

编码协作系统准循环重复累积码的联合设计与性能分析

张顺外* 付勇峰

(南京邮电大学通信与信息工程学院 南京 210003)

摘要: 重复累积(RA)码是一种特殊结构的低密度奇偶校验(LDPC)码, 不仅具有LDPC码的优点, 还能实现差分编码。针对LDPC编码协作系统编码复杂度高、时延长的问题, 该文引入准循环RA(QC-RA)码, 推导出信源节点和中继节点采用的QC-RA码对应的联合校验矩阵, 基于公差构造方法设计该联合校验矩阵, 并证明该方法设计的联合校验矩阵不存在围长为 $girth-4$, $girth-6$ 的短环。理论分析和仿真结果表明, 同等条件下该系统比相应点对点系统具有更优异的误码率性能。仿真结果同时表明, 与采用一般构造QC-RA码或基于Z型构造QC-RA码相比, 采用基于公差构造的联合设计QC-RA码的多信源多中继协作均可获得更高的编码增益。

关键词: 准循环重复累积码; 低密度奇偶校验码; 编码协作; 联合校验矩阵; 公差构造方法

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)05-1298-08

DOI: 10.11999/JEIT190990

Joint Design of QC-RA Codes and Performance Analysis of Coded Cooperation

ZHANG Shunwai FU Yongfeng

(College of Telecommunications and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: Repeat Accumulate (RA) code is a special kind of Low Density Parity Check (LDPC) code, which not only has the advantages of LDPC code, but also realizes differential encoding. To solve the problems of high encoding complexity and long encoding delay of LDPC-coded cooperative system, Quasi-Cyclic RA (QC-RA) code is introduced. Firstly, a joint parity check matrix corresponding to the QC-RA codes adopted by the sources and relays is deduced; Secondly, the joint check matrix is designed based on the Common Difference Construction (CDC) method, and it is proved that the joint check matrix designed by the CDC method does not have short cycles with $girth-4$ or $girth-6$. Theoretical analysis and simulation results show that the system achieves better Bit Error Rate (BER) performance than the corresponding point-to-point system under the same conditions. The simulation results also demonstrate that the multi-source multi-relay coded cooperation with CDC constructed QC-RA code can obtain higher coding gain than that with generally constructed QC-RA code or Z-type constructed QC-RA code.

Key words: Quasi-Cyclic Repeat Accumulate (QC-RA) codes; Low Density Parity Check (LDPC) codes; Coded cooperation; Joint parity check matrix; Common Difference Construction (CDC)

1 引言

低密度奇偶校验(Low Density Parity Check,

LDPC)码^[1-3]是一类校验矩阵稀疏的线性分组码且其性能逼近香农限。准循环LDPC (Quasi-Cyclic LDPC, QC-LDPC)码由于其校验矩阵具有准循环特性, 极大地降低了LDPC的编码复杂度及存储空间需求。环特别是围长为 $girth-4$ 和 $girth-6$ 的短环对QC-LDPC码的译码性能影响很大, 消除 $girth-4$ 和 $girth-6$ 的短环是提高其译码性能的一种有效手段。文献[4]提出了基于循环置换矩阵(Circulant Permutation Matrices, CMP)构造围长至少为 $girth-8$ 的QC-LDPC码, 该方法构造的QC-LDPC码具有对称性, 比缺乏对称性的QC-LDPC码具有更好的编码性能。文献[5]介绍了基于Moore二分

收稿日期: 2019-12-11; 改回日期: 2020-11-18; 网络出版: 2020-12-07

*通信作者: 张顺外 swzhang@njupt.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61501256), 江苏省高等学校自然科学研究面上项目(20KJB510034), 江苏省自然科学基金(BK20150857), 南京邮电大学国自基金孵化项目(NY219073)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61501256), The Natural Science Foundation of Jiangsu Higher Education Institutions (20KJB510034), The Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20150857), The NUPTSF (NY219073)

图构造QC-LDPC码, 该方法构造的QC-LDPC码具有可变的码长和码率, 且在加性高斯白噪声(Additive White Gaussian Noise, AWGN)信道上具有良好的迭代译码性能。文献[6]利用等差数列构造了列重为3的围长至少为girth-8的QC-LDPC码, 该构造方法实现简单, 但码率取值不灵活。文献[7]提出了一种确定结构的大列重QC-LDPC码的构造方法, 解决了校验矩阵列重较小、码率取值不灵活的问题。文献[8]利用最大公约数定理构造QC-LDPC码, 证明了其构造的码不存在girth-4和girth-6环, 并且码的行重和列重能灵活取值。重复累积(Repeat Accumulate, RA)码^[9]是一种特殊结构的LDPC码, 其校验矩阵能直接运用于差分编码, 编码复杂度低、时延小且具有系统码的特性。鉴于此, 结合QC-LDPC码和RA码两者的优点, 本文提出采用准循环RA (Quasi-Cyclic RA, QC-RA)码作为系统的信道编码方案。

