

基于全相位的零相位数字滤波器的设计方法

吴国乔 王兆华

(天津大学电子信息工程学院 天津 300072)

摘要: 针对通常情况下滤波器引起的相移问题, 概述零相位数字滤波的重要意义。并在介绍传统两种零相位数字滤波器设计(FRR 和 RRF)原理和方法的基础上, 提出了一种新的零相位数字滤波器的设计原理和方法——全相位方法。通过仿真实验将传统的两种设计方法与此新设计方法给予了验证, 使数字信号处理中滤波器引起的相位失真问题得到很好的解决。说明全相位方法是一种很好的零相位数字滤波器的设计方法, 同时还克服了传统设计方法物理上无法实现的弊端。最后, 将此全相位方法与传统方法作了分析, 并介绍了全相位作为一种全新数字滤波器设计方法的应用领域。

关键词: 数字滤波; 零相位; 相位失真; 全相位

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)03-0574-04

Design Method of Digital Filter with Zero-Phase Based on All Phase

Wu Guo-qiao Wang Zhao-hua

(School of Communication, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: Aiming at the problem of phase error caused by normal filters in signal processing, this paper summarizes the important meaning of digital filtering with zero-phase error, and introduces the all phase method as a new design method of digital filter with zero-phase based on the two traditional methods, that is FRR and RRF methods. And gives the demonstrations on the simulation experiments about the three methods, solving the problem of phase error in digital signal processing. It points out that all phase method is a good method of designing zero-phase digital filter, and this method is mechanically realizable but the two tradition methods can not on analyzing and comparing the three design methods. Finally, recommends the implement fields of the all phase method as a new method of designing digital filter.

Key words: Digital filter; Zero phase; Phase error; All phase

1 引言

一个线性时不变(LTI)系统对输入信号的影响就是改变信号中每个频率分量的复振幅。利用模-相表示来看这个作用就能详细地明了这个作用的性质。以离散时间情况为例:

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})| \quad (1)$$

$$\text{Arg}(Y(e^{j\omega})) = \text{Arg}(H(e^{j\omega})) + \text{Arg}(X(e^{j\omega})) \quad (2)$$

一个LTI系统对输入傅里叶变换的作用表现在两方面, 即: 在模特性上的作用就是将其乘以系统频率响应的模(如式(1)), 为此, $H(e^{j\omega})$ 称为系统的增益; 在相位特性上的作用就是在输入相位的基础上附加了系统频率响应的相位(如式(2)), 因此, $\text{Arg}(H(e^{j\omega}))$ 称为系统的相移, 系统的相移可以改变输入信号中各分量之间的相对相位关系。在信号处理中, 为了不产生相位的失真, 通常要求滤波器具有线性相位。当滤波器具有线性相位时, 在时域上输出与输入的联系是: 输出是输入的线性移位。当滤波器是零相位时, 输出与输入将不存在移位, 即输出与输入波形形状相同, 只存在增益上

的差别, 进行归一化处理后将得到完全一样的波形。我们称此时的滤波器为零相位数字滤波器^[1]。通过本文我们可以发现, 零相位数字滤波器可以很容易地实现。

2 全相位滤波器概念

用全相位方法设计的滤波器更逼近理想特性的原因是 N 阶全相位 FIR 滤波器(apFIR)的传输特性等于 N 个子 FIR 滤波器的传输特性之和, 而原 FIR 只是其中一路(以 $N=3$ 为例传统 FIR 和全相位滤波器分别如图 1 和图 2 所示)。以 $N=5$ 阶为例, 5 个 h_n 有 5 种不同循环起点, 分别为: $[h_0 h_1 h_2 h_3 h_4]$, $[h_4 h_0 h_1 h_2 h_3]$, $[h_3 h_4 h_0 h_1 h_2]$, $[h_2 h_3 h_4 h_0 h_1]$, $[h_1 h_2 h_3 h_4 h_0]$ 。对准 h_0 , 对应的 5 个子滤波器傅里叶展开分别为:

$$H_0(\omega) = h(0) + h(1)\exp(j\omega) + h(2)\exp(2j\omega) + h(3)\exp(3j\omega) + h(4)\exp(4j\omega) \quad (3a)$$

$$H_1(\omega) = h(0) + h(1)\exp(j\omega) + h(2)\exp(2j\omega) + h(3)\exp(3j\omega) + h(4)\exp(-j\omega) \quad (3b)$$

$$H_2(\omega) = h(0) + h(1)\exp(j\omega) + h(2)\exp(2j\omega) + h(3)\exp(-2j\omega) + h(4)\exp(-j\omega) \quad (3c)$$

$$H_3(\omega) = h(0) + h(1)\exp(j\omega) + h(2)\exp(-3j\omega) + h(3) \cdot \exp(-2j\omega) + h(4)\exp(-j\omega) \quad (3d)$$

$$H_4(\omega) = h(0) + h(1)\exp(-4j\omega) + h(2)\exp(-3j\omega) + h(3) \cdot \exp(-2j\omega) + h(4)\exp(-j\omega) \quad (3e)$$

