

曲率差分驱动的极小曲面滤波器

王满利^{①②} 田子建^{*①} 张元刚^③

^①(中国矿业大学(北京)机电与信息工程学院 北京 100083)

^②(河南理工大学物理与电子信息学院 焦作 454000)

^③(兖矿集团信息化管理中心 邹城 273500)

摘要: 为提高全变分图像降噪模型的降噪性能和边缘保持性能, 该文提出一种曲率差分驱动的极小曲面滤波器。首先, 在平均曲率滤波器模型基础上, 引入自适应曲率差分边缘探测函数, 建立曲率差分驱动的极小曲面滤波器模型; 接着, 从微分几何理论角度, 阐述该能量泛函模型的物理意义和平均曲率能量减小方法; 最后, 在离散的图像域, 通过迭代的方式使图像每个像素邻域内的曲面向极小曲面迭代进化, 实现能量泛函的平均曲率能量极小化, 从而能量泛函的总能量也完成极小化。实验表明, 该滤波器不仅能去除高斯噪声、椒盐噪声, 还能去除这两类噪声构成的混合噪声, 其降噪性能和边缘保持性能优于同类型的其他5种全变分算法。

关键词: 图像降噪; 滤波器; 能量泛函; 平均曲率; 极小曲面

中图分类号: TN713; TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)03-0764-08

DOI: 10.11999/JEIT190216

Minimal Surface Filter Driven by Curvature Difference

WANG Manli^{①②} TIAN Zijian^① ZHANG Yuangang^③

^①(School of Mechanical Electronic & Information Engineering, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing 100083, China)

^②(School of Physics & Electronic Information Engineering, HeNan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)

^③(Information Center of YanKuang Group, Zoucheng 273500, China)

Abstract: To improve performance of denoising and edge preservation of the total variational image denoising model, a curvature difference driven minimal surface filter is proposed. Firstly, the presented filter model is constructed by adding an adaptive edge detection function of curvature difference to the mean curvature filter model. After that, from the perspective of differential geometry theory, the physical meaning of the energy functional model and the method of reducing the average curvature energy are elaborated. Finally, in the discrete image domain, the surface in the neighborhood of each pixel of the image is iteratively evolved to the minimal surface to minimize the average curvature energy of the energy functional, so that the total energy of the energy functional is also minimized. Experiments show that the filter can not only remove Gauss noise and salt and pepper noise, but also remove the mixed noise composed of these two kinds of noise. Its performance of noise reduction and edge preservation is better than the other five total variational algorithms of the same kind.

Key words: Image denoising; Filter; Energy functional; Mean curvature; Minimal surface

1 引言

数字图像在传输和采集过程中会受到多种噪声的污染, 图像降噪是图像处理的首要环节, 其效果

好坏直接影响后续图像处理工作的顺利开展。图像降噪的理想目标是最大限度地去除噪声, 且不引起图像细节、边缘信息的损失。经典的空域平滑降噪方法, 去除噪声时, 经常引起较大的边缘损失, 导致图像边缘模糊。

全变分降噪模型(Total Variation, TV)的出现, 开辟了一条兼顾降噪和图像边缘保持的新途径^[1]。TV模型是基于能量泛函极小化的降噪方法, 该模

收稿日期: 2019-04-04; 改回日期: 2019-10-26; 网络出版: 2019-11-11

*通信作者: 田子建 tianzj0726@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(51674269)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (51674269)

型使用图像梯度的L1范数取代了偏微分方程(Partial Differential Equation, PDE)降噪模型的L2范数的光滑性约束, L1范数约束允许阶跃信号存在, 使模型具有更好的边缘保持性能。初期TV模型降噪算法, 容易引起阶梯效应(staircase effect), 为克服该缺点, 涌现出了众多的改进措施。

TV模型的改进措施分为3类, 一类是增加能量泛函约束条件, 即将TV模型和其他降噪算法联合^[2-4], 弥补其不足; 另一类是模型求解方法优化^[5-10], 提高降噪效率; 还有一类是替换梯度L1范数正则项, 譬如, 以主曲率、高斯曲率, 平均曲率等作为变分模型正则项^[11-15], 其中, 文献^[14,15]指出以曲率(高斯曲率和平均曲率)为正则项的变分模型, 迭代求解过程中, 正则项能量减少占主导地位, 且曲率作为正则项, 能量泛函具有“凸”性质, 有唯一最优解。因此, 无论求解过程如何不同, 能量泛函总能收敛到最优解。依据该原理, 文献作者提出了由微分几何实现曲率能量减少的算法, 该算法仅监测计算正则项曲率能量下降变化, 而非求解泛函总能量, 即实现了能量泛函极小化的快速求解, 使用此算法设计的平均曲率滤波器(Mean Curvature Filter, MCF)表现出了良好的降噪性能。

深入研究MCF发现, MCF对整幅图像采用相同迭代系数与规则, 未区分图像局部区域特征(边缘或平坦区)。为提高MCF降噪性能和图像边缘保持性能, 本文将采用与文献^[14,15]不同的微分几何方法, 实现正则项能量减小, 并引入边缘检测算子, 实现具有区分图像边缘和平滑区域的自适应平均曲率滤波器—曲率差分驱动的极小曲面滤波器(Minimal Surface Filter, MSF)。