编码协作^[10-12]结合了信道编码技术和协作技术, 可同时获得信道编码技术的编码增益与协作技术的分集增益, 故能实现极其可靠的通信。文献[13]研究了基于分布式Turbo码的多中继编码协作系统, 为防止误码扩散, 进一步提出了仅由可靠中继参与协作的自适应协作方案。文献[14]提出了采用Reed Muller码的编码协作网络, 并基于Plotkin构造方法对Reed Muller码进行了优化设计。针对多用户协作信道状态未知情形, 文献[15]研究了基于Raptor码的协作方式, 提出了充分协作与部分协作两种策略以最大化系统吞吐量。文献[16]介绍了基于Polar码的编码协作, 采用两个短线性分组码构造长线性分组码, 目的节点的Polar码采用划分协作方式构建, 并且使用连续消除联合解码算法。文献[17,18]围绕LDPC码的编码协作展开了充分研究。鉴于QC-LDPC码的优势, 文献[19]设计了QC-LDPC编码协作系统, 推导出对应于信源节点和中继节点采用的QC-LDPC码的联合校验矩阵, 并消除了QC-LDPC码的短环, 极大地提高了系统的可靠性。针对采用LDPC/QC-LDPC码的编码协作编码复杂度与时延相对较高, 并且无法保证系统编码等问题, 文献[20]研究了采用RA码的编码协作, 利用RA码差分编码特性, 进一步降低了中继节点编码复杂度和时延。

QC-RA码结合了QC-LDPC码与RA码的优点, 本文针对采用QC-RA码的编码协作展开研究。首先, 提出了一种基于公差构造(Common Difference Construction, CDC)设计QC-RA码的方法, 证明了该方法构造的QC-RA码不存在围长为girth-4,

girth-6的短环; 然后, 将该构造方法用于多信源多中继的编码协作系统, 通过对信源节点和中继节点采用的QC-RA码联合设计消除协作系统中所有的girth-4, girth-6环。

2 系统描述

多信源多中继QC-RA编码协作系统模型如图1所示, 由 K 个信源节点 $S_k(k=1, 2, \dots, K)$ 、 W 个中继节点 $R_w(w=1, 2, \dots, W)$ 和一个目的节点 D 组成。利用时分多址(Time Division Multiple Access, TDMA)技术, K 个信源节点通过广播信道, 分别将编码器QC-RA- $S_k(k=1, 2, \dots, K)$ 生成的码字 $c_k(k=1, 2, \dots, K)$ 传输至 W 个中继节点和目的节点。中继节点 $R_w(w=1, 2, \dots, W)$ 接收到来自 K 个信源节点发送过来的 K 路信号; 然后对这 K 路信号译码, 恢复 K 路原始信息位, 再将得到的 K 路原始信息位级联, 并通过编码器QC-RA- $R_w(w=1, 2, \dots, W)$ 对级联后的信息位再编码; 最后通过TDMA技术, 中继节点 $R_w(w=1, 2, \dots, W)$ 将重新编码产生的校验位 $p_w(w=1, 2, \dots, W)$ 传送给目的节点 D 。目的节点接收到信源节点的 K 路信号和中继节点的 W 路信号, 采用联合最小和(Minimum-Sum, MS)迭代译码算法^[18]对其进行联合译码。

3 编码协作QC-RA码的联合设计

为消除QC-RA码中围长为girth-4, girth-6的短环, 本节采用了一种基于公差构造QC-RA码的方法, 该方法构造的QC-RA码不存在girth-4, girth-6环, 且行重、列重取值较灵活。然后, 将CDC构造方法运用于多信源多中继的编码协作系统中, 实现对信源节点和中继节点采用QC-RA码的联合设计。

3.1 QC-RA码

QC-RA码是一类结构化的RA码, 其校验矩阵 \hat{H} 如式(1), 由左边的准循环模块 H 和右边固定的准对角模块 D 组成。所以, 校验矩阵具有准循环特性。

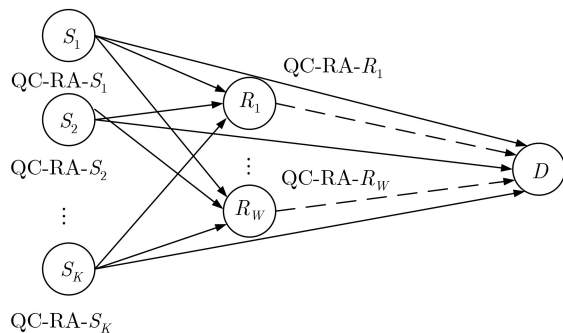


图1 多信源多中继QC-RA编码协作系统模型

$$\hat{H} = [H \ D] = \begin{bmatrix} I(p_{1,1}) & I(p_{1,2}) & \cdots & I(p_{1,L}) & 1 & \mathbf{0} \\ I(p_{2,1}) & I(p_{2,2}) & \cdots & I(p_{2,L}) & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I(p_{J,1}) & I(p_{J,2}) & \cdots & I(p_{J,L}) & \mathbf{0} & 1 \ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, 子矩阵 $I(p_{j,l})$ 由 $B \times B$ 的单位矩阵循环右移 $p_{i,j}$ 得到, 矩阵 D 是一个准对角矩阵。