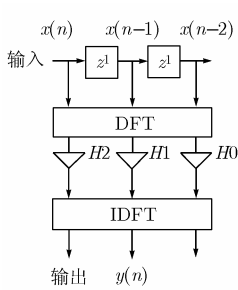


图 1 传统 FIR 滤波器

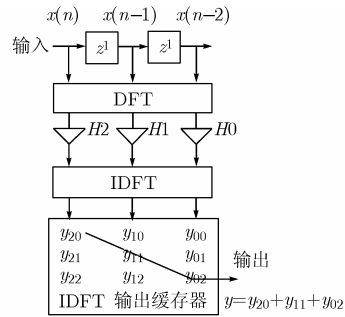


图 2 频域全相位滤波器

原传统 FIR 滤波器只用了其中的(3c)项，而全相位方法设计滤波器考虑了所有的情况，其频率响应为

$$\begin{aligned} \text{ap}H(\omega) &= \sum_{n=0}^4 H_n(\omega) \\ &= h(1)e^{-4j\omega} + 2h(2)e^{-3j\omega} + 3h(3)e^{-2j\omega} + 4h(4)e^{-j\omega} \\ &\quad + 5h(0) + 4h(1)e^{j\omega} + 3h(2)e^{2j\omega} + 2h(3)e^{3j\omega} + h(4)e^{4j\omega} \\ &= \sum_{n=-4}^4 h(n) \cdot \text{win}_{2N-1}(n) \cdot e^{-jn\omega} \end{aligned}$$

其中 $h(-n) = h(N-n)$ (其中 $N=5, n=0,1, \dots, N-1$), win_{2N-1} 为 $2N-1$ 阶的三角窗函数序列, 即 N 阶的矩形窗 win_1 与 N 阶的矩形窗 win_2 的卷积序列。此时, 称为无窗全相位滤波器^[2]。

同理, 当单个的子滤波器加窗 win_1 时, 求得的全相位滤波器表达式与上面的相同, 只是 win_{2n-1} 序列为 N 阶的 win_1 序列与 N 阶的矩形窗序列 win_2 的卷积。此时, 称为加窗全相位滤波器。

综上所述, 全相位数字滤波器的冲激响应序列为 $\text{aph}(n) = h(n)\text{win}_{2N-1}(n)$ (其中 $n = -N + 1, \dots, N - 1$), 即 N 阶的全相位滤波器等价于 $2N-1$ 阶的传统加窗 FIR 滤波器, 而窗为 N 阶对称窗 win_1 与 N 阶对称窗 win_2 卷积形成的窗, 如框图 3 所示。因为窗为卷积窗, 故其具有对称性, 下面还要利用此性质。

加窗全相位滤波器不但有较高的旁瓣衰减且基本消除了通带阻带内的波纹, 且选择不同的窗函数可以使滤波器的特性得到不同的改善, 尤其是设计频率特性有间断的滤波器, 明显降低 Gibbs 效应^[3-5]。这与利用传统方法设计滤波

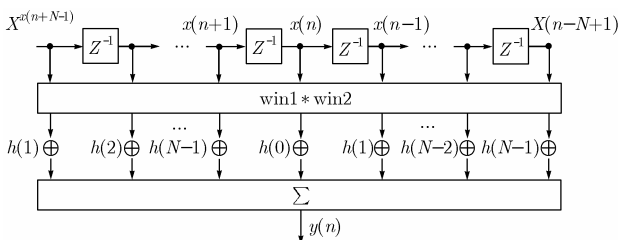


图 3 N 阶全相位滤波

器的情况是一致的, 即加窗可以改善滤波器的性能^[6]。

3 传统的零相位数字滤波方法及原理

3.1 传统零相位数字滤波器设计原理

传统的零相位数字滤波器的设计方法有两种: FRR 和 RRF。

FRR 滤波方法是: 先将输入序列按顺序滤波(forward filter), 然后将所得结果逆转后反向通过滤波器(reverse filter), 再将所得结果逆转后输出(reverse output), 即得精确零相位失真的输出序列; RRF 滤波法是: 先将输入信号序列反转后通过滤波器(reverse filter), 然后将所得结果逆转后再次通过滤波器(reverse filter), 这样所得的结果(forward output)即为精确零相位失真的输出序列。它们的滤波原理如下:

FRR, RRF 滤波的时域描述可由式(4a)-式(7a)和式(4b)-式(7b)表示:

$$y_1(n) = x(n) * h(n) \quad (4a)$$

$$x_1(n) = x(N - 1 - n) \quad (4b)$$

$$y_2(n) = y_1(N - 1 - n) \quad (5a)$$

$$y_1(n) = x_1(n) * h(n) \quad (5b)$$

$$y_3(n) = y_2(n) * h(n) \quad (6a)$$

$$y_2(n) = y_1(N - 1 - n) \quad (6b)$$

$$y(n) = y_3(N - 1 - n) \quad (7a)$$

$$y(n) = y_2(n) * h(n) \quad (7b)$$

在上面的式子中, * 代表卷积, $x(n)$ 表示输入序列, $h(n)$ 为所用数字滤波器冲激响应序列, $y(n)$ 为滤波输出序列。

FRR 和 RRF 滤波的频域描述分别为式(8a)-式(11a)和式(8b)-式(11b):

$$Y_1(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (8a)$$

$$X_1(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)}X(e^{-j\omega}) \quad (8b)$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)}Y_1(e^{-j\omega}) \quad (9a)$$

$$Y_1(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (9b)$$

$$Y_3(e^{j\omega}) = Y_2(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (10a)$$

$$Y_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)}H(e^{-j\omega}) \quad (10b)$$

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)}Y_3(e^{-j\omega}) \quad (11a)$$

$$Y(e^{j\omega}) = Y_2(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (11b)$$

由式(8a)-式(11a)和式(8b)-式(11b)均可得到

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})|H(e^{j\omega})|^2 \quad (12)$$

由式(12)可见, 输出与输入之间不存在附加相位。FRR, RRF 确实实现了精确的零相位失真滤波。

3.2 传统零相位数字滤波器的设计方法

由式(12)可得, FRR 及 RRF 零相位数字滤波器的频率响应为

$$Hv(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 \quad (13)$$

式(13)即为零相位数字滤波器的频域描述, 由此可得到零相位数字滤波器的单位冲激响应 $hv(n)$ 为

$$hv(n) = h(-n) * h(n) \tag{14}$$

所以，尽管零相位数字滤波器是理想的线性相位滤波器，但其设计方法反而更简单。知道了 $h(n)$ 后，利用时间上反转得到 $h(-n)$ ，再将 $h(n)$ 和 $h(-n)$ 进行卷积即得具有零相位性质的滤波器的单位冲激响应 $hv(n)$ 。

4 零相位数字滤波全相位实现原理及方法

4.1 全相位设计方法的原理

因为任何数字滤波器的传输函数 $H(e^{j\omega})$ 均可以表示成为下面的形式： $H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ ，其中 $H_g(\omega)$ 表示滤波器的增益， $\phi(\omega)$ 表示滤波器的相位响应。

由图 3 可以看出，全相位数字滤波器的传输函数等价于^[1-3]：

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} \text{win}_{2N-1}(n)h(e^{-jn\omega})e^{-jn\omega} \\ &= \text{win}_{2N-1}(0)h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} \text{win}_{2N-1}(n)h(n)e^{-jn\omega} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \text{win}_{2N-1}(-n)h(-n)e^{jn\omega} \end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\text{win}_{2N-1}(n)$ 为所加的卷积窗函数序列。又因为对全相位数字滤波要求：

$$\text{win}_{2N-1}(-n) = \text{win}_{2N-1}(n), \quad h(-n) = h(N-n) = h(n)$$

所以式(15)化简为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \text{win}_{2N-1}(0)h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} \text{win}_{2N-1}(n)h(n)e^{-jn\omega} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \text{win}_{2N-1}(n)h(n)e^{jn\omega} \\ &= \text{win}_{2N-1}(0)h(0) + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \text{win}_{2N-1}(n)h(n) \cos(n\omega) \\ &= H_g(\omega) \end{aligned}$$

