

## 低信噪比条件下宽带欠定信号高精度 DOA 估计

冯明月<sup>\*①</sup> 何明浩<sup>①</sup> 徐璟<sup>②</sup> 李少东<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(空军预警学院 武汉 430019)

<sup>②</sup>(解放军 94969 部队 上海 200040)

**摘要:** 为提高低信噪比条件下宽带欠定信号 DOA 估计精度, 该文提出基于网格失配迭代最小化稀疏学习的宽带 DOA 估计方法。该方法首先对频域协方差矩阵进行矢量化处理实现虚拟阵列扩展, 将欠定信号转换为超定信号。其次利用线性变换滤除含有噪声项的虚拟阵元, 并对协方差估计误差进行了白化处理, 抑制了信号中的干扰项。最后建立了包含不同频点联合稀疏参数和网格失配参数的贝叶斯层次架构, 推导了联合稀疏参数、网格失配参数的最小稀疏表达式并进行了迭代学习。较传统方法, 该方法不依赖任何先验信息, 更好地抑制了虚拟阵元中的噪声和干扰, 降低了网格失配对 DOA 估计的影响, 在低信噪比条件下具有更高的 DOA 估计精度和分辨率。仿真实验验证了该方法的有效性。

**关键词:** 宽带信号到达角估计; 低信噪比条件; 欠定信号; 网格失配; 最小稀疏迭代

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)06-1340-08

DOI: 10.11999/JEIT160921

## High Accuracy DOA Estimation Under Low SNR Condition for Wideband Underdetermined Signals

FENG Mingyue<sup>①</sup> HE Minghao<sup>①</sup> XU Jing<sup>②</sup> LI Shaodong<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China)

<sup>②</sup>(94969 Unit the PLA, Shanghai 200040, China)

**Abstract:** In order to improve underdetermined wideband signals DOA estimation accuracy under low Signal to Noise Ratio (SNR) condition, an off-grid sparse learning via iterative minimization algorithm is proposed. Firstly, the novel algorithm vectorizes the covariance matrix in frequency domain to realize virtual array extension, as a result, underdetermined wideband signals are transformed into overdetermined signals. Then linear transform is used to eliminate the noise contained virtual array elements, whitening process is utilized to the estimation error of covariance matrix, as a result, the interference in signals is suppressed. Finally, a Bayesian structure containing the joint sparsity parameter of different frequencies and off-grid parameter is built, the minimization sparse expressions of joint sparsity parameter and off-grid parameter are deduced and corresponding parameters are learned iteratively. Compared with other methods, the proposed method does not rely on any prior information, suppresses the inference in virtual array elements more efficiently, reduces the effects of off-grid problem, and gets higher DOA estimation accuracy and resolution under low SNR condition. Simulation experiments verify the validity of the novel algorithm.

**Key words:** Wideband signals DOA estimation; Under low SNR condition; Underdetermined signals; Off-grid problem; Sparse Learning via Iterative Minimization (SLIM)

### 1 引言

宽带信号具有抗干扰能力强、调制样式复杂、

携带信息量大等特点, 在雷达、通信、电子对抗侦察等领域具有十分广泛的应用, 随之产生的宽带信号到达角(Direction Of Arrival, DOA)估计问题, 尤其是基于稀疏重构算法的宽带信号 DOA 估计, 成为了阵列信号处理中的一个研究热点<sup>[1,2]</sup>。近年来, 日益复杂多变的电磁环境导致来波信号数量增多、信噪比下降, 来波信号个数大于阵元数的欠定情况时有发生<sup>[3]</sup>, 因此如何提高低信噪比和欠定条件下宽带信号的 DOA 估计精度, 成为了一个亟需解决的问题。

收稿日期: 2016-09-12; 改回日期: 2017-01-24; 网络出版: 2017-03-21

\*通信作者: 冯明月 fengmingyue2005@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61401504), 军内计划科研项目(2015XXX), 湖北省自然科学基金(2016CFB288)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61401504), The Military Plan of Scientific Research Project (2015XXX), The Natural Science Foundation of Hubei Province (2016CFB288)

针对上述问题, 文献[4, 5]对嵌套阵列进行了虚拟阵列扩展, 经虚拟阵列扩展后, 欠定信号即转换为虚拟阵元数大于信号个数的超定信号, 后利用空间平滑 MUSIC 算法对各个频点分别进行了 DOA 估计, 但此类方法难以充分利用不同频点的联合稀疏性和扩展后的虚拟阵元, DOA 估计精度较低。文献[6]利用各个频点的联合稀疏性通过凸优化的方法在互质阵列上进行了宽带 DOA 估计, 该方法还加入了降噪处理, 较文献[4, 5]在低信噪比条件下测向精度有了较大提升, 但需要设定先验参数, 并且存在网格失配的问题<sup>[7]</sup>, 即当到达角不在预定网格上时, 会存在较大的估计误差。文献[8]在文献[6]的基础上, 推导了先验参数的范围值, 提出了无需任何先验信息的宽带稀疏频谱拟合估计算法(Wideband Sparse Spectrum Fitting, W-SpSF), 但仍采用凸优化求解目标函数, 在稀疏表示模型上并未进行改进, 依然存在网格失配的问题。针对宽带信号 DOA 估计中的网格失配问题, 文献[9]提出了变分贝叶斯期望最大算法(Variational Bayesian Expectation Maximization, VBEM), 该方法利用期望最大(Expectation Maximization, EM)算法对构建的贝叶斯分层架构进行寻优, 较文献[10]中的聚焦贝叶斯算法和文献[11]的宽带 EM 算法, 不需要提供初始角度信息, 避免了稀疏学习过程中的局部最优, 但同文献[12]所用的最小稀疏迭代算法<sup>[13]</sup>(Sparse Learning via Iterative Minimization, SLIM)相比, 在 DOA 估计问题中, EM 算法对最大似然估计的寻优收敛速度慢, 存在冗余处理。此外, 由于未进行虚拟阵列扩展和降噪处理, VBEM 算法并不能进行欠定信号的 DOA 估计, 在低信噪比情况下, 仍难以达到较高的 DOA 估计精度。综合当前研究现状, 利用互质阵列、嵌套阵列进行虚拟阵列扩展<sup>[14]</sup>, 可较好解决欠定信号的 DOA 估计问题, 而在低信噪比条件下, 现有方法均难以达到较高的估计精度, 究其原因并没有一种方法能够同时解决噪声抑制和网格失配这两个关键问题。