2 极小曲面滤波器模型与实现

2.1 极小曲面滤波器模型

在MCF的平均曲率正则项中引入曲率差分函数 $\Phi(\nabla K)$, 作为边缘检测算子, 区分平滑区与边缘区域, 使平滑区平均曲率能量快速减小, 边缘区域减缓其速度, 提高滤波器的边缘保持能。极小曲面滤波器模型表达式, 如式(1)所示。

$$E(u) = \int_{\Omega} \|u - f\|_2^2 dx dy + \int_{\Omega} \Phi(\nabla K) |H(u)| dx dy \quad (1)$$

式(1)中, f 是原图像, u 是目标图像, $\int_{\Omega} \|u - f\|_2^2 dx dy$ 是保真项, $\int_{\Omega} \Phi(\nabla K) |H(u)| dx dy$ 是平均曲率正则项。其中, $H(u)$ 表示图像的平均曲率, ∇K 表示图像的曲率差分, 作为区域特征探测器, $\Phi(\nabla K)$

是关于图像曲率差分 ∇K 的非负函数, 根据图像区域特征, 自适应调节正则项系数, 平衡正则项和保真项, $H(u), \nabla K, \Phi(\nabla K)$ 的显式表达下节给出。

2.2 模型的微分几何实现

综合文献^[14,15]的降噪原理和文献^[16,17]的曲率差分边缘探测器, 简化式(1)为式(2), 即式(1)的平均曲率正则项能量取得极小值时, 保真项能量小于 ε , 此时式(1)能量泛函近似取得极值。

在 X - Y 坐标系下, $u(x, y) : R^2 \rightarrow R$ 表示一幅灰度图像, 将 $(x, y, u(x, y))$ 视为 R^3 空间中 $F(x, y, u(x, y))=0$ 曲面上的点, 则像素点的邻域可表述为空间曲面。由微分几何知, 减小平均曲率直至平均曲率趋向于零, 该过程近似于 $u_{i,j}$ 的小邻域形成的空间曲面 $S_{i,j}$ 向极小曲面 S_{\min} 演变, 迭代更新 $u_{i,j}$, 最终 $S_{i,j}$ 近似为极小曲面 S_{\min} , 上述演变过程, 即是 $S_{i,j}$ 的平均曲率 H 趋向于0值的过程。平均曲率减小, 使得 $\int_{\Omega} \|u - f\|_2^2 dx dy < \varepsilon$ 成立, 此时, 式(1)能量泛函近似取得极值。平均曲率能量趋于0, 即平均曲率 H 满足式(3)。

$$\begin{aligned} \min_{u \in L^2} & \left\{ E(u) = \int_{\Omega} \Phi(\nabla K) |H(u)| dx dy \right\}, \\ \text{s.t.} & \int_{\Omega} \|u - f\|_2^2 dx dy < \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} \\ &= \frac{(1+u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1+u_y^2)u_{yy}}{2(1+u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中, E, F, G 为曲面的第1基本量, L, M, N 为曲面的第2基本量。由于 $1 + u_x^2 + u_y^2 > 1$, 式(3)成立等价于式(4)。

$$(1 + u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{yy} \rightarrow 0 \quad (4)$$

若式(5)成立, 则式(4)一定成立, 式(5)中 C_1, C_2 为常数, 最终点 $u_{i,j}$ 小邻域形成的曲面方程 $v(x, y)$ 为 x, y 的线性函数, 从而得出式(6)。

$$\begin{cases} u_x = C_1 \\ u_y = C_2 \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad (5)$$

$$v(x, y) = ax + by + c \quad (6)$$

式(6)中, a, b, c 为常数且不同时为0, 令 $z = v(x, y)$, 则式(6)变为式(7), 在欧几里得空间式(7)表示平面方程。该结论与Bernstein定理描述一致, 既 \mathbb{R}^3 (Euclidean space)空间中, 曲面 M 参数形式若为 $(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y)$ 为 \mathbb{R}^2 上的 C^2 函数, M 为极小曲面, 则它必为平面。平面方程是 x, y 的线性函数, 具有“凸”性质, 满足文

献[14,15]简化模型的应用条件,表明对式(1)简化求解合理。

$$ax + by - z + c = 0 \quad (7)$$

因此, $S_{i,j}$ 向 S_{\min} 趋近,也就是 $S_{i,j}$ 在 \mathbb{R}^3 空间中向平面演变。若 u 的1阶、2阶导数都趋向0值,式(4)将成立。因此式(2)平均曲率能量趋向0值,可以近似为式(8)能量趋近于0。

$$\left| \tilde{H}(u) \right| = |u_{xx}| + |u_{xy}| + |u_{yx}| + |u_{yy}| \rightarrow 0 \quad (8)$$

计算式(2),必须已知 $\Phi(\nabla K)$ 的显式表达式,文献[16,17]中的曲率差分 ∇K 定义,如式(9)所示

$$\left. \begin{aligned} \nabla K_{i,j} &= ||u_{\eta\eta}| - |u_{\xi\xi}| \\ u_{\xi\xi} &= \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \\ u_{\eta\eta} &= \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)中, $\nabla K_{i,j}$ 表示点 $u_{i,j}$ 的曲率差分绝对值, $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ 表示 $u_{i,j}$ 的水平方向与垂直方向的1阶、2阶差商,由文献[16,17]知,边缘区域 $|u_{\eta\eta}| \gg |u_{\xi\xi}|$,非边缘区域 $|u_{\eta\eta}| \approx |u_{\xi\xi}|$,因此,边缘区域的 $\nabla K_{i,j}$ 大于非边缘区域的 $\nabla K_{i,j}$ 。以 $\nabla K_{i,j}$ 为变量构造的 $\Phi(\nabla K_{i,j})$,如式(10)所示。 $\Phi(\nabla K_{i,j})$ 根据 $\nabla K_{i,j}$ 自适应的调整 $S_{i,j}$ 向 S_{\min} 进化速度,不改变其进化方向,其取值范围为 $[1/e, 1]$ 。

$$\Phi(\nabla K_{i,j}) = \exp\left(-\frac{\nabla K_{i,j}}{\max_{p \in m, q \in n} \nabla K_{p,q}}\right) \quad (10)$$

