMARAN S. A new bivariate shrinkage denoising of remotely sensed images with Discrete Shearlet Transform (DST)[C]. 2018 Second International Conference on Intelligent Computing and Control Systems (ICICCS), Madurai, India, 2018: 173–175. doi: [10.1109/ICCONS.2018.8663233](https://doi.org/10.1109/ICCONS.2018.8663233).
- [23] ZHANG Fuqiang and LIU Zengli. Image denoising based on the bivariate model of dual tree complex wavelet transform[C]. The 11th International Conference on Computational Intelligence and Security, Shenzhen, China, 2015: 171–174. doi: [10.1109/CIS.2015.49](https://doi.org/10.1109/CIS.2015.49).
- 谌德荣: 女, 1966年生, 博士, 教授, 研究方向为信息处理、自动目标识别等。  
吕海波: 男, 1993年生, 硕士生, 研究方向为图像压缩处理等。  
宫久路: 男, 1983年生, 博士, 讲师, 研究方向为数字信号处理、模式识别等。