

基于稀疏贝叶斯学习的空间紧邻信号DOA估计算法

王琦森^{①②} 余华^{③②①} 李杰^{*③} 董超^{②④} 季飞^{③①} 陈焱琨^{②④}

^①(华南理工大学土木与交通学院 广州 510640)

^②(自然资源部海洋环境探测技术与应用重点实验室 广州 510300)

^③(华南理工大学电子与信息学院 广州 510640)

^④(国家海洋局南海调查技术中心 广州 510300)

摘要: 离格(off-grid)波达方向(DOA)估计解决的是实际DOA和假设网格点的失配问题。对于空间紧邻信号的DOA,稀疏的网格点会导致精度和分辨率的下降,密集的网格点虽然可以提高估计精度却显著增加计算负担。针对此问题,该文提出基于稀疏贝叶斯学习(SBL)的空间紧邻信号DOA估计算法,主要包括3个步骤。首先,通过最大化阵列输出的边缘似然函数,推导了信号在拉普拉斯先验下的新不动点迭代方法,进行超参数的预估计,相比其他经典SBL算法提高了收敛速度;其次,利用新网格插值方法优化网格点集,并二次估计噪声方差和信号功率以分辨空间紧邻信号的DOA;最后,推导了似然函数关于角度的最大化公式以改进离格DOA搜索。仿真表明该算法比其他经典SBL类算法对空间紧邻信号的DOA具有更高的精度和分辨率,同时有计算效率的提升。

关键词: 波达方向估计; 离格; 稀疏贝叶斯学习; 空间紧邻

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)03-0708-09

DOI: [10.11999/JEIT200656](https://doi.org/10.11999/JEIT200656)

Sparse Bayesian Learning Based Algorithm for DOA Estimation of Closely Spaced Signals

WANG Qisen^{①②} YU Hua^{③②①} LI Jie^③ DONG Chao^{②④} JI Fei^{③①}
CHEN Yankun^{②④}

^①(School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

^②(Key Laboratory of Marine Environmental Survey Technology and Application, Ministry of Natural Resources, Guangzhou 510300, China)

^③(School of Electronic and Information Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

^④(South China Sea Marine Survey and Technology Center, Ministry of Natural Resources, Guangzhou 510300, China)

Abstract: Off-grid Direction Of Arrival (DOA) estimation aims to handle the mismatch between the actual DOA and the presumed grid points. For DOAs of closely spaced signals, sparse grid points leads to degradation of accuracy and resolution, although dense grid points can improve the estimation accuracy, it significantly increases the computational burden. To solve this problem, this paper proposes a Sparse Bayesian Learning (SBL) based algorithm for DOA estimation of closely spaced signals, which consists of three steps. Firstly, a novel fixed point iterative method for signal of Laplace priori is derived to pre-estimate the hyper-parameters

收稿日期: 2020-08-03; 改回日期: 2021-01-25; 网络出版: 2021-02-04

*通信作者: 李杰 eejli@scut.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(U1809211, 61771202, 61971198), 广东省海洋经济发展专项资金重点项目(粤自然资合[2020]009号), 广东省基础与应用基础研究基金(2019A151501104), 自然资源部海洋环境探测技术与应用重点实验室开放基金课题(MESTA-2020-A005)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (U1809211, 61771202, 61971198), The Key Program of Marine Economy Development Special Foundation of Guangdong Province (GDNRC [2020]009), Guangdong Basic and Applied Basic Research Foundation (2019A151501104), Open Funding Project of Key Laboratory of Marine Environmental Survey Technology and Application, Ministry of Natural Resources (MESTA-2020-A005)

by maximizing the array's marginal likelihood function, which results in faster convergence speed compared to other classical SBL algorithms. Secondly, a new grid interpolation method is implemented to optimize a set of grid points, and signal power and noise variance are estimated again to resolve closely spaced DOAs. Finally, an expression of maximum likelihood function with respect to angle is derived to improve the search of the off-grid DOA. Simulation results show that the proposed algorithm has higher accuracy and resolution for closely spaced DOAs with higher computational efficiency compared with other classical algorithms based on SBL.

Key words: Direction Of Arrival estimation; Off-grid; Sparse Bayesian Learning (SBL); Closely spaced

1 引言

波达方向(Direction-Of-Arrival, DOA)估计,广泛应用于声呐、雷达和无线通信等许多领域^[1]。经过几十年的发展,出现了有超分辨能力的子空间类方法,如MUSIC^[2]等。然而在低信噪比等环境中,这类算法的性能会明显降低。

近年来的稀疏重构类算法克服了子空间类方法的缺点。 ℓ_p 范数法是经典的稀疏类方法之一,其代表是 ℓ_1 范数。文献^[3]首次把DOA估计转化为 ℓ_1 范数问题,提出了奇异值分解的L1范数重构算法(L1 reconstruction-Singular Value Decomposition, L1-SVD),并利用网格细分法来提升精度。然而 ℓ_p 范数类算法对信号的重构并不准确^[4],其正则化因子难以确定,网格细分策略会使得基之间的相关性增强而导致性能的降低^[3]。

稀疏贝叶斯学习(Sparse Bayesian Learning, SBL)算法最初作为机器学习在文献^[5]中提出,随后被引入稀疏信号处理领域^[4,6],表明了SBL相对于 ℓ_p 范数法具有更好的重构性能。文献^[7]把SBL用于DOA估计,提出了相关向量机方法(Relevance Vector Machine, RVM),该方法利用期望最大化(Expectation Maximization, EM)对信号后验概率密度函数进行最大化来完成信号空间功率的估计,并提出了一种后处理高精度算法来实现离格(off-grid)DOA估计,相比网格细分方法提高了计算效率和精度。文献^[8]用泰勒展开把离格DOA误差引入阵列流形矩阵,提出离格稀疏贝叶斯推断(Off-Grid Sparse Bayesian Inference, OGSBI),能在稀疏的网格下实现较准确的估计;文献^[9,10]使用了一种线性插值方法进行离格DOA建模,其效果和文献^[8]类似;文献^[11]基于文献^[8]的泰勒展开模型提出了网格自适应方法,使用分布式传感器对室内近场信号进行2维定位;文献^[12,13]提出求根稀疏贝叶斯(root-Sparse Bayesian Learning, root-SBL),即基于SBL理论使用多项式求根法在每次迭代里解得离格误差,相比文献^[8]提高了计算效率和对网格间距的稳健性。文献^[14]把SBL应用于海洋匹配场处理进行声学探测。近年来,SBL还广泛

应用于MIMO信道估计^[15]、互质阵列^[16]和宽带测向^[17]。其中文献^[16]使用变分贝叶斯(Variational Bayesian Inference, VBI),针对协方差向量使用泰勒展开模型进行离格DOA估计。