其中, m, n 表示图像域 Ω 的大小, $\max_{p \in m, q \in n} \nabla K_{p,q}$ 表示在图像域内曲率差分的最大值。

2.3 滤波器的数值实现

MSF借鉴文献[14,15]采用的微分几何方法实现滤波器的思想,使 $u_{i,j}$ 邻域形成的 $S_{i,j}$ 曲面向极小曲面进化,本文以 $u_{i,j}$ 为中心的 3×3 邻域,作为形成曲面 $S_{i,j}$ 的邻域,下面阐述 $S_{i,j}$ 向 S_{\min} 进化的数值实现过程。

为解除 $u_{i,j}$ 与其邻域元素的相关性,将图像域 Ω 分解为4个互不相交的子域($\Omega = \cup \Omega_m, m = 1, 2, 3, 4$),分别记为, $\Omega_{W_S}, \Omega_{B_S}, \Omega_{B_C}, \Omega_{W_C}$,如图1所示。另外,分解的子域也能交替更新,加速迭代过程。

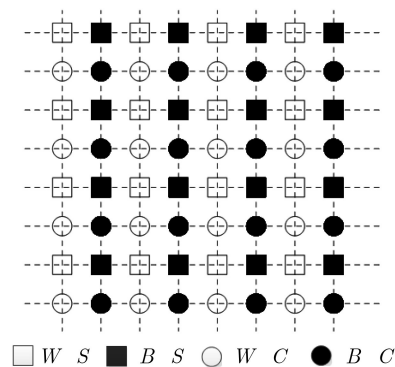


图1 图像域 Ω 分解方法

以 Ω_{W_C} 中的 $u_{i,j}$ 为例,其 3×3 邻域内,任取3个不共线的点构成一个三角形平面, $u_{i,j}$ 的灰度值向距离自己最近的平面移动,即可实现 $S_{i,j}$ 向 S_{\min} 的进化。该进化需要3个步骤:步骤1,确定 3×3 邻域内所有三角形平面;步骤2,计算 $u_{i,j}$ 到所有平面的距离,并找出最小的有向距离;步骤3,更新 $u_{i,j}$ 的灰度值。

在 $u_{i,j}$ 的 3×3 邻域内任取3个点,共56种组合,对应10种连接关系,如图2所示。图2中,白色圆点代表 $u_{i,j}$ 位置,蓝色点表示形成三角形平面的3个点,黑色线表示连接关系,图2(j)红色点表示不能构成平面的组合关系,共有4种。图2(a), 2(b), 2(e), 2(h), 2(i)连接关系能形成4个三角形平面,图2(c), 2(d), 2(f), 2(g)能形成8个三角形平面。根据三角形与 $u_{i,j}$ 的空间位置关系,计算 $u_{i,j}$ 到这些平面的有向距离 $d_k, k = 1, 2, \dots, 52$ (d_k 有正负),根据 $\min |d_k|$ 确定 $u_{i,j}$ 灰度值进化的目标平面。

利用 $u_{i,j}$ 对应灰度值到三角形质心点的向量近似 d_k ,如图3所示。 $u_{i,j}$ 对应灰度值向 XOY 平面投

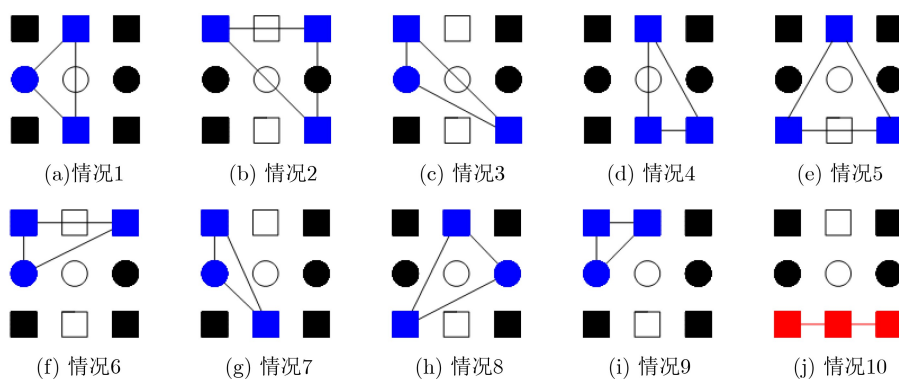
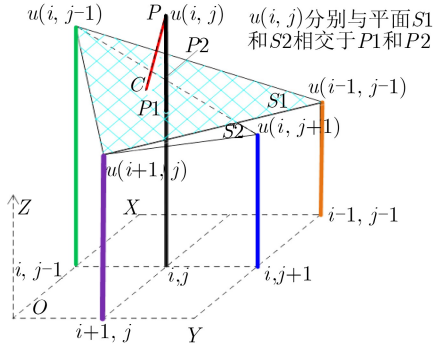


图2 $u_{i,j}$ 邻域内3点的组合关系

图3 d_k 的近似求解方法

影与 $u_{i,j-1}$, $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j-1}$ 对应灰度值的三角形 $S1$ 相交于 $P1$ 点, 与 $u_{i,j-1}$, $u_{i,j+1}$, $u_{i+1,j}$ 对应灰度值的三角形 $S2$ 相较于 $P2$ 点, C 为 $S1$ 的质心点, 点 P 表示在 R^3 空间中点 $u_{i,j}$ 的灰度值对应点。