即全相位数字滤波器具有严格的零相位特性。

4.2 全相位方法的设计方法

全相位数字滤波器设计方法，由知道了的滤波器的传输性质设计由 0, 1 组成的 N 阶的频域传输函数 H ，经过傅里叶反变换 (IFFT) 后得到时域 h ，再通过展移 h 来设计 $h1=[h(2:N), h]$ ，最后将 $h1$ 与卷积窗 win 相乘即可得到 $2N-1$ 阶的时域传输函数 $ah=h1*\text{win}$ ， ah 即为所求得的具有零相位性质的全相位数字滤波器的传输函数。用框图 4 表示如下。

下面说明 $h1$ 的由来：由于 h 是由 N 个数来组成的，将 h 中的从第 2 个数起到最后(end)的这 $N-1$ 个数拿出来，即上面所说的 $h(2:\text{end})$ ；然后再将 h 的 N 个数依次排在刚刚得到

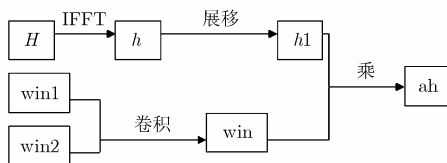


图 4 全相位法设计过程图

的 $h(2:\text{end})$ 后面，即： $[h(2:\text{end}), h]$ ，这样就组成了 $2N-1$ 个数的 $h1$ 。

5 仿真

输入信号如式(16)所示，其中采样频率 F_s 为 1024，采样点数 $M=1024$ ，滤波器 $H=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$ ，阶数 $N=9$ 。经过 FRR、RRF 和全相位方法数字滤波后，得输出与输入的相位差如图 5 所示。其中图 5(a)为经 FRR 方法滤波后输出与输入的相位差，图 5(b)为经 RRF 方法滤波后输出与输入的相位差，图 5(c)为经全相位方法滤波后输出与输入的相位差：

$$\text{in} = \sin(2\pi \cdot 20 \cdot n / F_s) \tag{16}$$

由图 5 可看出，信号经过 FRR，RRF 及全相位这 3 种零相位数字滤波方法滤波后得到的输出信号与输入信号的相位差均达到 10^{-11} 数量级，可看成是由计算机的计算误差造成的，即：3 种方法均能达到输出、输入的相位差为零。

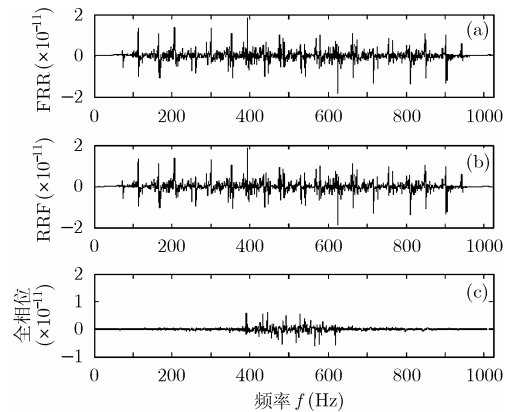


图 5 3 种方法滤波后输入输出相位差图

6 结束语

幅频特性是所有滤波器设计工作都要满足的设计要求，而附加的线性相位特性要求通常增加了设计的难度^[7]。假如提出零相位的要求，似乎是更苛刻的设计约束条件。从式(14)可看出，传统的零相位在本质上是使用两个环节来构造，其中必有一个环节为“非因果滤波器”，同样必须借助于“时间上的反转”处理。然而，时光是不能倒流的，因此从物理上这两种传统方法都是无法实现的^[1]。

全相位数字滤波器是一种新结构的滤波器系统，它可以方便地设计成具有严格零相位的 FIR 滤波器，非常适合于对相位要求极高的实际场合。另外，利用全相位数字滤波器还可以设计严格频率互补的子带滤波器。因此，全相位数字滤波器还可以在自适应信号处理、信号隐藏与检测、子带分解与编码等领域中得到应用。

参考文献

[1] 纪跃波, 秦树人, 汤宝平. 零相位数字滤波器[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 2000, 23(6): 4-7.

- [2] 王兆华, 候正信, 苏飞. 全相位数字滤波[J]. 信号处理, 2003 (增刊), 19: 1-4.
- [3] 候正信, 王兆华, 杨喜. 全相位 DFT 数字滤波器的设计和实现[J]. 电子学报, 2003, 31(4): 539-543.
- [4] 苏飞, 王兆华. DFT 域全相位数字滤波器的设计与实现[J]. 信号处理, 2004, 20(6): 231-235.
- [5] 王兆华等. 一种带窗的频域滤波器[P]. 实用型发明专利, ZL03244872.4, 2003 年公告.
- [6] 程佩青. 数字信号处理教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 1995: 334-388.
- [7] Antoniou A. Digital Filters Analysis, Design, and Applications [M]. 2nd ed New York NY: McGrawHil, 1993, chapter 3.
- 吴国乔: 女, 1979 年生, 硕士生, 研究方向为数字信号处理、数字滤波器.
- 王兆华: 男, 1937 年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为数字信号处理、图像处理、数字滤波器的设计与应用等.