但是,对于空间紧邻信号的DOA,密集的网格点提高了算法的估计精度却增加计算负担,而稀疏的网格点减小了计算负担的同时以牺牲估计性能为代价。针对此问题,本文提出一种基于稀疏贝叶斯学习的空间紧邻DOA估计算法,包括3个步骤:(1)超参数的预估计;(2)网格插值优化和超参数的二次估计;(3)改进的离格DOA估计。第(1)步通过最大化阵列输出的边缘似然函数,推导了信号在拉普拉斯先验分布下的不动点迭代公式,相比其他SBL算法有着更快的收敛速度,并通过计算信号协方差矩阵的对角线元素而比其他SBL算法具有更低的计算复杂度;第(2)步使用最大似然方法2次估计噪声方差,并根据谱峰特征对网格点进行插值优化,在新网格点集的基础上2次估计信号功率;第(3)步推导了信号在拉普拉斯先验分布下的边缘似然函数关于角度的最大化公式以进行离格DOA搜索。仿真表明本文所提算法比其他经典SBL算法具有以下优势:(1)对空间紧邻信号的DOA具有更高的估计精度和分辨率;(2)低信噪比下的估计性能和计算效率更好;(3)可以使用大迭代门限取得更高的估计精度。

2 信号模型及稀疏表示

假设有 K 个远场窄带信号同时入射到具有 M 个阵元的均匀线阵,定义方位角 $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]$ 为信号入射直线与阵列法线的夹角,则阵列在 t 时刻的输出数据为

$$\mathbf{y}_t = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) x_{k,t} + \mathbf{v}_t = \mathbf{A}_K(\theta) \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t, t = 1, 2, \dots, L \quad (1)$$

其中, $\mathbf{y}_t = [y_{1,t}, y_{2,t}, \dots, y_{M,t}]^T$ 是阵列接收数据; $\mathbf{x}_t = [x_{1,t}, x_{2,t}, \dots, x_{K,t}]^T$ 是 K 个信号在 t 时刻的波形; $\mathbf{A}_K(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ 是 K 个信号的阵列流形矩阵; $\mathbf{a}(\theta_k) = [e^{j2\pi f \tau_{k,1}}, e^{j2\pi f \tau_{k,2}}, \dots, e^{j2\pi f \tau_{k,M}}]^T$ 是第 k 个信号对应的阵列流形向量,其中

f 是信号频率, $\tau_{k,m} = D_m \sin \theta_k / c$ 是第 k 个信号在第 m 个阵元到参考阵元间的时延, c 是信号传播速度, D_m 是第 m 个阵元到参考阵元的距离; \mathbf{v}_t 是高斯白噪声向量, 其方差为 σ^2 。考虑把整个空域角度范围均匀划分成 N 个网格点, 每个网格点代表一个可能的入射方向, 即 $\boldsymbol{\Theta} = [\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N]$, 并有 $K \ll N$, 因此问题转化为过完备的稀疏表示。则模型式(1)可以写成单快拍的稀疏表示^[3], 即

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta})\bar{\mathbf{x}}_t + \mathbf{v}_t \quad (2)$$

其中, 过完备阵列流形矩阵 $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}) = [\mathbf{a}(\vartheta_1), \mathbf{a}(\vartheta_2), \dots, \mathbf{a}(\vartheta_N)] \in \mathcal{C}^{M \times N}$ 可以简化为 \mathbf{A} , $\bar{\mathbf{x}}_t$ 是稀疏向量, $\bar{\mathbf{x}}_t$ 里大多数元素为0、只有少数元素不为0, $\bar{\mathbf{x}}_t$ 中非0元素的位置代表信号的估计DOA, 如果有 L 个快拍, 式(2)的单快拍模型就变为多快拍模型, 即可以延伸为^[3]

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{V} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_L] \in \mathcal{C}^{M \times L}$, $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_L] \in \mathcal{C}^{N \times L}$, $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_L] \in \mathcal{C}^{M \times L}$ 。之前的研究已经证明多快拍比单快拍具有更好的DOA估计性能^[4], 因此本文以多快拍为研究对象, 且针对较少的快拍数情况。

3 稀疏贝叶斯概率分布模型

稀疏贝叶斯学习首先要建立促进稀疏的先验分布^[4,5]。假设信号 $\bar{\mathbf{X}}$ 的各个元素相互独立, 各列服从均值为0、方差为 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N]^T$ 的复高斯分布, 则 $\bar{\mathbf{X}}$ 幅度的概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\bar{\mathbf{X}} | \boldsymbol{\gamma}) &\sim \prod_{t=1}^L \prod_{i=1}^N \mathcal{CN}(\bar{x}_{i,t} | 0, \gamma_i) = \prod_{t=1}^L \mathcal{CN}(\bar{\mathbf{x}}_t | \mathbf{0}, \boldsymbol{\Gamma}) \\ &= (\pi^N |\boldsymbol{\Gamma}|)^{-L} \exp \left[\sum_{t=1}^L (-\bar{\mathbf{x}}_t^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \bar{\mathbf{x}}_t) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(\boldsymbol{\gamma})$ 是源信号幅度的协方差矩阵, 超参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 表示源信号空间功率, 因此 $\boldsymbol{\gamma}$ 控制了 $\bar{\mathbf{X}}$ 的行稀疏度。同理白噪声也假设为零均值的复高斯分布

$$p(\mathbf{V} | \alpha_0) \sim \prod_{t=1}^L \mathcal{CN}(\mathbf{v}_t | \mathbf{0}, \alpha_0^{-1} \mathbf{I}_M) \quad (5)$$

其中, $\alpha_0 = \sigma^{-2}$, σ^2 为噪声功率, \mathbf{I}_M 是单位矩阵。由贝叶斯概率模型, 对超参数 $\boldsymbol{\gamma}$ 及 α_0 假设Gamma先验分布^[5,6]

$$p(\boldsymbol{\gamma}) = \prod_{i=1}^N \text{Gamma}(\gamma_i; 1, b) \quad (6)$$

$$p(\alpha_0) = \text{Gamma}(\alpha_0; 1, c) \quad (7)$$

其中, $\text{Gamma}(x; u, v) = (\text{Gamma}(u))^{-1} v^u x^{u-1}$

$\exp(-vx)$, $\text{Gamma}(u) = \int_0^\infty t^{u-1} \exp(-t) dt$, b 和 c 表示所取的极小正数。

上述Gamma分布是高斯分布的共轭分布^[5], 式(4)和式(6)的两层次先验使得 $\bar{\mathbf{X}}$ 各列的实部与虚部服从拉普拉斯先验分布^[8], 这进一步促进了信号的稀疏^[6]。

源信号的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} p(\bar{\mathbf{X}}; \boldsymbol{\gamma}) &= p(\bar{\mathbf{X}} | \boldsymbol{\gamma}) p(\boldsymbol{\gamma}) = (\pi^N |\boldsymbol{\Gamma}|)^{-L} \\ &\cdot \exp \left[- \sum_{t=1}^L (\bar{\mathbf{x}}_t^H \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \bar{\mathbf{x}}_t) \right] \\ &\cdot \prod_{i=1}^N \text{Gamma}(\gamma_i; 1, b) \end{aligned} \quad (8)$$