图3中 $u_{i,j}$ 灰度值向 XOY 平面的投影不在三角形某条边上时, 用 $S1$ 质心到 P 点的距离 PC (图3中红色线)表示 $|d_k|$, 出现与平面 $S2$ 相交的情形时, 用 $u_{i,j-1}$, $u_{i,j+1}$ 对应灰度值中点到 P 的距离表示 $|d_k|$ 。

空间两点距离公式如式(11)所示, 式(11)中的 $(x_1 - x_2)^2$ 和 $(y_1 - y_2)^2$ 和的值为0或1, 相比三角形的质心点的灰度值与 $u(i, j)$ ($u(i, j)$ 表示 $u_{i,j}$ 对应 XYZ 坐标系下的灰度值)的差值的平方, 可以忽略不计, 所以 $|d_k|$ 进一步简化为式(12)或式(13)。 $|d_{k(S1)}|$, $|d_{k(S2)}|$ 是区分计算 d_k 不同算式的符号。当计算 P 到图2(a), 2(b), 2(c), 2(d) 4种三角形面的距离时, 用式(13), 其他用式(12)。假如不区分图像边缘与平滑区, 得到式(14)的 $u(i, j)$ 迭代更新式, 其中 L 表示迭代次数, D_m 表示 $\min |d_k|$ 对应的向量 d_k 。

$$d_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (11)$$

$$|d_k| = |d_{k(S1)}| = |(u(i_1, j_1) + u(i_2, j_2) + u(i_3, j_3))/3 - u(i, j)| \quad (12)$$

$$|d_k| = |d_{k(S2)}| = |(u(i_1, j_1) + u(i_2, j_2))/2 - u(i, j)| \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} |D_m| &= \min |d_k| = \min(|d_{k(S1)}|, |d_{k(S2)}|) \\ u(i, j)^{L+1} &= u(i, j)^L + D_m \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(14)未区分边缘和平滑区域, 将边缘探测器引入式(14)的第2式, 减缓边缘区域进化速度, 保护图像边缘。式(14)与式(10)结合, 得出区分图像区域特征的自适应迭代式(15)

$$\left. \begin{aligned} |D_m| &= \min |d_k| = \min(|d_{k(S1)}|, |d_{k(S2)}|) \\ u(i, j)^{L+1} &= u(i, j)^L + \Phi(\nabla K_{i,j}) \cdot D_m \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式(15)实现了式(2)极值求解的1次迭代, 完整的迭代过程还需要恰当的迭代终止条件。

文献[14,15]定义的迭代中止条件为平均曲率正则项能量不再减少, 试验发现该终止条件不理想, 算法经常达到迭代极限次数终止迭代。统计发现迭代初期式(8)能量快速减少, 迭代后期能量减小缓慢, 据此, 本文定义“相对能量下降差商比”作为迭代终止条件, 其定义如式(16)。

$$\begin{aligned} ER^{L+1} &= \left| \frac{E(u^L) - E(u^{L+1})}{E(u^{L+1})} \right| \\ &< \varepsilon_E \frac{E(u^1) - E(u^2)}{E(u^2)} = \varepsilon_E \cdot ER^2 \quad (16) \end{aligned}$$

式(16)中, ER 为相对能量下降比, L 为迭代次数, $E(u^L)$ 为 L 次迭代的近似曲率能量, ε_E 为迭代停止的相对能量差商下降比的停止迭代算法的设定值。图像噪声水平越高, 需要迭代次数越多, 所需的 ε_E 应该越小, 依据该原则, ε_E 必须是关于噪声水平的减函数, 又依据能量统计数据, 构造式(17)确定 ε_E 。

$$\varepsilon_E = \exp\{- (2 + \hat{\sigma}^2/10)\} \quad (17)$$

式(17)中, $\hat{\sigma}^2$ 为噪声方差估计值, 使用文献[18]的小波噪声估计经验公式(18)得出, 本文使用Symlets小波系的Sym4小波对噪声图像做单尺度分解, 以对角小波系数 W_{d1} 的中位数估计噪声标准方差 $\hat{\sigma}^2$ 。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{med}(|W_{d1}|)}{0.6745} \quad (18)$$

式(18)中, $\text{med}(\cdot)$ 表示取中位数运算, W_{d1} 为对角小波系数, $|\cdot|$ 表示取绝对值运算。

$u_{i,j}$ 的 3×3 邻域的52个可选择三角形中, 图2(a), 2(b), 2(c)和2(d) 4种连接构成的24个三角形, 按式(13)计算 $|d_{k(S2)}|$, 由式(13)知, 24个三角形的 $|d_{k(S2)}|$ 仅有4种取值。其他28个三角形按式(12)计算 $|d_{k(S1)}|$, 找出 $\min |d_k|$ 对应的 d_k , 按式(15)迭代更新 $u(i, j)$, 算法伪代码如下:

MSF算法伪代码:

计算 $\Phi(\nabla K_{i,j})$

子域: $u(i, j) \in \Omega_{W-C}$

子程序1: 计算 $d_k, k = 1, 2, \dots, 32$

找出满足: $|D_m| = \min |d_k|, k = 1, 2, \dots, 32$ 的 D_m

更新 $u(i, j) = u(i, j) + \Phi(\nabla K_{i,j}) \cdot D_m$

子域: $u(i, j) \in \Omega_{W-S}$

调用: 子程序1

子域: $u(i, j) \in \Omega_{B-C}$

调用: 子程序1

子域: $u(i, j) \in \Omega_{B-S}$

调用: 子程序1

输出: $u(i, j) \in \Omega$

3 数值实验

为客观评价MSF降噪效果,使用峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)、基于里斯变换(Riesz transform)的图像特征相似度指标(Riesz transform based Feature SIMilarity, RFSIM)作为降噪图像质量评价指标,引入曲率分布熵(Curvature Distribution Entropy, CDE)作为边缘保持性能的评价指标。曲面复杂度不同,其曲率的大小分布也不同,曲面越复杂,曲率大小及分布越复杂,其包含的信息量就越多,同一图像滤波后,相同的PSNR条件下,曲率分布及变化越复杂,表明算法的边缘细节的保持性能越好。曲率分布熵的定义如式(19)

$$\left. \begin{aligned} p_t &= - \sum_{i=0}^{l-1} p_i \ln p_i \\ p_i &= \frac{N(i)}{\sum_{i=0}^{l-1} N(i)} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

为验证MSF的降噪效果,在Matlab R2014b环境实现本文算法,并开展如下3类实验:

(1) 检验滤波器迭代停止条件(相对能量差商下降比)和该停止条件下的降噪效果;

(2) 使用MSF和MCF对高斯噪声或椒盐噪声图像测试集降噪,相同迭代次数下,从定量数据和视觉两方面,对比两滤波器的降噪性能与边缘保持性能;

(3) 分别使用MSF, MCF, TVL1(TV-L1 variational denoising model using primal-dual optimi-

zation Algorithm), ITV(split Bregman Isotropic Total Variation denoising), ATV(split Bregman Anisotropic Total Variation denoising), TV(Total Variation denoising model using fixed point iteration)对不同噪声图像降噪,由数据定量分析几种算法的降噪性能。

实验1 以Peppers, Lena的高斯噪声图像为测试图像,0均值高斯噪声的方差分别为5, 10, 15。MSF的能量下降曲线,如图4所示。

图4中,图例的数字代表噪声方差。由图4知,算法迭代初期能量下降迅速,随着迭代次数增加,能量下降逐渐减缓趋于平稳,条件满足终止迭代,由横坐标和图例知,特征细节不同的图像迭代次数略有不同,同一图像噪声越大,算法迭代次数越多,MSF的迭代次数随着噪声的增加而增加。由此可见,MSF的终止条件有效。

为验证MSF迭代终止后的降噪效果,使用MSF和MCF分别对方差为15的高斯噪声图像Key-

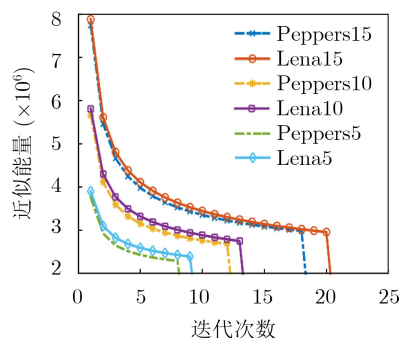
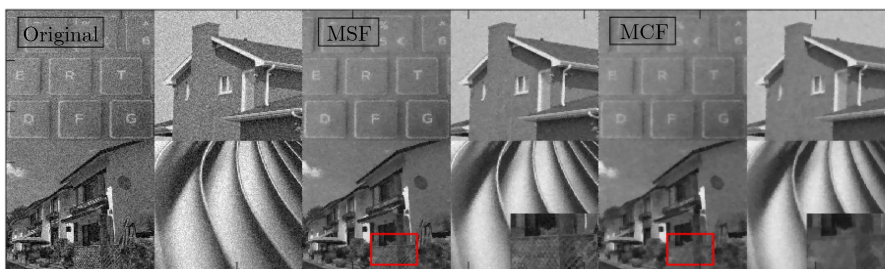
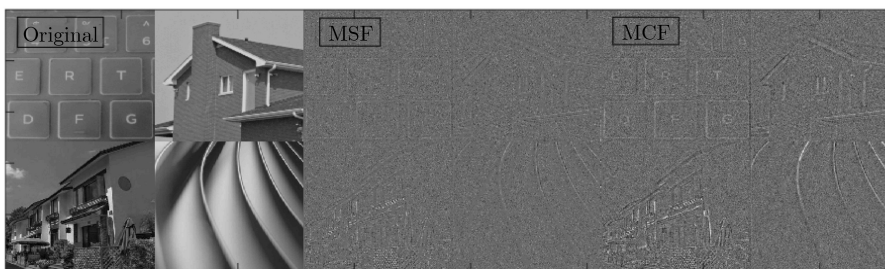


图4 MSF滤波器能量变化曲线



(a) 两滤波器去除高斯噪声的结果



(b) 高斯噪声降噪的差分图像

图5 MCF和MSF的降噪比较

board, House, Villa和Curve降噪, 其降噪结果, 如图5所示。实验中, 由于MCF停止条件无效, 将其迭代次数设置为图4中MSF的最大迭代次数21。图5(a)中左图为噪声图像, 中间为MSF降噪图像, 右图为MCF降噪图像; 图5(b)左图为无噪声图像, 其它对应噪声图像与MSF, MCF降噪图像的差分图像。由图5(a)知, MSF降噪图像的键盘字母、房屋和曲线图较MCF降噪图像清晰, MSF降噪图像的