为提高低信噪比条件下宽带欠定信号的 DOA 估计精度, 本文提出了基于网格失配迭代最小化稀疏学习(Off-Grid Sparse Learning via Iterative Minimization, OGS LIM)的宽带信号 DOA 估计算法, OGS LIM 在保持 SLIM 算法<sup>[12]</sup>收敛速度快的基础上, 从噪声抑制、提高效率 and 网格失配 3 方面进行引申, 具体而言: (1)依据互质阵列协方差矩阵特点, 通过线性变换, 滤掉了含有噪声项的虚拟阵元, 提高了低信噪比条件下的算法性能; (2)通过白化处理将协方差估计误差转换为标准差为 1 的高斯白噪声, 避免了对噪声标准差的迭代学习及其导致的估

计误差, 提高了算法效率; (3)基于网格失配模型建立了贝叶斯层次架构, 推导了网格失配参数的最小稀疏表达式, 避免了 SLIM 算法中的网格失配问题, 提高了 DOA 估计精度。仿真结果表明, 在低信噪比条件下该算法较大地提升了对于宽带欠定信号的 DOA 估计精度。

## 2 数学模型

### 2.1 互质阵列宽带输出模型

本文采用 CACIS(Coprime Array with Compressed Inter-element Spacing)型互质阵列<sup>[15]</sup>, 共包含  $\tilde{M} = pM + N - 1$  个阵元, 其中  $N$  和  $M$  互质, 阵列结构如图 1 所示。

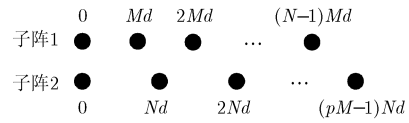


图 1 CACIS 型互质阵列结构示意图

由图 1 可知, 子阵 1 包含  $N$  个阵元, 阵元间距为  $Md$ , 子阵 2 包含  $pM$  个阵元, 阵元间距为  $Nd$ ,  $p$  为阵元压缩系数,  $d$  为单位阵元间距, 两个子阵共用第 1 个阵元, 则阵元所在位置为

$$\mathbf{D} = \{Mnd \mid 0 \leq n \leq N - 1\} \cup \{Nmd \mid 0 \leq m \leq pM - 1\} \quad (1)$$

设有  $K$  个带宽相同的远场宽带信号  $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t) \ \mathbf{x}_2(t) \ \cdots \ \mathbf{x}_K(t)]^T$ , 功率为  $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_K]$ , 到达角为  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_K]$ , 信号的中心频率为  $f_c$ , 带宽为  $B$ , 采样频率为  $f$ , 互质阵列的第  $m$  个阵元的接收数据为

$$\mathbf{y}_m(t) = \sum_{i=1}^K \mathbf{x}_i(t - \tau_{m,i}) + \mathbf{n}_m(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m \in [\tilde{M}] \quad (2)$$

式中,  $[\tilde{M}]$  表示 1 到  $\tilde{M}$  的整数,  $\tau_{m,i} = d_m \sin(\theta_i)/c$  是第  $i$  个信号到第  $m$  个阵元上的时延,  $d_m \in \mathbf{D}$  为第  $m$  个阵元与第 1 个阵元的间距,  $c$  为信号的介质传播速度,  $\mathbf{n}_m(t)$  为第  $m$  个阵元的加性噪声,  $T$  为观测时长。将  $\mathbf{y}(t)$  按观测时间  $T$  均匀划分为  $Q$  段, 对每段进行  $L$  点的离散傅里叶变换(DFT), 可得宽带信号模型为

$$\mathbf{Y}_q(f_l) = \mathbf{A}_l(\mathbf{q}) \mathbf{X}_q(f_l) + \mathbf{N}_q(f_l), \quad q \in [Q], l \in [L] \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{Y}_q(f_l)$ ,  $\mathbf{X}_q(f_l)$ ,  $\mathbf{N}_q(f_l)$  分别为频点  $f_l$  处第  $q$  段  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{n}(t)$  的 DFT。  $\mathbf{A}_l(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}_l(\theta_1) \ \mathbf{a}_l(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}_l(\theta_K)] \in \mathbb{C}^{\tilde{M} \times K}$  为频点  $f_l$  处的导向矢量矩阵, 其中,

$$\mathbf{a}_l(\theta_k) = [1 \exp(-i2\pi f_l d_2 \sin(\theta_k)/c) \cdots \exp(-i2\pi f_l d_{\tilde{M}} \sin(\theta_k)/c)]^T, \quad k \in [K] \quad (4)$$

设在同一频点下的信号和噪声彼此独立并服从复高斯分布, 可得频点  $f_l$  处的协方差矩阵为

$$\mathbf{R}_l = E[\mathbf{Y}_q(f_l)\mathbf{Y}_q^H(f_l)] = \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\theta})\text{diag}(\mathbf{p}_l)\mathbf{A}_l^H(\boldsymbol{\theta}) + \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_l) \quad (5)$$

式中,  $E[\bullet]$  表示期望运算,  $\text{diag}(\mathbf{p}_l)$  表示对角线为  $\mathbf{p}_l = [p_{l,1} \ p_{l,2} \ \cdots \ p_{l,K}]^T$  的矩阵,  $p_{l,k}$  是频点  $f_l$  处第  $k$  个信号的功率,  $\text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_l)$  表示对角线为  $\boldsymbol{\sigma}_l = [\sigma_{l,1} \ \sigma_{l,2} \ \cdots \ \sigma_{l,\tilde{M}}]^T$  的矩阵,  $\sigma_{l,m}$  是频点  $f_l$  处第  $m$  个阵元的噪声功率。为进行欠定信号的 DOA 估计, 对  $\mathbf{R}_l$  进行矢量化处理构建虚拟阵列<sup>[6]</sup>, 可得

$$\mathbf{v}_l = \text{vec}(\mathbf{R}_l) = \mathbf{A}_{vl}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{p}_l + \mathbf{1}_l, \quad l \in [L] \quad (6)$$

式中,  $\text{vec}(\bullet)$  为矢量化运算,  $\mathbf{1}_l = [\sigma_{l,1}\mathbf{e}_1 \ \sigma_{l,2}\mathbf{e}_2 \ \cdots \ \sigma_{l,\tilde{M}}\mathbf{e}_{\tilde{M}}]^T$ ,  $\mathbf{e}_m$  为长度为  $\tilde{M}$  的行矢量, 除第  $m$  个元素为 1 外, 其余元素均匀 0,  $\mathbf{A}_{vl}(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{a}_l^*(\theta_1) \otimes \mathbf{a}_l(\theta_1) \ \mathbf{a}_l^*(\theta_2) \otimes \mathbf{a}_l(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}_l^*(\theta_K) \otimes \mathbf{a}_l(\theta_K)] \in \mathbb{C}^{\tilde{M}^2 \times K}$  为虚拟阵元构成的导向矢量矩阵,  $(\bullet)^*$  和  $\otimes$  分别为共轭运算和 Kronecker 积。