观测信号的条件概率密度函数表示为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}; \alpha_0) &= \mathcal{CN}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}}, \alpha_0^{-1} \mathbf{I}_M) \\ &= (\pi \alpha_0^{-1})^{-ML} \exp \left(-\alpha_0 \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}}\|_F^2 \right) \end{aligned} \quad (9)$$

由贝叶斯原理可得源信号关于阵列接收数据的后验概率为

$$\begin{aligned} p(\bar{\mathbf{X}} | \mathbf{Y}; \boldsymbol{\gamma}, \alpha_0) &\equiv \frac{p(\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}; \alpha_0) p(\bar{\mathbf{X}} | \boldsymbol{\gamma})}{p(\mathbf{Y}; \boldsymbol{\gamma}, \alpha_0)} \\ &= (\pi^N |\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}}|)^{-L} \exp \left[-\text{tr} \left((\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}})^H \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}}) \right) \right] = \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}}) \end{aligned} \quad (10)$$

信号的后验均值和后验协方差矩阵为^[4]

$$\boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{A}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{Y} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}} = \left(\alpha_0 \mathbf{A}^H \mathbf{A} + \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \right)^{-1} = \boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{A}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\Gamma} \quad (12)$$

其中, $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}} = \alpha_0^{-1} \mathbf{I}_M + \mathbf{A} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{A}^H$ 为阵列输出协方差矩阵^[7]。

4 改进算法

为了提高DOA估计的精度并降低计算复杂度, 本文提出一种基于稀疏贝叶斯学习的DOA估计改进算法, 主要包括3个步骤。首先是超参数的预估计, 此部分利用不动点迭代算法的快速收敛特性预估信号的空间功率谱, 并通过估计信号协方差矩阵的对角线元素而避免了估计整个协方差矩阵来降低计算复杂度; 其次, 根据上一步功率谱的谱峰特征进行网格点的插值优化, 并对噪声方差和信号功率进行2次估计, 从而提高对空间紧邻DOA的分辨能力; 最后通过推导似然函数关于角度的最大化表达式来进行离格DOA搜索, 进一步提升估计精度。

4.1 超参数的预估计

稀疏贝叶斯学习的目的是最大化所有参数的后验概率 $\arg \max_{\boldsymbol{\gamma}, \alpha_0} p(\boldsymbol{\gamma}, \alpha_0 | \mathbf{Y})$, 而此后验概率的表达式

无法具体得出，因此要对其进行分解^[5]： $p(\gamma, \alpha_0 | \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} | \gamma, \alpha_0) p(\gamma) p(\alpha_0)$ ，并求出 \mathbf{Y} 的边缘似然函数

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}; \gamma, \alpha_0) &= \int p(\mathbf{Y} | \bar{\mathbf{X}}; \alpha_0) p(\bar{\mathbf{X}} | \gamma) p(\gamma) p(\alpha_0) d\bar{\mathbf{X}} \\ &= (\pi^M |\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}}|)^{-L} \cdot \exp[-\text{tr}(\mathbf{Y}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{Y})] \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^N \text{Gamma}(\gamma_i; 1, b) \cdot \text{Gamma}(\alpha_0; 1, c) \end{aligned} \quad (13)$$

稀疏贝叶斯学习的目标转化为最大化 \mathbf{Y} 的边缘似然函数，即type-II型最大似然方法^[5]

$$(\gamma; \alpha_0) = \arg \max_{\gamma \geq 0, \alpha_0 > 0} \{\ln p(\mathbf{Y}; \gamma, \alpha_0)\} \quad (14)$$

对式(13)取对数 $\ln(\cdot)$ 并省略常数项后目标函数变为

$$\begin{aligned} l(\gamma, \alpha_0) &= -L \ln |\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}}| - \sum_{i=1}^L (\mathbf{y}_t^H \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{y}_t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N (-b \gamma_i) - c \alpha_0 \end{aligned} \quad (15)$$

参考文献[6]的方法对上式关于信号功率 γ_i 求偏导可得

$$\frac{\partial l(\gamma, \alpha_0)}{\partial \gamma_i} = -L \frac{1}{\gamma_i} + L \frac{1}{\gamma_i^2} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}(i,i)} + \frac{1}{\gamma_i^2} \left\| \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}(i,:)} \right\|_2^2 - b \quad (16)$$

其中，下标 (i, i) 和 $(i, :)$ 分别表示矩阵的第 i, i 个元素和第 i 行。将式(16)置0，并令 $\nu_i = -1 + (\gamma_i^{\text{old}})^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}(i,i)}$ ， γ_i^{old} 指前一次迭代的信号功率值，把 ν_i 看为已知量，则解得 γ_i 的不动点迭代公式

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(\text{new})} &= \frac{L \nu_i}{2b} + \frac{1}{2b} \sqrt{L^2 \nu_i^2 + 4b \left\| \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}(i,:)} \right\|_2^2} \\ i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (17)$$

文献[8,12]的OGSBI和 rootSBL算法是对边缘似然函数使用EM算法进行最大化，但两者没有推导不动点法，因此最终迭代公式和式(17)不同，式(17)的等号右侧包含了前一次迭代的功率值 γ_i^{old} ，而文献[8,12]对应的迭代公式没有上述特点，因而收敛速度较慢。文献[4,7]中曾提到过一种不动点算法，但其没有对信号附加拉普拉斯先验，形式上和式(17)并不同。

对于 α_0 也采取对式(15)求偏导

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\gamma, \alpha_0)}{\partial \alpha_0} &= [M L \alpha_0^{-1} - L \text{tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}} \mathbf{A}^H)] \\ &\quad - \|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}}\|_F^2 - c \end{aligned} \quad (18)$$

令式(18)为0，解得 α_0 的迭代更新公式

$$\begin{aligned} \alpha_0^{(\text{new})} &= \frac{LM - L \alpha_0 \text{tr}(\mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}} \mathbf{A}^H)}{\|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}}\|_F^2 + c} \\ &= \frac{LM - L \alpha_0 \text{tr}(\mathbf{B} - \mathbf{B} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}}^{-1} \mathbf{B})}{\|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \boldsymbol{\mu}_{\bar{\mathbf{X}}}\|_F^2 + c} \end{aligned} \quad (19)$$

其中， $\text{tr}(\cdot)$ 指矩阵求迹运算， $\mathbf{B} = \mathbf{A} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{A}^H$ ，噪声方差 $\sigma^2 = \alpha_0^{-1}$ 也随之求出。注意到式(17)仅用到了 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}}$ 的对角线元素 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}(i,i)}$ ，因此若不使用式(12)计算 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}}$ ，而仅计算 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}}$ 的对角线元素 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}(i,i)}$ ，则会显著降低计算复杂度。可以令 $\mathbf{W} = \mathbf{A}^H \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Y}}^{-1}$ ，则 $\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}(i,i)}$ 表达式为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\bar{\mathbf{X}}(i,i)} = \gamma_i - \gamma_i^2 \mathbf{W}_{i,:} \mathbf{A}_{:,i}, i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