栅栏局部放大图的网格清晰可见。由图5(b)的差分图像知, MCF降噪损失的边缘、细节大于MSF。因此可知, MSF的终止条件有效, 且其降噪效果优于MCF。

实验2 在相同迭代次数下, MSF和MCF分别对高斯噪声或椒盐噪声测试图像降噪, 检验MSF的降噪性能和边缘保持性能, 降噪图像的PSNR, CDE和RFSIM, 如表1所示。

表1 降噪图像的评价指标数据

| 噪声类型 | 图像 | 滤波器 | 噪声方差/噪声密度 | 迭代次数 | PSNR.N | PSNR.D | CDE | RFSIM | | |
|------|---------|------|-----------|------|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|
| 高斯噪声 | Lena | MSF | 10 | 10 | 28.1111 | 32.5290 | 12.3499 | 0.6873 | | |
| | | | 20 | 20 | 22.1472 | 28.8819 | 12.3575 | 0.5065 | | |
| | | MCF | 10 | 10 | 28.1111 | 31.2486 | 12.3128 | 0.6063 | | |
| | | | 20 | 20 | 22.1472 | 28.7087 | 12.3020 | 0.4644 | | |
| | | 高斯噪声 | House | MSF | 5 | 7 | 34.1560 | 35.9549 | 11.0543 | 0.6838 |
| | | | | | 10 | 10 | 28.1072 | 32.4532 | 11.0582 | 0.5043 |
| 20 | 20 | | | | 22.1129 | 28.5565 | 11.0600 | 0.3117 | | |
| MCF | 5 | | | 7 | 34.1560 | 33.1901 | 11.0436 | 0.5879 | | |
| | 10 | | | 10 | 28.1072 | 31.1816 | 11.0491 | 0.4750 | | |
| | 20 | | | 20 | 22.1129 | 28.3753 | 11.0487 | 0.3315 | | |
| 椒盐噪声 | peppers | MSF | 0.05 | 4 | 18.2659 | 34.3401 | 12.3245 | 0.8842 | | |
| | | | 0.10 | 9 | 15.3176 | 32.0921 | 12.3229 | 0.8271 | | |
| | | MCF | 0.05 | 4 | 18.2659 | 30.1227 | 12.3089 | 0.7940 | | |
| | | | 0.10 | 9 | 15.3176 | 30.5087 | 12.2877 | 0.7083 | | |

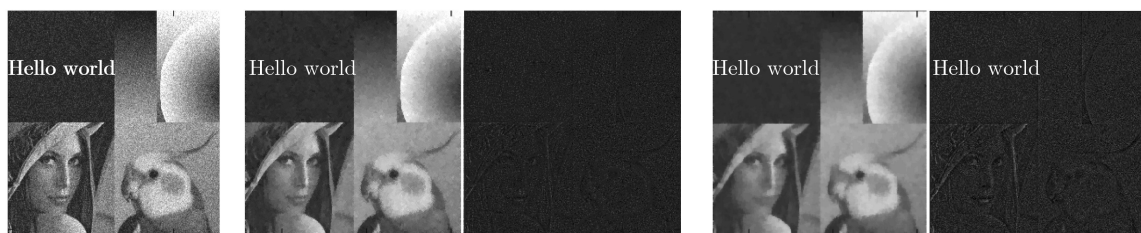
表1中PSNR.N表示噪声图像的PSNR, PSNR.D表示降噪图像PSNR, CDE表示降噪图像的曲率分布熵, RFSIM表示图像特征相似度。表1中加粗字表示比较的优值。

由表1知, MSF和MCF都具有去除高斯噪声和椒盐噪声能力。噪声和迭代次数相同情况下, 表1中, 除方差为20的高斯噪声House测试数据外, MSF降噪图像的指标都优于MCF。MSF降噪图像的PSNR较大情况下, 其CDE和RFSIM也优于MCF, 表明MSF的降噪性能和边缘保持性优势优于MCF。

表1中, 方差为20的高斯噪声House测试数据

中, MCF的RFSIM指标优于MSF, 而PSNR和CDE指标仍然低于MSF。究其原因, 随着噪声密度增加, MSF算法减缓了House含噪声墙面的弱纹理降噪过程, 导致MCF降噪图像RFSIM指标出现反超。由综合统计分析知, MSF降噪算法的边缘保持性能与提高峰值信噪比的能力优于MCF。

为视觉比较两滤波器降噪性能, 分别对高斯噪声图像(Montage)降噪, 迭代30次的降噪结果, 如图6所示。图6(a)为噪声图像(噪声方差为20), 图6(b)和6(c)分别为MSF和MCF降噪结果。图6(b)和6(c)中, 左侧为降噪图像, 右侧为噪声图像与降噪图像的差值图像。对比图6(b)和6(c), 图6(c)中



(a) 噪声图像

(b) MSF降噪图像和差分图像

(c) MCF降噪图像和差分图像

图6 相同迭代次数下两滤波器降噪结果对比

降噪图像模糊较为严重,“Hello world”损失较大,差分图中边缘细节损失较多,而图6(b)则相反。由图6(b)中降噪图像“Hello world”的边缘与Lena的面部边缘对比以及相应的差分图像对比知,MSF保存强边缘的性能优于平滑区的弱边缘,究其原因,平滑区噪声与弱边缘区分度较低,导致MSF的边缘探测器不能很好区分。总体视觉分析MSF的降噪性能和边缘保持性能优于MCF。