由式(6)可得互质阵列的宽带输出矩阵  $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_L] \in \mathbb{C}^{\tilde{M}^2 \times L}$ , 其包含  $\tilde{M}^2$  个虚拟阵元, 尽管部分虚拟阵元位置重叠, 但仍可获得大于阵元数  $\tilde{M}$  的测向自由度, 具备了进行欠定宽带信号 DOA 估计的能力。为消除冗余阵元优化的增益, 凸显所提方法的有效性, 本文采用常规矢量化处理的方式<sup>[8]</sup>, 构建包含冗余虚拟阵元的非均匀线阵。

## 2.2 网格失配稀疏表示

设  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = [\tilde{\theta}_1 \ \tilde{\theta}_2 \ \cdots \ \tilde{\theta}_G]$  为  $[-\pi/2, \pi/2]$  内的  $G$  个均匀分布网格, 相邻网格间距为  $r$ , 并且满足  $G \gg K$ , 距第  $i$  个到达角  $\theta_i$  最近的网格为  $\tilde{\theta}_{g_i}$ ,  $g_i$  为网格序号, 则  $\mathbf{A}_{vl}(\boldsymbol{\theta})$  可表示为<sup>[17]</sup>

$$\mathbf{A}_{vl}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Phi}_l(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\beta}_l) = \mathbf{A}_{vl}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{B}_l(\tilde{\boldsymbol{\theta}})\text{diag}(\boldsymbol{\beta}_l) \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{B}_l(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) = [\mathbf{b}_l(\tilde{\theta}_1) \ \mathbf{b}_l(\tilde{\theta}_2) \ \cdots \ \mathbf{b}_l(\tilde{\theta}_G)] \in \mathbb{C}^{\tilde{M}^2 \times G}$ ,  $\mathbf{b}_l(\tilde{\theta}_i)$  为  $\mathbf{a}_j^*(\tilde{\theta}_i) \otimes \mathbf{a}_j(\tilde{\theta}_i)$  关于  $\tilde{\theta}_i$  的导数,  $\boldsymbol{\beta}_l = [\beta_{l,1} \ \beta_{l,2} \ \cdots \ \beta_{l,G}]^T$  为频点  $f_l$  处的网格失配参数, 当  $g = g_i$  时,  $\beta_{l,g} = \theta_i - \tilde{\theta}_{g_i}$ , 其它情况  $\beta_{l,g} = 0$ 。对于同一宽带信号, 其带宽内的各个频点 DOA 相同, 因此可假设不同频点的网格失配参数不变, 即  $\boldsymbol{\beta}_l = \boldsymbol{\beta}, l \in [L]$ ,  $\boldsymbol{\beta} \sim U[-r/2, r/2]$ 。将式(7)代入式(6), 可得  $\mathbf{v}_l$  基于网格失配模型的稀疏表示为

$$\mathbf{v}_l = \text{vec}(\mathbf{R}_l) = \boldsymbol{\Phi}_l(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\beta})\tilde{\mathbf{p}}_l + \mathbf{1}_l, \quad l \in [L] \quad (8)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{p}}_l = [\tilde{p}_{l,1} \ \tilde{p}_{l,2} \ \cdots \ \tilde{p}_{l,G}]^T \in \mathbb{R}^{G \times 1}$  为  $K$  稀疏向量, 当  $g = g_i$  时,  $\tilde{p}_{l,g} = p_{l,i}$  为非零元素。

## 3 基于 OGSLIM 算法的宽带 DOA 估计

### 3.1 降噪和白化处理

在实际应用中, 由于频率采样点有限, 通常对  $\mathbf{R}_l$  利用算术平均的方法进行近似估计, 即

$$\tilde{\mathbf{R}}_l = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q [\mathbf{Y}_q(f_l)\mathbf{Y}_q^H(f_l)] = \mathbf{R}_l + \Delta\mathbf{R}_l \quad (9)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{R}}_l$  为  $\mathbf{R}_l$  的估计值,  $\Delta\mathbf{R}_l$  为估计误差, 将式(9)代入式(8), 可得

$$\tilde{\mathbf{v}}_l = \text{vec}(\tilde{\mathbf{R}}_l) = \boldsymbol{\Phi}_l(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\beta})\tilde{\mathbf{p}}_l + \mathbf{1}_l + \Delta\mathbf{v}_l, \quad l \in [L] \quad (10)$$

式中,  $\Delta\mathbf{v}_l = \text{vec}(\Delta\mathbf{R}_l)$ , 可见, 实际应用中, 阵列输出矢量  $\tilde{\mathbf{v}}_l$  中还包含噪声项  $\mathbf{1}_l$  和协方差估计误差  $\text{vec}(\Delta\mathbf{R}_l)$  两个干扰项, 为提高 DOA 估计精度, 有必要对上述两项干扰进行抑制。

由  $\mathbf{1}_l$  的定义可知, 噪声主要集中在  $\mathbf{1}_l$  的  $\tilde{M}$  个非零元素中, 并且对于不同频点噪声所在位置相同, 为降低噪声影响, 通过线性变换法除  $\mathbf{1}_l$  中的非零元素。

$$\mathbf{z}_l = \mathbf{J}\tilde{\mathbf{v}}_l = \mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}_l(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\beta})\tilde{\mathbf{p}}_l + \mathbf{J}\Delta\mathbf{v}_l, \quad l \in [L] \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1 \ \mathbf{J}_2 \ \cdots \ \mathbf{J}_{\tilde{M}-1}]^T \in \mathbb{R}^{\tilde{M}(\tilde{M}-1) \times \tilde{M}^2}$ ,  $\mathbf{J}_m = [\mathbf{e}_{m(\tilde{M}+1)-\tilde{M}+1} \ \mathbf{e}_{m(\tilde{M}+1)-\tilde{M}+2} \ \cdots \ \mathbf{e}_{m(\tilde{M}+1)}] \in \mathbb{R}^{\tilde{M}^2 \times \tilde{M}}, 1 \leq m \leq \tilde{M}-1$  为线性变换矩阵。对于协方差估计误差, 由文献[18]可知,  $\Delta\mathbf{v}_l$  服从渐进复高斯分布, 即  $\Delta\mathbf{v}_l \sim \text{CN}(\mathbf{0}, (\mathbf{R}_l^T \otimes \mathbf{R}_l)/Q)$ , 可得

$$\mathbf{J}\Delta\mathbf{v}_l \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{W}_l), \mathbf{W}_l = \frac{1}{Q} \mathbf{J}(\mathbf{R}_l^T \otimes \mathbf{R}_l)\mathbf{J}^T \quad (12)$$