其中，式(12)的复数乘法的计算复杂度为 $M^2 N + MN^2$ ，而式(20)仅需 $M(M+1)N$ 。

4.2 网格插值优化及超参数2次估计

上述步骤收敛后， γ 中至多 K 个较大谱峰(即找出至多 K 个按幅值大小降序排列的谱峰，并设置归一化门限而保留超过此门限的较大谱峰)所在位置代表了估计的DOA，记作 $\tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2, \dots, \tilde{\vartheta}_K$ 。文献[7]指出，当第 k 个信号的真实DOA没有落在网格上时(离格DOA)，在真实DOA两侧网格点处对应功率会出现两个较大的幅值，这两个较大幅值包含于谱峰之中。记第 k 个谱峰包含的两个较大的幅值为 γ_{k1} 和 γ_{k2} ，两个幅值所在网格点的角度分别表示为 ϑ_{k1} 和 ϑ_{k2} ，且 $\vartheta_{k1} < \vartheta_{k2}$ ，离格DOA角度 $\hat{\theta}_k$ 可以由粗略的线性插值估计^[7]： $\hat{\theta}_k = \vartheta_{k1} + (\vartheta_{k2} - \vartheta_{k1})\varsigma$ ，其中 $\varsigma = \sqrt{\gamma_{k2}} / (\sqrt{\gamma_{k1}} + \sqrt{\gamma_{k2}})$ ，由于 $\varsigma < 1$ ，故 $\vartheta_{k1} < \hat{\theta}_k < \vartheta_{k2}$ 。为此可以采取如下网格点插值优化策略：设原始网格点集为 $\boldsymbol{\Theta}$ ，依次对各离格DOA范围 $(\vartheta_{k1}, \vartheta_{k2})$ 插入2个网格点使每个范围三等分，注意这里的网格点插值策略不局限于对网格三等分，虽然插入越多的网格点可能提高精度，但这也使得字典间相关性增强而造成性能的恶化，同时显著增加计算负担，所以此处采取三等分网格策略是折中选择。记插入的网格点集为 $\boldsymbol{\Theta}_{\text{IT}}$ ，同时在原始网格 $\boldsymbol{\Theta}$ 里保留谱峰中最大幅值两侧的各2个网格点，记 $\boldsymbol{\Theta}$ 里保留的网格点集为 $\boldsymbol{\Theta}_{\text{re}}$ ，则最终形成的新网格点集为

$$\boldsymbol{\Theta}_{\text{new}} = \boldsymbol{\Theta}_{\text{IT}} \cup \boldsymbol{\Theta}_{\text{re}} \quad (21)$$

由于谱峰之间保留的网格点可能有重叠，所以 $\boldsymbol{\Theta}_{\text{new}}$ 网格点数的最大值为 $7K$ 。与文献[3]中提出的网格细分方法不同，本文方法进一步利用了SBL算法的功率谱峰包含两较大幅值的谱峰特征，且没有对网格进行多级细分。如图1所示，粗短线代表原始网格点，竖直点划线是第 k 个信号的实际DOA，竖线代表能量幅值，三角形为插入的网格点，使用这样的网格点插值优化方法的好处在于：增强了

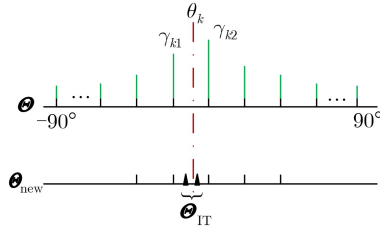


图1 网格点插值优化

2次估计后的空间谱对空间紧邻信号DOA的分辨率，同时提高了计算效率。

随后进行噪声方差的2次估计，这是因为准确的噪声方差可以提供更好的稀疏重构效果^[7]。由文献^[7,18]可以得到最大似然方法的噪声方差估计

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M-K} \text{tr} \left[(\mathbf{I}_M - \tilde{\mathbf{A}}_K (\tilde{\mathbf{A}}_K^H \tilde{\mathbf{A}}_K)^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_K^H) \mathbf{R}_Y \right] \quad (22)$$

其中， $\tilde{\mathbf{A}}_K = [\mathbf{a}(\tilde{\vartheta}_1), \mathbf{a}(\tilde{\vartheta}_2), \dots, \mathbf{a}(\tilde{\vartheta}_K)]$ 是近似的阵列流形矩阵， $\tilde{\vartheta}_1, \tilde{\vartheta}_2, \dots, \tilde{\vartheta}_K$ 是预估计阶段的DOA估计值， $\mathbf{R}_Y = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H/L$ 是样本协方差矩阵。如果 K 未知，那么任何 $1 \sim M-1$ 的取值都可以有很好的噪声估计效果^[17]。再对信号功率进行2次估计：使用 Θ_{new} 建立过完备流形矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ ，总网格点数变为 \bar{N} ，信号的后验均值、后验协方差矩阵和阵列输出协方差矩阵对角线元素分别改为 $\bar{\mu}_{\tilde{\mathbf{X}}}$ ， $\bar{\Sigma}_{\tilde{\mathbf{X}}(i,i)}$ 和 $\bar{\Sigma}_Y$ ，信号功率改为 $\bar{\gamma}$ 噪声方差使用式(22)，再代入式(11)、式(20)、式(17)迭代。

4.3 改进的离格DOA估计

2次估计后仍然存在DOA和网格点的失配误差，这里参考文献^[7]的高精度DOA估计。相比文献^[7]的方法，改进之处是推导了拉普拉斯先验分布下的边缘似然函数关于角度的最大化表达式，保证性能的同时降低了计算量。

设二次估计后得到了 $\bar{\gamma}$ ， $\bar{\Sigma}_Y$ ，信号幅度协方差矩阵 $\bar{\Gamma}$ ，以及 $\bar{\gamma}$ 的谱峰包含的DOA估计范围 $\Theta_K = \{(\vartheta_{11}, \vartheta_{12}), (\vartheta_{21}, \vartheta_{22}), \dots, (\vartheta_{K1}, \vartheta_{K2})\}$ ，从 Θ_{new} 里去除第 k 个角度集后记为 $\Theta_{\text{new},-k}$ ，则过完备流形变为 $\tilde{\mathbf{A}}(\Theta_{\text{new},-k})$ ， $\bar{\Gamma}$ 中去除第 k 个角度集对应功率，记作 $\bar{\Gamma}_{-k}$ ， $\bar{\Sigma}_Y$ 中去除第 k 个信号分量后记为 $\bar{\Sigma}_{Y,-k} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_M + \tilde{\mathbf{A}}(\Theta_{\text{new},-k}) \bar{\Gamma}_{-k} \tilde{\mathbf{A}}(\Theta_{\text{new},-k})^H$ ，则可以得到阵列输出协方差矩阵的另一种形式^[7]

$$\tilde{\Sigma}_Y = \bar{\Sigma}_{Y,-k} + \eta_k \mathbf{a}(\hat{\theta}_k) \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_k) \quad (23)$$