实验3 使用MSF, MCF, ITV, ATV, TVL1和TV滤波器对方差为10的Lena高斯噪声图像降噪, MCF因其终止条件实验中无效, 设置为MSF迭代次数。6种算法降噪图像的评价数据、运行时间和迭代次数, 如图7所示。由图7(a)知, 降噪图像的PSNR比较中, MSF最大, 次之为TV, 再次为ITV, MCF最小; 由图7(b)知, 降噪图像的CDE比较中, MSF最大, 次之为TVL1, 再次为MCF, 最小为ATV; 由图7(c)知, 降噪图像的RFSIM比较中, MSF最大, 次之为TV与TVL1, 最小为ATV。由图7(d)知, MSF的降噪耗时小于TVL1, TV, ITV, ATV, 迭代次数13次大于ITV的11次, 运行耗时排在第2位。平均单次迭代耗时ITV>ATV>MSF>TV>TVL1>MCF, MSF平均单次迭代耗时0.091 s比MCF, TV和TVL1长, 使用过程中可以通过并行

计算加速MSF的执行速度, 以满足降噪需求。由图像指标数据比较可知, MSF降噪图像的PSNR, CDE和RFSIM指标优于其他5种算法, 表明实验中MSF提高图像的峰值信噪比和边缘保持性能优于其他5种算法, 降噪耗时介于几种算法之间。

MSF对Peppers不同浓度的混合噪声图像降噪, 降噪结果对比如图8所示, 图8中“数值1+数值2”表示不同浓度的混合噪声, “数值1”表示高斯噪声的方差, “数值2”表示椒盐噪声密度。图8中, 不同浓度的混合噪声降噪图像都比较清晰, 无明显差别, 表明MSF去除不同浓度混合噪声的性能稳定可靠。

4 结论

根据数值实验可知, 本文使用 \mathbb{R}^3 空间中像素点邻域内形成的曲面向极小曲面进化的方法, 有效地实现了极小曲面滤波器的平均曲率能量的下降; 曲率差分边缘探测器, 能够有效地区分图像的边缘与平滑区, 实现滤波器进化规则差异化, 提高极小曲面滤波器的边缘保持性能。极小曲面滤波器的能量泛函的微分几何近似解法, 避免了泛函总能量的求解, 提高了滤波器的执行效率。文中设计的MSF滤波器较MCF以及其他同类TV模型滤波器, 具有更