因此,  $\mathbf{J}\Delta\mathbf{v}_l$  可视为高斯色噪声, 为消除色噪声的不确定性影响, 对  $\mathbf{J}\Delta\mathbf{v}_l$  进行白化处理

$$\tilde{\mathbf{y}}_l = \tilde{\mathbf{W}}_l^{-1/2} \mathbf{z}_l = \boldsymbol{\Psi}_l(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\beta})\tilde{\mathbf{p}}_l + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad l \in [L] \quad (13)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{W}}_l = \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{R}}_l^T \otimes \tilde{\mathbf{R}}_l)\mathbf{J}^T/Q$  为  $\mathbf{W}_l$  的估计值,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{W}}_l^{-1/2} \mathbf{J}\Delta\mathbf{v}_l \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{\tilde{M}(\tilde{M}-1)})$  为标准差为 1 的高斯白噪声,  $\mathbf{I}_{\tilde{M}(\tilde{M}-1)}$  为  $\tilde{M}(\tilde{M}-1)$  维单位矩阵,  $\boldsymbol{\Psi}_l(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\beta}) = \tilde{\mathbf{W}}_l^{-1/2} \mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}_l(\tilde{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{\beta})\tilde{\mathbf{p}}_l$  为降噪和白化处理后的导向矢量矩阵。

### 3.2 贝叶斯层次架构

设  $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{\mathbf{y}}_1 \ \tilde{\mathbf{y}}_2 \ \cdots \ \tilde{\mathbf{y}}_L]$ ,  $\tilde{\mathbf{p}} = [\tilde{\mathbf{p}}_1 \ \tilde{\mathbf{p}}_2 \ \cdots \ \tilde{\mathbf{p}}_L]$ , 由于不同频点处信号的到达角不变, 故  $\tilde{\mathbf{p}}$  的每一列稀疏性相同, 引入参数矢量  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \cdots \ \gamma_G]^T$  表征  $\tilde{\mathbf{p}}$  在不同频点处的联合稀疏性, 根据文献[9]设  $\tilde{\mathbf{p}}_l | \boldsymbol{\gamma} \sim \text{CN}(\mathbf{0}, \text{diag}(\boldsymbol{\gamma}))$ , 在已知稀疏重构网格  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$  后,

由式(13)可得  $\tilde{\mathbf{y}}$  和  $\tilde{\mathbf{p}}$  的概率密度函数分别为

$$\begin{aligned} f(\tilde{\mathbf{y}} | \boldsymbol{\beta}, \tilde{\mathbf{p}}) &= \prod_{l=1}^L \text{CN}(\tilde{\mathbf{y}}_l | \boldsymbol{\Psi}_l(\boldsymbol{\beta}) \tilde{\mathbf{p}}_l, \mathbf{I}_{\tilde{M}(\tilde{M}-1)}) \\ &= \prod_{l=1}^L \frac{1}{\pi^{\tilde{M}(\tilde{M}-1)}} \exp(-\|\tilde{\mathbf{y}}_l - \boldsymbol{\Psi}_l(\boldsymbol{\beta}) \tilde{\mathbf{p}}_l\|^2) \quad (14) \\ f(\tilde{\mathbf{p}} | \boldsymbol{\gamma}) &= \prod_{l=1}^L \text{CN}(\tilde{\mathbf{p}}_l | 0, \text{diag}(\boldsymbol{\gamma})) \\ &= \prod_{l=1}^L \frac{1}{\pi^G \prod_{n=1}^G \gamma_n} \exp\left(-\sum_{n=1}^G \frac{\tilde{p}_{l,n}^2}{\gamma_n}\right) \quad (15) \end{aligned}$$

利用贝叶斯公式, 可得未知参数  $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}})$  的后验概率密度函数为

$$f(\boldsymbol{\beta}, \tilde{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\gamma} | \tilde{\mathbf{y}}) = \frac{f(\tilde{\mathbf{y}} | \boldsymbol{\beta}, \tilde{\mathbf{p}}) f(\tilde{\mathbf{p}} | \boldsymbol{\gamma}) f(\boldsymbol{\beta})}{f(\tilde{\mathbf{y}})} \quad (16)$$

由于  $\boldsymbol{\beta}$  服从均匀分布, 其概率密度函数  $f(\boldsymbol{\beta})$  为常数, 先验概率密度函数  $f(\tilde{\mathbf{y}})$  与未知参数  $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}})$  无关。设  $F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}}) = -\ln[f(\tilde{\mathbf{y}} | \boldsymbol{\beta}, \tilde{\mathbf{p}}) f(\tilde{\mathbf{p}} | \boldsymbol{\gamma})]$ , 可得 3 个未知参数的对数最大后验估计  $(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\gamma}_m, \tilde{\mathbf{p}}_m)$  为

$$(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\gamma}_m, \tilde{\mathbf{p}}_m) = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}}} \{F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}})\} \quad (17)$$

### 3.3 迭代最小稀疏化学习

利用迭代最小稀疏化学习的方法对式(17)进行求解, 将式(14)和式(15)代入  $F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}})$ , 可得

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}}) &= \sum_{l=1}^L \|\tilde{\mathbf{y}}_l - \boldsymbol{\Psi}_l(\boldsymbol{\beta}) \tilde{\mathbf{p}}_l\|^2 \\ &\quad + L \sum_{n=1}^G \ln \gamma_n + \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^G \frac{\tilde{p}_{l,n}^2}{\gamma_n} \quad (18) \end{aligned}$$