其中， η_k 属于离格信号功率，不同于网格点处的信号功率 γ_i ， $\mathbf{a}(\hat{\theta}_k)$ 为离格角度 $\hat{\theta}_k$ 的阵列流形。把 $\tilde{\Sigma}_Y$ 代入式(15)可以得到用于DOA离格估计的拉普拉斯信号先验的边缘似然函数

$$G_k = -L \ln \left| (\bar{\Sigma}_{Y,-k} + \eta_k \mathbf{a}(\hat{\theta}_k) \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_k)) \right| - \sum_{t=1}^L \left(\mathbf{Y}_{:,t}^H (\bar{\Sigma}_{Y,-k} + \eta_k \mathbf{a}(\hat{\theta}_k) \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_k))^{-1} \mathbf{Y}_{:,t} \right) - b \hat{\eta}_k - \sum_{j=1, j \neq k}^{\bar{N}} b \hat{\eta}_j, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (24)$$

估计的目标是 $[\hat{\eta}_k, \hat{\theta}_k] = \arg \max(G_k)$ ，参考文献^[6]的方法对 G_k 作进一步化简 ^{$\hat{\eta}, \hat{\theta}$}

$$G_k = -L \ln \left| \bar{\Sigma}_{Y,-k} \right| - \sum_{t=1}^L \left(\mathbf{Y}_{:,t}^H \bar{\Sigma}_{Y,-k}^{-1} \mathbf{Y}_{:,t} \right) - \sum_{j=1, j \neq k}^{\bar{N}} b \hat{\eta}_j - b \hat{\eta}_k - L \ln \left(1 + \hat{\eta}_k \mathbf{a}(\hat{\theta}_k) \bar{\Sigma}_{Y,-k}^{-1} \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_k) \right) + \frac{L \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_k) \bar{\Sigma}_{Y,-k}^{-1} \mathbf{R}_Y \bar{\Sigma}_{Y,-k}^{-1} \mathbf{a}(\hat{\theta}_k)}{\hat{\eta}_k^{-1} + \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_k) \bar{\Sigma}_{Y,-k}^{-1} \mathbf{a}(\hat{\theta}_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (25)$$

式(25)右侧前3项与 $\hat{\eta}_k$ 和 $\hat{\theta}_k$ 无关，不影响 G_k 关于它们的最大化求解；后3项与 $\hat{\eta}_k$ 和 $\hat{\theta}_k$ 有关，记为 $G(\hat{\eta}_k, \hat{\theta}_k)$ 。令

$$s_k = \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_k) \bar{\Sigma}_{Y,-k}^{-1} \mathbf{a}(\hat{\theta}_k) \quad (26)$$

$$q_k = L \mathbf{a}^H(\hat{\theta}_k) \bar{\Sigma}_{Y,-k}^{-1} \mathbf{R}_Y \bar{\Sigma}_{Y,-k}^{-1} \mathbf{a}(\hat{\theta}_k) \quad (27)$$

则

$$G(\hat{\eta}_k, \hat{\theta}_k) = \left(-L \ln(1 + \hat{\eta}_k s_k) + \frac{q_k}{\hat{\eta}_k^{-1} + s_k} - b \hat{\eta}_k \right) \quad (28)$$

式(28)关于 $\hat{\eta}_k$ 求偏后得到

$$\frac{dG(\hat{\eta}_k, \hat{\theta}_k)}{d\hat{\eta}_k} = \frac{-L s_k (1 + \hat{\eta}_k s_k) + q_k - b(1 + \hat{\eta}_k s_k)^2}{(1 + \hat{\eta}_k s_k)^2} \quad (29)$$

令式(29)为0，并考虑到信号功率非负，可以解得第 k 个信号的离格功率

$$\hat{\eta}_k = \frac{1}{2s_k b} \left(-(L s_k + 2b) + \sqrt{(L s_k + 2b)^2 - 4b(L s_k + b - q_k)} \right) \quad (30)$$

由于 $G(\hat{\eta}_k, \hat{\theta}_k)$ 是二元函数，其最大值点由 $\hat{\eta}_k$ 和 $\hat{\theta}_k$ 同时确定，式(30)是取最大值时两个自变量的关系式。注意 $\hat{\eta}_k$ ， s_k 和 q_k 均是 $\hat{\theta}_k$ 的函数，用式(30)代替式(28)中的 $\hat{\eta}_k$ ，结果记为 $G(\hat{\theta}_k)$ ， $G(\hat{\theta}_k)$ 即为拉普拉斯先验分布下的边缘似然函数关于角度的最大化表达式。离格DOA估计通过较小的角度步长 δ 均匀搜索 $\bar{\gamma}$ 中第 k 个谱峰包含的两个较大幅值对应网格角

度之间的 $\hat{\theta}_k$

$$\hat{\theta}_k = \max_{\hat{\theta}_k} \arg G(\hat{\theta}_k), \vartheta_{k1} < \hat{\theta}_k < \vartheta_{k2} \quad (31)$$

4.4 算法流程和运算复杂度分析

本文所提算法简称为网格插值-多快拍稀疏贝叶斯学习 (Grid Interpolation-Multiple snapshot Sparse Bayesian Learning, GI-MSBL), 流程总结如下:

步骤 1 信号功率的预估计。

(1) 建立网格点集 Θ , 过完备流形矩阵 \mathbf{A} , 输入 \mathbf{Y} , 初始化 $\gamma = \mathbf{1}$, $\alpha_0 = (ML)/(0.1 \|\mathbf{Y}\|_F^2)$, 迭代次数 $\rho=0$, $b = 0.01$, $c = 10^{-4}$ 。

(2) 迭代开始, 根据式(11)、式(20)更新 $\mu_{\mathbf{x}}$ 和 $\Sigma_{\mathbf{x}}^{(i,i)}$ 。

(3) 根据式(17)、式(19)更新 $\gamma^{(\text{new})}$ 和 $\alpha_0^{(\text{new})}$, $\rho=\rho+1$ 。

(4) 若 $\|\gamma^{(\text{new})} - \gamma^{(\text{old})}\|_2 / \|\gamma^{(\text{old})}\|_2 > \varepsilon = 0.001$ 且 $\rho \leq 500$ 则返回第(2)步。

(5) 迭代结束, 输出预估计的 γ, σ^2 。

步骤 2 网格插值优化及超参数的2次估计。

(6) 根据 γ 的谱峰对 K 个DOA估计范围进行网格点插值, 用式(21)建立新网格点集 Θ_{new} 。

(7) 根据式(22)估计 $\hat{\sigma}^2$ 。

(8) 使用 Θ_{new} 建立过完备流形矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$, 输入 \mathbf{Y} , 初始化 $\bar{\gamma}=1$, $\rho=0$, 噪声功率使用 $\hat{\sigma}^2$, 更新 $\bar{\mu}_{\mathbf{x}}$ 和 $\bar{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{(i,i)}$ 。