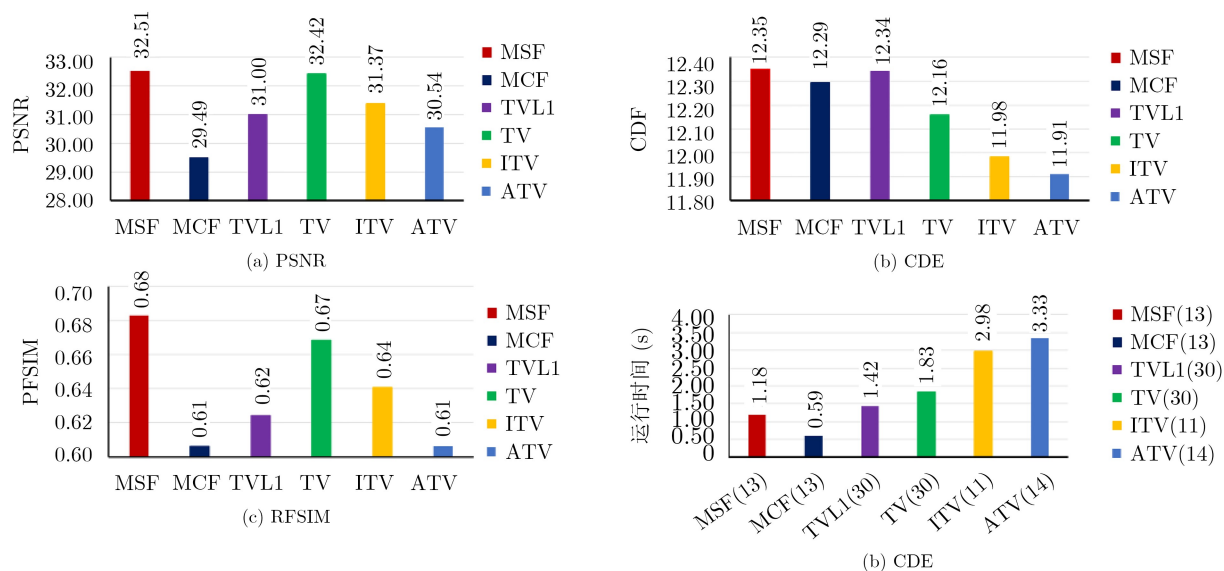


图7 6种算法的降噪图像评价指标和运行时间比较

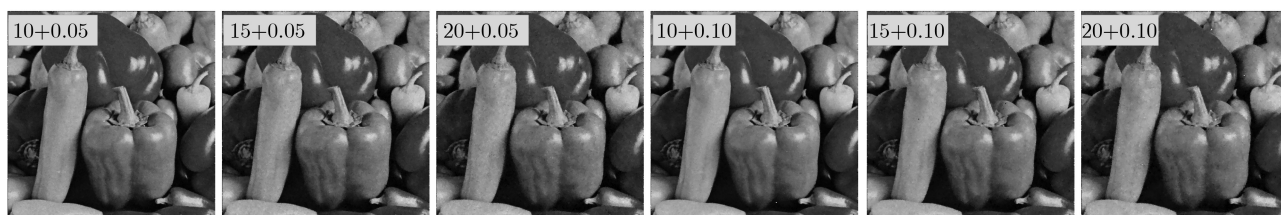


图8 MSF去除混合噪声的降噪图像对比

好地边缘保持性能和更广泛的适应性, 不仅能去除高斯噪声、椒盐噪声, 还能去除高斯噪声和椒盐噪声构成的复合噪声, 且有效避免了TV模型出现的阶梯效益。

参 考 文 献

- [1] RUDIN L I, OSHER S, and FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(1/4): 259–268. doi: [10.1016/0167-2789\(92\)90242-F](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F).
 - [2] DING Meng, HUANG Tingzhu, WANG Si, et al. Total variation with overlapping group sparsity for deblurring images under Cauchy noise[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 341: 128–147. doi: [10.1016/j.amc.2018.08.014](https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.08.014).
 - [3] SHEN Zhengwei and CHENG Lishuang. Convex composite wavelet frame and total variation-based image deblurring using nonconvex penalty functions[J]. *Journal of Electronic Imaging*, 2017, 26(5): 053005. doi: [10.1117/1.JEI.26.5.053005](https://doi.org/10.1117/1.JEI.26.5.053005).
 - [4] 郭从洲, 秦志远, 时文俊. 基于能量泛函和视觉特性的全变分图像降噪模型[J]. *中国图象图形学报*, 2014, 19(9): 1282–1287. doi: [10.11834/jig.20140904](https://doi.org/10.11834/jig.20140904).
GUO Congzhou, QIN Zhiyuan, and SHI Wenjun. TV image denoising model based on energy functionals and HVS[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2014, 19(9): 1282–1287. doi: [10.11834/jig.20140904](https://doi.org/10.11834/jig.20140904).
 - [5] LIU Zexian, LIU Hongwei, and WANG Xiping. Accelerated augmented Lagrangian method for total variation minimization[J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2019, 38(2): 50–64. doi: [10.1007/s40314-019-0787-7](https://doi.org/10.1007/s40314-019-0787-7).
 - [6] GAO Tianling, WANG Xiaofei, LIU Qiang, et al. A fixed-point algorithm for second-order total variation models in image denoising[J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2019, 38(1): 8–22. doi: [10.1007/s40314-019-0763-2](https://doi.org/10.1007/s40314-019-0763-2).
 - [7] ZOU Jian, SHEN Marui, ZHANG Ya, et al. Total variation denoising with non-convex regularizers[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 4422–4431. doi: [10.1109/ACCESS.2018.2888944](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2888944).
 - [8] BEN SAID A, HADJIDJ R, and FOUFOU S. Total variation for image denoising based on a novel smart edge detector: An application to medical images[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2019, 61(1): 106–121. doi: [10.1007/s10851-018-0829-6](https://doi.org/10.1007/s10851-018-0829-6).
 - [9] LI Mingqiang, HAN Congying, WANG Ruxin, et al. Shrinking gradient descent algorithms for total variation regularized image denoising[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2017, 68(3): 643–660. doi: [10.1007/s10589-017-9931-8](https://doi.org/10.1007/s10589-017-9931-8).
 - [10] 王宇, 汤心溢, 罗易雪, 等. 自适应Split Bregman迭代的红外图像降噪算法[J]. *红外与毫米波学报*, 2014, 33(5): 546–551. doi: [10.3724/SP.J.1010.2014.00546](https://doi.org/10.3724/SP.J.1010.2014.00546).
WANG Yu, TANG Xinyi, LUO Yixue, et al. IR image denoising algorithm based on adaptive split bregman method[J]. *Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2014, 33(5): 546–551. doi: [10.3724/SP.J.1010.2014.00546](https://doi.org/10.3724/SP.J.1010.2014.00546).
 - [11] FIRSOV D and LUI S H. Domain decomposition methods in image denoising using Gaussian curvature[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, 193(2): 460–473. doi: [10.1016/j.cam.2005.05.032](https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.05.032).
 - [12] JIDESH P and GEORGE S. Gauss curvature-driven image inpainting for image reconstruction[J]. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 2014, 37(1): 122–133. doi: [10.1080/02533839.2012.751332](https://doi.org/10.1080/02533839.2012.751332).
 - [13] ZHU Wei and CHAN T. Image denoising using mean curvature of image surface[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2012, 5(1): 1–32. doi: [10.1137/110822268](https://doi.org/10.1137/110822268).
 - [14] GONG Yuanhao. Spectrally regularized surfaces[D]. [Ph.D dissertation], ETH-Zürich, 2015: 127–165. doi: [10.3929/ethz-a-010438292](https://doi.org/10.3929/ethz-a-010438292).
 - [15] GONG Yuanhao and SBALZARINI I F. Curvature filters efficiently reduce certain variational energies[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2017, 26(4): 1786–1798. doi: [10.1109/tip.2017.2658954](https://doi.org/10.1109/tip.2017.2658954).
 - [16] BAI Yunjiao, ZHANG Quan, HONG Shangguan, et al. Patch similarity modulus and difference curvature based fourth-order partial differential equation for image denoising[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015: 636295. doi: [10.1155/2015/636295](https://doi.org/10.1155/2015/636295).
 - [17] YIN Xuehui and ZHOU Shangbo. Image structure-preserving denoising based on difference curvature driven fractional nonlinear diffusion[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015: 930984. doi: [10.1155/2015/930984](https://doi.org/10.1155/2015/930984).
 - [18] DONOHO D L and JOHNSTONE J M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage[J]. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425–455. doi: [10.1093/biomet/81.3.425](https://doi.org/10.1093/biomet/81.3.425).
- 王满利: 男, 1981年生, 博士生, 研究方向为信息与通信工程。
田子建: 男, 1964年生, 教授, 研究方向为信息与通信工程。