当  $\gamma_n \rightarrow 0$  时,  $F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}})$  会趋近于  $-\infty$ , 从而影响全局寻优, 故设定  $\gamma_n \geq \varepsilon$  作为限制条件, 本文取  $\varepsilon = 10^{-16}$ 。分别求  $F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}})$  关于  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  和  $\tilde{\mathbf{p}}_l$  的偏导数并令偏导数为 0, 可得

$$\gamma_n = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \tilde{p}_{l,n}^2 \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left\{ \sum_{l=1}^L \left[ (\tilde{\mathbf{B}}_l^H \tilde{\mathbf{B}}_l)^* \odot \tilde{\mathbf{p}}_l \tilde{\mathbf{p}}_l^H \right] \right\}^{-1} \cdot \sum_{l=1}^L \text{real} \left[ \text{diag}(\tilde{\mathbf{p}}_l^*) \tilde{\mathbf{B}}_l^H (\tilde{\mathbf{y}}_l - \tilde{\mathbf{A}}_l \tilde{\mathbf{p}}_l) \right]^T \quad (20)$$

$$\tilde{\mathbf{p}}_l = \left[ \boldsymbol{\Psi}_l^H(\boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\Psi}_l(\boldsymbol{\beta}) + \text{diag}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}) \right]^{-1} \boldsymbol{\Psi}_l^H(\boldsymbol{\beta}) \tilde{\mathbf{y}}_l, \quad l \in [L] \quad (21)$$

式中,  $\tilde{\mathbf{A}}_l = \tilde{\mathbf{W}}_l^{-1/2} \mathbf{J} \mathbf{A}_l(\boldsymbol{\theta})$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_l = \tilde{\mathbf{W}}_l^{-1/2} \mathbf{J} \mathbf{B}_l(\boldsymbol{\theta})$ ,  $\text{real}(\cdot)$  表示求取实部运算。当  $0 < \gamma_n < \sum_{l=1}^L \tilde{p}_{l,n}^2 / L$  时,  $\partial F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}}) / \partial \gamma_n < 0$ ,  $F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}})$  关于  $\gamma_n$  单调递减, 当  $\gamma_n \geq \sum_{l=1}^L \tilde{p}_{l,n}^2 / L$  时,  $\partial F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}}) / \partial \gamma_n > 0$ ,  $F(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\mathbf{p}})$  关于  $\gamma_n$  单调递增, 由于限制条件下的存在,  $\gamma_n$  的最小稀疏值为

$$\gamma_n = \max \left\{ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \tilde{p}_{l,n}^2, \varepsilon \right\}, \quad n \in [G] \quad (22)$$

同理, 式(20)和式(21)即为  $\boldsymbol{\beta}$  和  $\tilde{\mathbf{p}}_l$  的最小稀疏值。得到最小稀疏值后, 利用循环迭代的方法进行寻优, 当达到终止条件  $\|\boldsymbol{\gamma}^{i+1} - \boldsymbol{\gamma}^i\|_2 / \|\boldsymbol{\gamma}^i\|_2 < \tau$  或者最大迭代次数  $i = \text{im}$  后, 终止迭代, 其中上标  $i$  表示迭代次数,  $\boldsymbol{\gamma}^i$  为第  $i$  次迭代  $\boldsymbol{\gamma}$  的估计值,  $\text{im}$  为最大迭代次数,  $\tau$  为预先设定的判决门限。

利用循环迭代得到  $(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\gamma}_m, \tilde{\mathbf{p}}_m)$  后, 设距  $\boldsymbol{\gamma}_m$  的第  $i$  个谱峰最近的网格编号为  $\tilde{g}_i$ , 则第  $i$  个信号的到达角的估计值为

$$\theta_{e,i} = \tilde{\theta}_{\tilde{g}_i} + \boldsymbol{\beta}_{m,\tilde{g}_i}, \quad i \in [K] \quad (23)$$

### 3.4 算法步骤

在利用式(8)对互质阵列接收信号进行矢量化处理得到  $\tilde{\mathbf{v}}$  后, OGSLIM 算法由降噪和白化处理、循环迭代和 DOA 求解 3 步实现 DOA 估计, 具体步骤如表 1 所示。

表 1 OGSLIM 算法具体步骤

输入:	互质阵列接收信号 $\tilde{\mathbf{v}}$ , $\boldsymbol{\beta}$ , $\tilde{\mathbf{p}}$ 的初始值为 $\boldsymbol{\beta}^0$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}^0$ , 网格 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ , 判决门限 $\tau$ , 设定初始迭代次数 $i = 1$
输出:	DOA 估计值 $\boldsymbol{\theta}_e$
步骤 1	利用式(11)对 $\tilde{\mathbf{v}}$ 进行降噪, 之后利用式(13)进行白化处理, 得到 $\tilde{\mathbf{y}}$ ;
步骤 2	while $\ \boldsymbol{\gamma}^{i+1} - \boldsymbol{\gamma}^i\ _2 / \ \boldsymbol{\gamma}^i\ _2 < \tau$ or $i < \text{im}$ 将 $\tilde{\mathbf{p}}^{i-1}$ 代入式(22)计算 $\gamma_n^i, n \in [G]$ , 代入式(20)计算 $\boldsymbol{\beta}^i$ ; 将 $\gamma_n^i, \boldsymbol{\beta}^i$ 代入式(21)计算 $\tilde{\mathbf{p}}_l^i, l \in [L]$ ; $i = i + 1$ ; end while 得到式(17)的解 $(\boldsymbol{\beta}_m, \boldsymbol{\gamma}_m, \tilde{\mathbf{p}}_m)$ ;
步骤 3	搜索 $\boldsymbol{\gamma}_m$ 谱峰所在位置 $\tilde{g}_i$ , 利用式(23)求取 DOA 估计值 $\boldsymbol{\theta}_e$ 。

### 3.5 性能分析

对于 CACIS 型互质阵列, 利用矢量化处理进行虚拟阵列扩展, 可构成  $\tilde{M}^2$  个虚拟阵元, 除去位置重叠的阵元, 有  $2pMN - (M+1)(N-1) - 1$  个虚拟独立阵元, 而 DOA 估计精度和测向自由度主要由虚拟独立阵元个数决定[15]。OGSLIM 在 3.1 节的降噪处理中, 通过线性变换的方法滤除了含有噪声项的  $\tilde{M}$  个位置重叠的虚拟阵元, 等价于滤除了 1 个位置为 0 的虚拟独立阵元, 当  $M = 3, N = 5, p = 2$  时, 虚拟独立阵元数由 43 减少到 42, 所用降噪处理方法并不会对测向效果产生较大影响。

在收敛性上, 文献[13]证明了 SLIM 具有较快的收敛速度, OGSLIM 是在 SLIM 的基础上衍生而来,

加入的网格失配参数  $\beta$  仍按照最小稀疏迭代的方法进行寻优, 并未改变 SLIM 收敛速度快的特点。在运算量上, 和同样基于贝叶斯架构的 SLIM 和 VBEM[9]进行对比, OGSLIM 较 SLIM 和 VBEM 省去了噪声方差的学习, 减少的运算量为  $O(\widetilde{MGLI})$ ,  $I$  为迭代次数; 在网格失配参数学习上, 差异主要为式(21), OGSLIM 较 SLIM 增加的运算量为  $O(G^2 \widetilde{MLI} + G^3 I)$ , 较 VBEM 利用式(20)减少的运算量为  $O(G^2 \widetilde{MLI} + G^3 LI)$ 。