(9) 根据式(17)更新 $\bar{\gamma}^{(\text{new})}$, $\rho=\rho+1$ 。

(10) 若 $\|\bar{\gamma}^{(\text{new})} - \bar{\gamma}^{(\text{old})}\|_2 / \|\bar{\gamma}^{(\text{old})}\|_2 > \varepsilon = 0.001$ 且 $\rho \leq 500$ 则返回第(9)步。

(11) 迭代结束, 输出2次估计的信号功率 $\bar{\gamma}$ 。

步骤 3 改进的离格DOA估计。

(12) 由式(31)对 $\bar{\gamma}$ 中谱峰的离格DOA范围以较小步长 δ 均匀搜索得到 $\hat{\theta}_k$ 。

以复数乘法次数作为计算复杂度的衡量标准, 则所提算法的计算复杂度近似为 $l_1(2MNL + (M+1)MN) + l_2(M\bar{N}L + (M+1)M\bar{N}) + (2M^2 + 2M)KN_0$ 。 l_1 与 l_2 分别为预估计和2次估计阶段的迭代次数, N_0 为第3步离格DOA搜索点数。本文GI-MSBL算法及对比算法的计算复杂度如表1所示。

其中, l 代表SBL类算法“.”的收敛次数, 是由迭代门限和算法的收敛特性决定。 N_{MUSIC} 是MUSIC算法的空域搜索点数, N_1 是iRVM-DOA的离格搜索点数。其中L1-SVD由于凸优化工具箱的使用, 其计算复杂度只能用阶数记号“ O ”进行近似表达。

5 仿真分析

仿真对比指标: (1)均方根误差: RMSE=

表 1 算法的计算复杂度

算法	计算复杂度
本文GI-MSBL	$l_1(2MNL + (M+1)MN)$
iRVM-DOA ^[7]	$l_2(M\bar{N}L + (M+1)M\bar{N}) + (2M^2 + 2M)KN_0$
OGSBI ^[8]	$l_{\text{iRVM-DOA}}(MNL + MN^2 + M^2N) + (2M^2 + 6M)KN_1$
rootSBL ^[12]	$l_{\text{OGSBI}}(2MNL + MN^2 + M^2N + MN(L+K))$
PSBL ^[9,10]	$l_{\text{rootSBL}}(2MNL + MN^2 + M^2N + M(N-1)L)$
L1-SVD ^[3]	$l_{\text{PSBL}}(2MNL + M(N-1)^2 + M^2(N-1)) + l_{\text{PSBL}}(L(N-1)(M+K))$
MUSIC ^[2]	$O((KN)^3)$
	$(M-K)MLN_{\text{MUSIC}}$

$\sqrt{\sum_{\text{Ttest}=1}^{\text{TL}} \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_k^{\text{Ttest}} - \theta_k)^2 / (\text{TL} \times K)}$, 其中TL为总随机实验次数, $\hat{\theta}_k^{\text{Ttest}}$ 为第 k 个DOA的估计, θ_k 是第 k 个DOA的真实值, K 为信号个数。(2)分辨概率: 设 θ_1, θ_2 为真实DOA, $\theta_m = (\theta_1 + \theta_2)/2$, 如果谱值 $\gamma(\theta_m) < (\gamma(\theta_1) + \gamma(\theta_2))/2$, 则成功分辨两个信号^[18], 设成功分辨次数为SR, 则分辨概率为 $P = \text{SR}/\text{TL}$ 。所有仿真使用阵元数 $M=10$, 阵元间距 d 为半波长的均匀线阵, 快拍数 $L=30$, 信号个数 $K=2$ 为已知量, 初始化空间网格点集为 $-90^\circ : 2^\circ : 90^\circ$, 即网格间距GRI=2°。仿真算法为本文算法GI-MSBL¹⁾和GI-MSBL0(GI-MSBL0指GI-MSBL算法中 $\Theta_{\text{IT}} = \emptyset$ 且 $\Theta_{\text{new}} = \Theta_{\text{re}}$, 即无网格点插值步骤而其他步骤不变), iRVM-DOA^[7], OGSBI^[8], PSBL^[9,10], rootSBL^[12], L1-SVD^[3], MUSIC^[2]。为公平比较, 各种SBL算法初始化信号功率都设置为1, 如未特别说明, 统一用 $\varepsilon = 0.001$ 的迭代门限; GI-MSBL及iRVM-DOA的离格DOA搜索步长 δ 均为0.02°; L1-SVD通过网格细分提高精度。下面将从空间功率谱、估计精度、分辨能力、运算效率等方面对各算法进行对比。

5.1 空间功率谱图对比

两个独立等功率的随机信号DOA为 -3.05° 和 1.57° , 信噪比均取10 dB, 进行150次随机试验, 得到空间谱如图2所示。图2的点划线为真实DOA, 实线为空间谱, 为了清晰展示取 $-20^\circ \sim 20^\circ$ 的方位角范围。对GI-MSBL算法, 结合式(21), 在插入网格点集 Θ_{IT} 后, 总的网格点集 Θ_{total} 等于原始网格点集 Θ 与 Θ_{IT} 取并集: $\Theta_{\text{total}} = \Theta \cup \Theta_{\text{IT}}$, 记 Θ_{total} 包含的网格点数为 N_{total} , 注意 Θ_{new} 是 Θ_{total} 的一个子集, 把 Θ_{new} 里网格点对应的

¹⁾算法matlab代码在链接: <https://pan.baidu.com/s/1Jk-WTe1JxPSszPpGAik6Fmg> 提取码: MSBL

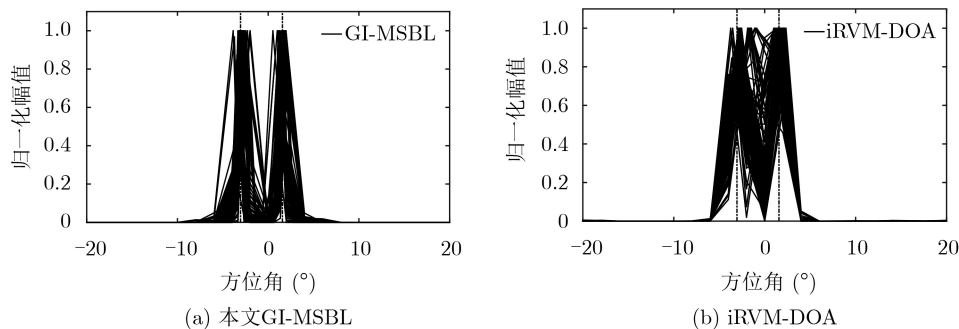


图2 算法的空间谱对比

信号空间功率值 γ 赋值给 Θ_{total} 里对应网格点处的功率, 再把网格点集 Θ_{total} 里除网格点集 Θ_{new} 以外的信号功率置0, 作图时, 横坐标为 N_{total} 个网格点 Θ_{total} 对应的方位角, 纵坐标是归一化信号功率幅值, 从而得到图2(a)的空间谱。从图2可以看出GI-MSBL比iRVM-DOA的谱峰波动更小, 这是因为网格优化插值方法以及超参数的2次估计增强了对紧邻DOA的分辨率。这里只选取iRVM-DOA进行对比, 其余算法与之类似, 受篇幅所限不在此一一列出。