3.2 多信源多中继协作的编码实现

采用QC-RA码的多信源多中继编码协作的编码实现步骤如下:

(1) 信源节点 S_1, S_2, \dots, S_K 分别将信息比特 $\mathbf{s}_k = [s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, \dots, s_{N_k - M_k}^{(k)}]^T$ 经过校验矩阵为

$$H_{S_k} = [A^{(k)} \ D] \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (2)$$

的QC-RA编码生成码长为 N_k 的码字 $\mathbf{c}_k = [s_1, s_2, \dots, s_{N_k - M_k}, p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_{M_k}^{(k)}]^T$, 其中 $A_{M_k \times (N_k - M_k)}$ 为准循环模块。 \mathbf{c}_k 经过广播信道发送至中继节点 $R_w (w = 1, 2, \dots, W)$ 和目的节点 D 。

(2) 协作中继 $R_w (w = 1, 2, \dots, W)$ 对信源节点 S_1, S_2, \dots, S_K 发送的码字进行译码, 并将 K 路译码恢复的信息位级联, 得到 $\mathbf{s}' = [s_1, s_2, \dots, s_K]^T$, 然

$$\hat{H}_D = \begin{bmatrix} A^{(1)} & D & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A^{(2)} & D & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & A^{(K)} & D \\ B_1^{(1)} & \mathbf{0} & B_2^{(1)} & \cdots & B_K^{(1)} & \mathbf{0} & D & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ B_1^{(2)} & \mathbf{0} & B_2^{(2)} & \cdots & B_K^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & D & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1^{(W)} & \mathbf{0} & B_2^{(W)} & \cdots & B_K^{(W)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & D \end{bmatrix} \quad (6)$$

3.3 QC-RA码的联合设计

迭代译码算法是一种理想的无环译码方法, 环路会影响迭代译码的性能。环的围长越小, 迭代过程中节点输入的信息与它上次迭代输出的信息相关性越大, 译码性能越受影响。针对3.2节的多信源多中继编码方式, 本文引入一种列重取值灵活的QC-RA码的构造方法—基于公差构造QC-RA码。其优势在于可以构造大围长的QC-RA码, 消除了围长为girth-4, girth-6的短环。

3.3.1 基于公差构造QC-RA码

先构造列重 $d_c = J$ 、行重 $d_r = L$ 的规则QC-LDPC码, 其校验矩阵 H 的循环移位值 $E(H)$ 结构为

$$E(H) = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,L} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{J,1} & p_{J,2} & \cdots & p_{J,L} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中, $p_{j,l}$ 为单位矩阵的循环移位值, 子块大小

后再将 \mathbf{s}' 经过校验矩阵

$$H_{R_w} = [B_1^{(w)} \ B_2^{(w)} \ \cdots \ B_K^{(w)} \ D] \quad (w = 1, 2, \dots, W) \quad (3)$$

编码生成码字 $\mathbf{c}_{R_w} = [\mathbf{s}', \mathbf{p}_w]^T$, 其中 $[B_1^{(w)} \ B_2^{(w)} \ \cdots \ B_K^{(w)}]$ 为准循环模块, 中继节点 R_w 将编码产生的校验比特 \mathbf{p}_w 发送至目的节点 D 。

(3) 在多信源多中继的编码协作系统中, 对于目的节点 D 而言, 整个系统的校验关系满足

$$\hat{H}_D \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (4)$$

其中, \mathbf{c} 是目的节点接收到的复合码字, 为信源节点编码生成的码字 $\mathbf{c}_k (k = 1, 2, \dots, K)$ 和中继节点的校验比特 $\mathbf{p}_w (w = 1, 2, \dots, W)$ 的级联。

$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_K, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_W]^T \quad (5)$$

对应于编码系统的联合校验矩阵 \hat{H}_D 为

$B > p_{J,L}$ 。第1行 $p_{1,l} = 1 (l = 1, 2, \dots, L)$, 其余循环移位值由式(8)计算得到。

$$p_{j+1,l} = p_{j,l} + d_{j,l} \quad (8)$$

其中,

$$d_{j,l} = \begin{cases} 1, & l = 1 \\ \max\{J - j + 2, j + 2\}, & l = 2 \\ D_{j,l-1} + 2, & l \geq 3 \end{cases} \quad (9)$$