#### 4 仿真分析

本节共进行 3 个仿真实验对所提 OGSLIM 算法的有效性进行验证。实验 1 分析了  $-13$  dB 的低信噪比条件下, OGSLIM 对欠定宽带信号的测向能力, 并与 SLIM<sup>[12]</sup>进行了比较; 实验 2 分析了信噪比和频率采样点变化对 OGSLIM 测向精度影响, 并与 VBEM 算法<sup>[9]</sup>、W-SpSF 算法<sup>[8]</sup>、SLIM 算法和克拉美罗下界(Cramer-Rao Low Bound, CRLB)进行了比较; 实验 3 分析了  $-13$  dB 的低信噪比条件下, OGSLIM 对到达角临近的两个信号的测向能力, 并与 VBEM 算法 W-SpSF 算法进行了比较。实验中, VBEM, SLIM 和 OGSLIM 的最大迭代次数  $im = 500$ , 迭代终止条件  $\tau = 1 \times 10^{-3}$ , 进行稀疏重构的网格范围为  $-90^\circ \sim 90^\circ$ , 相邻网格间距为  $1^\circ$ , SLIM 和 OGSLIM 的初始值  $\hat{p}^0$  设定同文献[12], VBEM 和 OGSLIM 的网格失配初始值  $\beta^0 = \mathbf{0}$ , CRLB 的计算方法同文献[8]。由于假设信号带宽相同, 省略文献[9]中 VBEM 的频点分类过程。

##### 实验 1 欠定条件下测向能力分析

所用互质阵列如图 1 所示, 共有 10 个真实阵元, 其中  $M = 3$ ,  $N = 5$ ,  $p = 2$ , 基础阵元间距  $d = 5$  cm, 设有 15 个具有相同中心频率和带宽的来波信号, 中心频率  $f_c = 3$  kHz, 带宽  $B = 1$  kHz, 采样频率  $f = 10$  kHz, 信号的到达角均匀分布于  $-65.3^\circ \sim 50.5^\circ$ , 信号的传播速度为 340 m/s, 信噪比为  $-13$  dB。将阵列输出信号分为  $Q = 100$  段, 每段进行  $L = 32$  点的 DFT, 即将整个频带分为 32 个窄带, 每个窄带有 100 个频率采样点。OGSLIM 和 SLIM 的重构信号幅度谱如图 2 所示。

由图 2 可知, 在低信噪比欠定条件下, 图 2(a) OGSLIM 的重构幅度谱中, 15 个谱峰所在位置即为 15 个来波信号的到达角, 未形成冗余谱峰, 即在到达角个数未知的条件下, 通过搜索 OGSLIM 重构幅度谱的谱峰所在位置, 即可进行 DOA 的有效估计; 而图 2(b)SLIM 的重构幅度谱中, 除真实到达角外还出现了较多的冗余谱峰, 也难以对 15 个来波信号的到达角进行准确估计。由此可见, 较 SLIM, OGSLIM

由于加入了降噪和白化处理, 较好抑制了噪声和协方差估计误差, 在不需要先验信息的条件下, 可进行低信噪比欠定宽带信号的 DOA 估计。

##### 实验 2 条件变化对测向精度的影响分析

有 8 个中心频率和带宽相同的来波信号, 到达角均匀分布于  $-65.3^\circ \sim 50.5^\circ$ , 信号参数设置同实验 1, (1)当信噪比变化时, 变化范围为  $-13 \sim 10$  dB, 步长为 1 dB, 频率采样点  $Q = 100$ , 每个信噪比进行 200 次蒙特卡洛实验, 计算均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)并记录 SLIM, VBEM 和 OGSLIM 的平均迭代次数, 结果如图 3; (2)当频率采样点变化时, 其变化范围为 20 到 200, 步长为 20, 信噪比固定为 0 dB, 每个频率采样点进行 200 次蒙特卡洛实验, 计算 RMSE 并记录平均迭代次数, 结果如图 4, 不同条件 4 种算法单次蒙特卡洛实验的平均运算时间如表 2。

由图 3(a)可知: (1)OGSLIM 同 W-SpSF 和 SLIM 对比, 可得网格失配问题对 DOA 估计精度影响明显, W-SpSF 和 SLIM 难以突破 0.307 的网格理论误差值, 而 OGSLIM 突破了这一理论门限, 可进行 RMSE 为 0.08 左右的高精度估计, 验证了 OGSLIM 中网格失配处理的必要性和有效性; (2)OGSLIM 同 VBEM 和 SLIM 对比, 在  $-13 \sim 8$  dB 的低信噪比条件下, OGSLIM 受信噪比的影响更小, VBEM 和 SLIM 在这一信噪比区间性能波动较为明显, 验证了 OGSLIM 中降噪和白化处理的有效性; (3)OGSLIM 同 CRLB 对比, OGSLIM 始终趋近 CRLB, 平均差值为 0.013, 证明了 OGSLIM 具有较高的 DOA 估计精度。

由图 3(b)可知: (1)OGSLIM 同 VBEM 对比, VBEM 所用迭代次数远大于 OGSLIM, 并且随着信噪比增大, VBEM 所用迭代次数逐渐增加, 而 OGSLIM 则稳定在 50 次左右; (2)OGSLIM 同 SLIM 对比, 在不同信噪比条件下两种方法所用迭代次数基本相同, 可见 OGSLIM 中对于网格失配参数的迭代学习并未改变最小稀疏迭代方法收敛速度快的特点, OGSLIM 仍具有较快的收敛速度。

由图 4(a)可知, 随着频率采样点的增加, 4 种算法的测向精度均有增加, 其中 OGSLIM 在不同频率采样点条件下的测向精度均高于其它 3 种算法, 在 20 个频率采样点的情况下, OGSLIM 可达到 0.1 的测向精度与 CRLB 相差 0.04, 并且随着频率采样点的增大, OGSLIM 逐步趋近于 CRLB, 可见 OGSLIM 达到较高测向精度的同时不需要大量的频率采样点作为支撑; 由图 4(b)可知, 随着频率采样点的增加, OGSLIM 和 SLIM 的迭代次数仍较为稳定, 保持在 50 次左右, 远小于 VBEM, 再次证明了 OGSLIM 具有较快的收敛速度。