中国通信学会通信理论与信号处理专业委员会 2007 年学术年会征文通知 (第一轮)

中国通信学会通信理论与信号处理专业委员会定于 2007 年 8 月下旬在秦皇岛市举行“2007 年全国通信理论和信号处理学术年会”。为加强学术交流, 会议将邀请国内外著名专家进行最新学术前沿讲座, 同时将在全国范围内(含港澳台地区)征集以下方面的论文, 经审稿录用的论文, 将由电子工业出版社正式出版。欢迎大家踊跃投稿和参加会议。会议议题暨征文内容如下:

(1) 通信理论与系统方面(Communication Theory and Systems)

信息论(Information theory)
信道编码与调制(Channel coding and Modulation)
信道估计与均衡(Channel estimation and Equalization)
干扰抵消与多用户检测(Interference suppression and Multiuser Detection)
频谱估计与建模(Spectrum Estimation & Modeling)
OFDM 技术/MIMO 技术/UWB 技术
通信安全(Communication security)
网络信息论与网络编码(Network information theory and Network coding)
光通信(Optical networking and Systems)
3G、B3G 与 4G 相关技术
下一代网络与 Internet(The Next Generation Networks and Internet)
数字家庭网络(Digital home networks)
环境网络 (Ambient/Ubiquitous Network) 及其相关研究
无线 Mesh 网络组网结构(Networking Architecture)及其相关技术研究
无线网络中的多接入研究(Multiple and wireless access techniques)
Ad hoc 与无线传感器网络的跨层设计体系结构及仿真平台研究 (Architecture and testbed of Cross-layer in networking in ad hoc and sensor networks)

(2) 信号处理与应用方面 (Signal Processing and Applications)

阵列信号处理及智能天线(Array signal processing and Smart antenna)
自适应与盲信号处理(Adaptive signal processing and Blind signal processing)
空时处理(Space-time processing)
软件无线电(Software radio)
认知无线电及环境感知(Cognitive Radio and context aware)
计算智能与信号处理(Intelligent computing application to signal processing)

语音与图象信号处理(Audio/speech processing and Video/Image processing)

雷达信号处理(Radar signal processing)
光信号处理(Optical signal processing)
网络信号处理(Signal processing for networking)
量子信号处理(Quantum signal processing)
DSP 及应用(DSP architectures and Applications)
VLSI 及应用(VLSI and Applications)
目标跟踪与信号融合
协作分集技术, 协作接入及协作组网技术(Cooperative Diversity/Access/Networking)
多无线电接入及多信道分集技术 (Multi-radio access and multi-channel diversity)

(3) 截止日期与论文要求

征文截止时间为 2007 年 5 月 15 日, 录用通知 6 月 15 日前发出。来稿必须是未曾在国内外公开发表过的文章。来稿不得涉及国家机密。来稿要有相应的英文题目、摘要、关键词和作者单位名称以及作者姓名的汉语拼音。来稿时请给出联系人的通信地址、邮编以及 E-mail 地址。每篇文章一般介绍 1~3 位作者, 包括作者的性别、出生年代、职称和目前的研究方向。来稿时请附在文章后面。论文格式请上会议网址查询。征文首页注明“2007 通信理论与信号处理年会征文”字样。请作者在规定的日期内将打印的论文激光打印稿 1 份寄送至“河北省秦皇岛市燕山大学信息科学与工程学院, 李刚”(邮编: 066004), 并同时用电子邮件将论文电子版发到 stevenlee@ysu.edu.cn。来稿无论录用与否一律不退, 作者请自留底稿。

(4) 会议联系人

(1) 燕山大学 许成谦
email: [cxqu@ysu.edu.cn](mailto:cqxu@ysu.edu.cn)
Tel: 0335-8063811
(2) 燕山大学 李刚
email: stevenlee@ysu.edu.cn
(3) 南京邮电大学 崔景伍
email: cuijw@njupt.edu.cn
Tel: 025-52997229

会议网址: <http://cs07.yisu.edu.cn>