5.2 不同信噪比下的估计精度和运算效率比较

两个独立等功率的随机信号角度为 $(-3+u)^\circ$ 和 $(3+u)^\circ$, u 从角度范围 $[-\text{GRI}, \text{GRI}]$ 内随机选取(避免固定角度的影响), 信噪比从 $-6 \sim 20$ dB变化, 每个信噪比下做150次随机试验, 结果见图3(a)。低信噪比下, GI-MSBL0和GI-MSBL的误差都小于其他算法, 这是因为超参数的2次估计增强了低信噪比的稀疏恢复能力。GI-MSBL算法在高信噪比下精度更高, 这是网格插值方法带来的性能提升。由于所提不动点迭代公式(17)具有很快的收敛速度, 且不同于其他SBL算法估计整个信号协方差矩阵, 所提算法只估计信号协方差矩阵的对角线元素, 所以图3(b)的GI-MSBL方法有着优于其他SBL类方法的运算效率。

5.3 不同DOA间隔下的分辨能力比较

固定信噪比5 dB, 两个独立信号的DOA分别为 $(-3+u)^\circ$ 和 $(3+\Delta\theta+u)^\circ$, DOA间隔 $\Delta\theta$ 从 3° 到 11° 变化, 每个 $\Delta\theta$ 下做150次随机试验, 见图4。图4(a)中, 在间隔 3.5° 到 5.5° 的范围内, GI-MSBL误差最小。图4(b)中GI-MSBL在 $\Delta\theta < 4.5^\circ$ 时分辨概率最高。

5.4 不同迭代门限下的估计精度和计算复杂度比较

信噪比固定为5 dB, 迭代门限 ε 从0.001到0.1变化, 其余条件同5.2节, 每个 ε 下做150次随机试验, 见图5。图5(a)中, 所提算法在迭代门限较大时估计误差最小。图5(b)中根据表1的平均复数乘法次数来衡量计算复杂度, GI-MSBL0以及GI-MSBL平均复数乘法次数最少。

6 结束语

为了改进对空间紧邻信号DOA估计的精度和计算复杂度, 本文提出一种基于网格插值的多快拍稀疏贝叶斯学习(GI-MSBL)算法, 改进算法比其他经典的稀疏贝叶斯学习算法具有以下优势: (1)对空间紧邻DOA具有更好的估计效果; (2)低信噪比下估计性能更好, 计算效率更高; (3)能使用大迭代门限取得更高的估计精度。另外, 对于水下宽带信号, 通过傅里叶变换在频域对每个频段即可以使用所提算法。