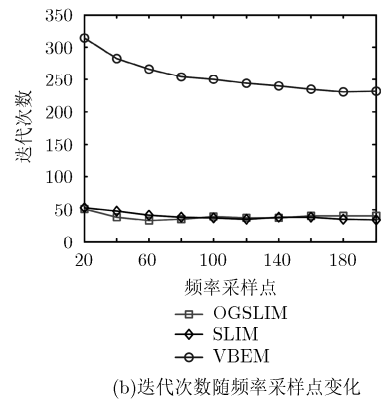
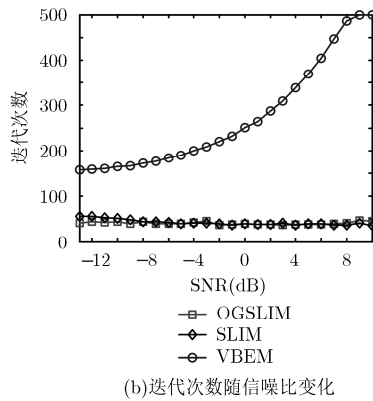
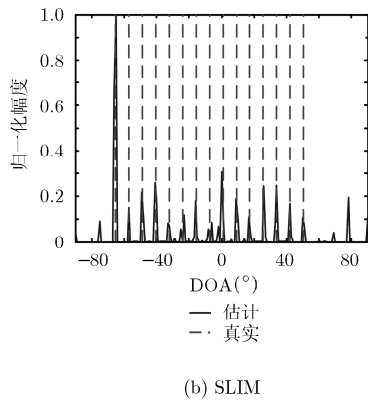
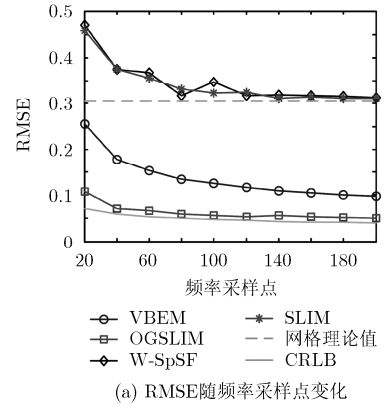
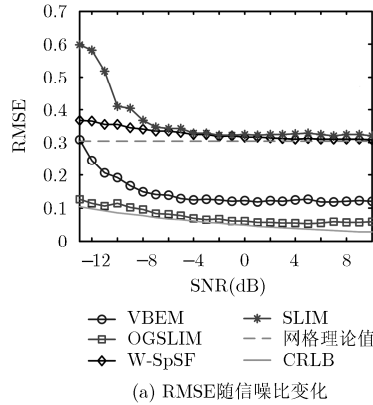
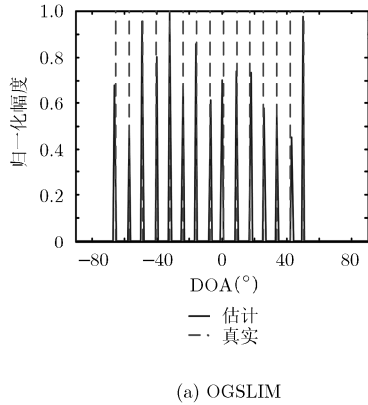


图2 OGSLIM 和 SLIM 的重构幅度谱

图3 信噪比变化对测向精度的影响

图4 频率采样点对测向精度的影响

表2 4种算法单次蒙特卡洛实验平均用时对比

算法	信噪比变化(s)	采样点变化(s)
OGSLIM	0.89	0.92
SLIM	0.55	0.56
VBEM	22.24	23.79
W-SpSF	6.20	6.39

由表2可知，(1)OGSLIM同SLIM对比，在运算速度上，二者用时基本相当，OGSLIM由于加入了网格失配参数略慢于SLIM；(2)OGSLIM同VBEM, W-SpSF对比，OGSLIM的速度要明显快于同样进行网格失配参数学习的VBEM和同样进行降噪处理的W-SpSF，VBEM由于需要较多的迭代次数和学习参数，运行速度最慢。由此可见，OGSLIM继承了SLIM运算速度快的优点，较W-SPSF和VBEM在运算速度上也有一定优势。

### 实验3 到达角临近信号测向能力分析

定义分辨概率<sup>[14]</sup>：当检测到两个信号，且估计偏差的绝对值之和不大于1°时，认定为正确分辨，分辨概率为正确分辨的次数与蒙特卡洛实验次数的比值。设有到达角临近的两个宽带信号，信号中心频率和带宽相同，信号参数设置和所用互质阵列同实验1，信号1的到达角为23.1°，信号2的到达角

为23.1° + Δθ，信号参数设置同实验1，信噪比为-13 dB，频率采样点Q = 100。(1)对OGSLIM, VBEM, SLIM 3种算法的测向分辨率进行分析，角度差Δθ从1.5°增大到4.0°，步长为0.1°，每个角度差进行200次蒙特卡洛实验，计算分辨概率，结果如图5(a)；(2)分析OGSLIM和VBEM的估计精度，角度差Δθ从4.0°增大到15.0°，步长为1.0°，每个角度差进行200次蒙特卡洛实验，计算估计偏差的绝对值之和，结果如图5(b)。

由图5(a)可知，OGSLIM在角度差大于2.5°时可达100%的分辨概率，VBEM在角度差为3.9°时，才达到94%的分辨概率，而SLIM算法则难以成功分辨角度差小于4.0°的两个信号，分辨概率始终小于10%。可见，由于加入了降噪和 whitening 处理，在-13 dB的低信噪比条件下，OGSLIM较VBEM和SLIM对于到达角临近信号具有更强的分辨能力。由图5(b)可知，在角度差大于4.0°时，两种算法的估计偏差保持稳定，OGSLIM的估计偏差明显小于VBEM，证明了OGSLIM对于到达角临近信号具有更高的测向精度。