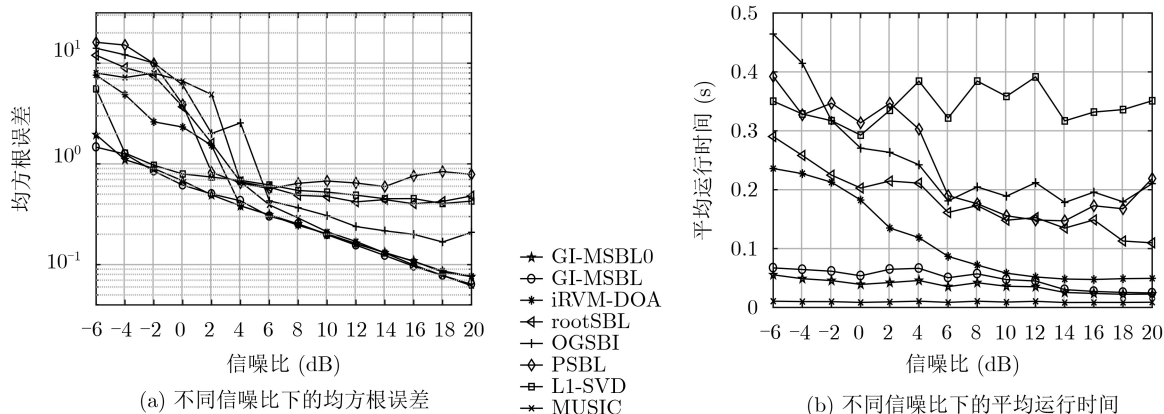


图3 不同信噪比下的估计性能和运算效率

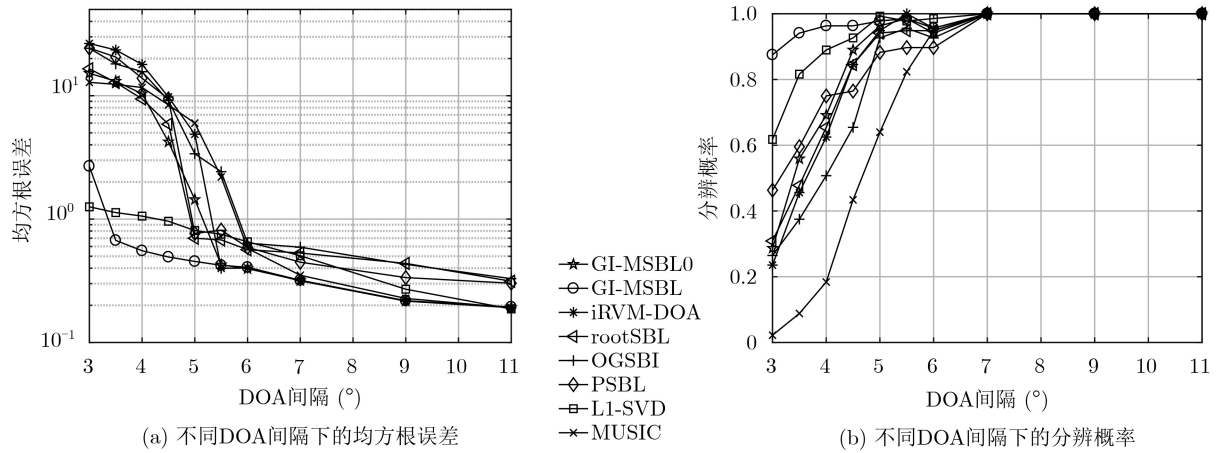


图4 不同DOA间隔下的分辨能力比较

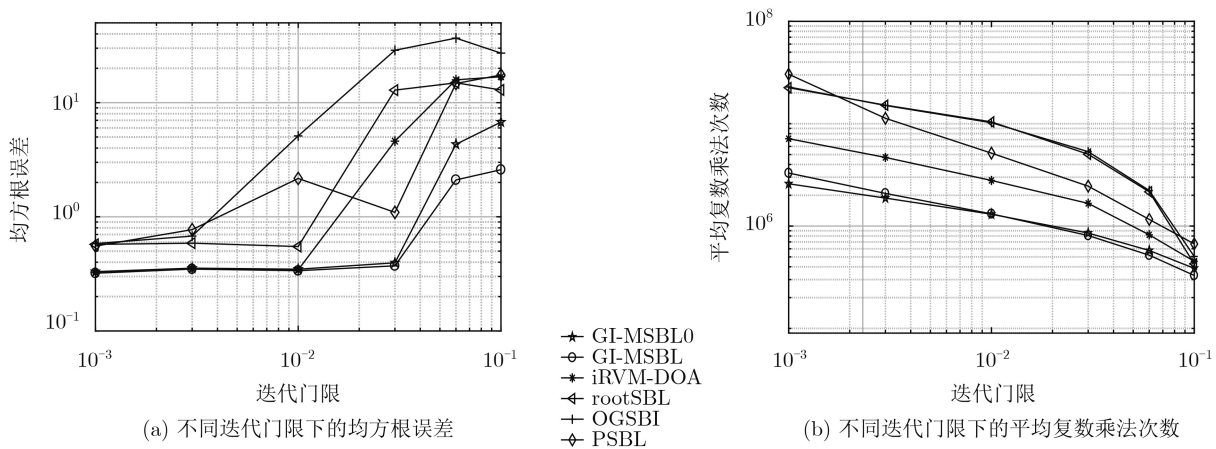


图5 不同迭代门限下的估计精度和计算复杂度

参考文献

- [1] 鄢社锋, 马远良. 传感器阵列波束优化设计及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009, 230–235.
YAN Shefeng and MA Yuanliang. Sensor Array Beampattern Optimization: Theory with Applications[M]. Beijing: Science Press, 2009, 230–235.
- [2] SCHMIDT R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: [10.1109/TAP.1986.1143830](https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143830).
- [3] MALIOUTOV D, CETIN M, and WILSKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022. doi: [10.1109/TSP.2005.850882](https://doi.org/10.1109/TSP.2005.850882).
- [4] WIPF D P and RAO B D. An empirical Bayesian strategy for solving the simultaneous sparse approximation problem [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3704–3716. doi: [10.1109/TSP.2007.894265](https://doi.org/10.1109/TSP.2007.894265).
- [5] TIPPING M E and SMOLA A. Sparse Bayesian learning and the relevance vector machine[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2001, 1(3): 211–244.
- [6] BABACAN S D, MOLINA R, and KATSAGGELOS A K. Bayesian compressive sensing using Laplace priors[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, 19(1): 53–63. doi: [10.1109/TIP.2009.2032894](https://doi.org/10.1109/TIP.2009.2032894).
- [7] LIU Zhangmeng, HUANG Zhitao, and ZHOU Yiyu. An efficient maximum likelihood method for direction-of-arrival estimation via sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2012, 11(10): 1–11. doi: [10.1109/TWC.2012.090312.111912](https://doi.org/10.1109/TWC.2012.090312.111912).
- [8] YANG Zai, XIE Lihua, and ZHANG Cishen. Off-grid direction of arrival estimation using sparse Bayesian inference [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(1): 38–43. doi: [10.1109/TSP.2012.2222378](https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2222378).
- [9] WU Xiaohuan, ZHU Weiping, and YAN Jun. Direction of arrival estimation for off-grid signals based on sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(7): 2004–2016. doi: [10.1109/JSEN.2015.2508059](https://doi.org/10.1109/JSEN.2015.2508059).
- [10] 郭英, 东润泽, 张坤峰, 等. 基于稀疏贝叶斯学习的多跳频信号DOA估计方法[J]. *电子与信息学报*, 2019, 41(3): 516–522. doi: [10.11999/JEIT180435](https://doi.org/10.11999/JEIT180435).
GUO Ying, DONG Runze, ZHANG Kunfeng, et al. Direction of arrival estimation for multiple frequency hopping signals based on sparse Bayesian learning[J]. *Journal*

- of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(3): 516–522. doi: [10.11999/JEIT180435](https://doi.org/10.11999/JEIT180435).
- [11] 游康勇, 杨立山, 刘玥良, 等. 基于稀疏贝叶斯学习的网格自适应多源定位[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(9): 2150–2157. doi: [10.11999/JEIT171238](https://doi.org/10.11999/JEIT171238).
YOU Kangyong, YANG Lishan, LIU Yueliang, *et al.* Adaptive grid multiple sources localization based on sparse Bayesian learning[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(9): 2150–2157. doi: [10.11999/JEIT171238](https://doi.org/10.11999/JEIT171238).
- [12] DAI Jisheng, BAO Xu, XU Weichao, *et al.* Root sparse Bayesian learning for off-grid DOA estimation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(1): 46–50. doi: [10.1109/LSP.2016.2636319](https://doi.org/10.1109/LSP.2016.2636319).
- [13] DAI Jisheng and SO H C. Sparse Bayesian learning approach for outlier-resistant direction-of-arrival estimation [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(3): 744–756. doi: [10.1109/TSP.2017.2773420](https://doi.org/10.1109/TSP.2017.2773420).
- [14] GEMBA K L, NANNURU S, and GERSTOFT P. Robust ocean acoustic localization with sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2019, 13(1): 49–60. doi: [10.1109/JSTSP.2019.2900912](https://doi.org/10.1109/JSTSP.2019.2900912).
- [15] DAI Jisheng, ZHOU Lei, CHANG Chunqi, *et al.* Robust Bayesian learning approach for massive MIMO channel estimation[J]. *Signal Processing*, 2020, 168: 107345. doi: [10.1016/j.sigpro.2019.107345](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.107345).
- [16] ZHENG Rui, XU Xu, YE Zhongfu, *et al.* Sparse Bayesian learning for off-grid DOA estimation with Gaussian mixture priors when both circular and non-circular sources coexist[J]. *Signal Processing*, 2019, 161: 124–135. doi: [10.1016/j.sigpro.2019.03.021](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.03.021).
- [17] SHI Yunmei, MAO Xingpeng, ZHAO Chunlei, *et al.* Underdetermined DOA estimation for wideband signals via joint sparse signal reconstruction[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(10): 1541–1545. doi: [10.1109/LSP.2019.2937381](https://doi.org/10.1109/LSP.2019.2937381).
- [18] ZHOU Changguo, HABER F, and JAGGARD D L. A resolution measure for the MUSIC algorithm and its application to plane wave arrivals contaminated by coherent interference[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, 39(2): 454–463. doi: [10.1109/78.80829](https://doi.org/10.1109/78.80829).
- 王琦森: 男, 1996年生, 博士生, 研究方向为水声信号处理。
余 华: 男, 1973年生, 教授, 研究方向为无线通信与网络、水声通信网络、水声信号处理等。
李 杰: 男, 1984年生, 副研究员, 研究方向为阵列信号处理、水声通信等。
董 超: 男, 1982年生, 副研究员, 研究方向为海洋无人智能装备。
季 飞: 女, 1970年生, 教授, 研究方向为无线通信与网络、水声通信等。
陈焱琨: 女, 1982年生, 工程师, 研究方向为水声信号处理。

责任编辑: 马秀强