### 5 结束语

SLIM算法作为一种性能优异的稀疏重构算法，在宽带信号DOA估计中，具有收敛速度快的特点，

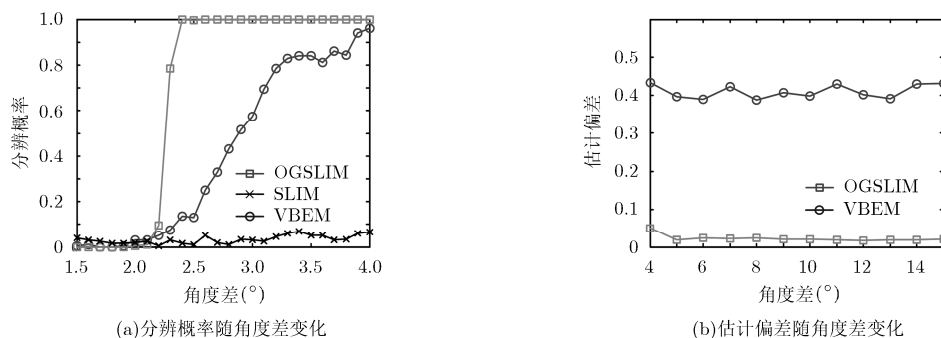


图5 到达角临近信号的测向能力

但对信噪比要求较高且存在稀疏重构算法中常见的网格失配问题。为此, 本文基于互质阵列提出了OGSLIM算法, 该方法具有SLIM收敛速度快的特点, 通过进行降噪处理、白化处理、网格失配参数学习3方面的引申, 有效提高了低信噪比条件下的测向能力, 可达到接近克拉美罗下界的测向精度, 并且不需要任何先验信息, 对于欠定信号和临近信号的估计问题均具有较强的解决能力。本文研究假设来波信号具有相同带宽, 在此基础上利用了不同频点的联合稀疏性, 实际上来波信号带宽交叠情况复杂, 难以确定是否具有联合稀疏性, 这将是今后的研究重点。

### 参考文献

- [1] ZHANG Yong, HE Peiyu, and WANG Haijiang. Wideband coherent sources localization based on a two-node distributed sensor networks[J]. *Signal Processing*, 2016, 126(9): 103-110. doi: 10.1016/j.sigpro.2015.10.024.
- [2] ZHEN Jiaqi and WANG Zhifang. DOA estimation method for wideband signals by block sparse reconstruction[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2016, 27(1): 20-27. doi: 10.1109/JSEE.2016.00003.
- [3] 朱立为, 汪亚, 王翔, 等. 空时频域中欠定混合条件下的波达方向估计[J]. *国防科技大学学报*, 2015, 37(5): 149-154. doi: 10.11887/j.cn.201505023.  
ZHU Liwei, WANG Ya, WANG Xiang, et al. Underdetermined direction of arrival estimation based on spatial time-frequency distributions[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2015, 37(5): 149-154. doi: 10.11887/j.cn.201505023.
- [4] HAN Keyong and NEHORAI Arye. Wideband Gaussian source processing using a linear nested array[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2013, 20(11): 1110-1113. doi: 10.1109/LSP.2013.2281514.
- [5] SHEN Zhibo, DONG Chunxi, DONG Yangyang, et al. Broadband DOA estimation based on nested arrays[J]. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2015, 2015(3): 1-7. doi: 10.1155/2015/974634.
- [6] SHEN Qing, LIU Wei, CUI Wei, et al. Low-complexity direction-of-arrival estimation based on wideband co-prime arrays[J]. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech and Language Processing*, 2015, 23(9): 1445-1453. doi: 10.1109/TASLP.2015.2436214.
- [7] CHI Yuejie, SCHARF L L, PEZESHKI A, et al. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(5): 2182-2196. doi: 10.1109/TSP.2011.2112650.
- [8] HE Zhenqing, SHI Zhiping, HUANG Lei, et al. Underdetermined DOA estimation for wideband signals using robust sparse covariance fitting[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(4): 435-439. doi: 10.1109/LSP.2014.2358084.
- [9] WANG Lu, ZHAO Lifan, BI Guoan, et al. Novel wideband DOA estimation based on sparse Bayesian learning with Dirichlet process priors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(2): 275-289. doi: 10.1109/TSP.2015.2481790.
- [10] PAN Yujian, TAI Ning, and YUAN Naichang. Wideband DOA estimation via sparse Bayesian learning over a Khatri-Rao dictionary[J]. *Radioengineering*, 2015, 24(2): 552-557. doi: 10.13164/re.2015.0552.
- [11] 熊坤来, 刘章孟, 柳征, 等. 基于EM算法的宽带信号DOA估计及盲分离[J]. *电子学报*, 2015, 43(10): 2028-2033. doi: 10.3969/j.issn.03722112.2015.10.022.  
XIONG Kunlai, LIU Zhangmeng, LIU Zheng, et al. Broadband DOA estimation and blind source separation based on EM algorithm[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(10): 2028-2033. doi: 10.3969/j.issn.03722112.2015.10.022.
- [12] XU Luzhou, ZHAO Kexin, LI Jian, et al. Wideband source localization using sparse learning via iterative minimization[J]. *Signal Processing*, 2013, 93(12): 3504-3514. doi: 10.1016/j.sigpro.2013.04.005.
- [13] TAN Xing, ROBERTS W, LI Jian, et al. Sparse learning via iterative minimization with application to MIMO radar imaging[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011,

- 59(3): 1088–1101. doi: 10.1109/TSP.2010.2096218.
- [14] 邓佳欣, 廖桂生, 杨志伟, 等. 基于虚拟孔径扩展的子带信息融合宽带DOA估计[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(2): 245–250. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2016.02.01.  
DENG Jiaxin, LIAO Guisheng, YANG Zhiwei, *et al.* Subband information fusion for wideband DOA estimation based on virtual array[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2016, 38(2): 245–250. doi: 10.3969/j.issn.1001-506X.2016.02.01.
- [15] QIN Si, ZHANG Y D, and AMIN M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(6): 1377–1390. doi: 10.1109/TSP.2015.2393838.
- [16] VAIDYANATHAN P P and PAL Piya. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573–586. doi: 10.1109/TSP.2010.2089682.
- [17] YANG Zai, XIE Lihua, and ZHANG Cishen. Off-Grid direction of arrival estimation using sparse Bayesian inference[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(1): 38–43. doi: 10.1109/TSP.2012.2222378.
- [18] ZHAO Yonghong, ZHANG Linrang, and GU Yabin. Array covariance matrix-based sparse Bayesian learning for off-grid direction-of-arrival estimation[J]. *Electronics Letters*, 2016, 52(5): 401–402. doi: 10.1049/el.2015.2931.
- 冯明月: 男, 1988年生, 博士生, 研究方向为电子对抗信息处理.  
何明浩: 男, 1963年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为电子对抗信息处理.  
徐 璟: 男, 1986年生, 博士, 研究方向为电子对抗信息处理.  
李少东: 男, 1987年生, 博士生, 研究方向为图像处理、ISAR成像.