为 $E(H)$ 矩阵中列的公差, $D_{j,l-1} = \sum_{k=1}^{j-1} d_{k,l-1}$ 表示 $l-1$ 列除 $d_{j,l-1}$ 外所有公差之和。下面通过一个简单例子说明构造循环移位值 $E(H)$ 。

例1: 取列重 $J = 6$, 行重 $L = 3$, 构造循环移位值 $E(H)$ 。

首先, 根据3.3.1节取第1行 $p_{1,l} = 1 (l = 1, 2, 3)$; 根据式(9)知, $l = 1$ 时, $d_{j,1} = 1 (j = 1, 2, \dots, 6)$, 此时, 通过式(8)得出 $E(H)$ 中第1列循环移位值 $[1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]^T$; 同理, 根据式(9)知, $l = 2$ 时,

得出 $d_{j,2} = 7(j = 1, 5)$, $d_{j,2} = 6(j = 2, 4)$, $d_{3,2} = 5$, 再通过式(8)得出 $E(\mathbf{H})$ 中第2列循环移位值 $[8 \ 14 \ 19 \ 25 \ 32]^T$; 最后, 通过式(9), $l = 3$ 时, 得出 $d_{j,3} = 33(j = 1, 2, \dots, 6)$, 再通过式(8)得出 $E(\mathbf{H})$ 中第3列循环移位值 $[1 \ 34 \ 67 \ 100 \ 133 \ 166]^T$ 。最终, 得到循环移位值 $E(\mathbf{H})$ 如式(10)所示

$$E(\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 34 \\ 3 & 14 & 67 \\ 4 & 19 & 100 \\ 5 & 25 & 133 \\ 6 & 32 & 166 \end{bmatrix} \quad (10)$$

定理1: 基于公差构造的列重 $d_v = J$ 、行重 $d_c = L$ 的QC-LDPC码的校验矩阵 \mathbf{H} 中不存在girth-4和girth-6环。定理1的证明可参考文献[21, 22]。

得到QC-LDPC码的校验矩阵 \mathbf{H} 之后, 在 \mathbf{H} 的右侧拼接准对角矩阵 \mathbf{D} , 即QC-RA码的校验矩阵 $\hat{\mathbf{H}}$ 构造完成。

3.3.2 基于公差的联合校验矩阵的设计

基于3.3.1节的公差构造方法, 在多信源多中继编码协作系统中, 对信源节点和中继节点采用的QC-RA码进行联合设计, 即设计整个协作系统的联合校验矩阵并消除所有的围长小于girth-8的短环。为便于分析设计, 将式(6)联合校验矩阵 $\hat{\mathbf{H}}_D$ 分成准循环部分 \mathbf{H}_{QC} 与准对角部分 \mathbf{H}_{QD} 两部分。这两部分与原式完全等价, 不影响其环的特性。 \mathbf{H}_{QC} 与 \mathbf{H}_{QD} 表达式分别为

$$\mathbf{H}_{QC} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}^{(K)} \\ \mathbf{B}_1^{(1)} & \mathbf{B}_2^{(1)} & \dots & \mathbf{B}_K^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_1^{(W)} & \mathbf{B}_2^{(W)} & \dots & \mathbf{B}_K^{(W)} \end{bmatrix} \quad (11a)$$

$$\mathbf{H}_{QD} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (11b)$$

由于 \mathbf{H}_{QD} 为固定的准对角结构, 故我们仅需对 \mathbf{H}_{QC} 设计。

$$\mathbf{H}'_{QC} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(1)} & \mathbf{X}_{1,2} & \dots & \mathbf{X}_{1,K} \\ \mathbf{X}_{2,1} & \mathbf{A}^{(2)} & \dots & \mathbf{X}_{2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{X}_{K,1} & \mathbf{X}_{K,2} & \dots & \mathbf{A}^{(K)} \\ \mathbf{B}_1^{(1)} & \mathbf{B}_2^{(1)} & \dots & \mathbf{B}_K^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_1^{(W)} & \mathbf{B}_2^{(W)} & \dots & \mathbf{B}_K^{(W)} \end{bmatrix} \quad (12)$$

首先, 利用3.3.1节所述的公差构造方法构造式(12)所示的 \mathbf{H}'_{QC} , 由定理1知其不存在girth-4, girth-6环。然后, 运用掩码技术^[23]用相同大小的零矩阵替换 $\mathbf{X}_{m,n}$, 得到式(11a)中的 \mathbf{H}_{QC} , 故通过该方法得到的 \mathbf{H}_{QC} 内不存在girth-4, girth-6环。在式(11b)中 \mathbf{H}_{QD} 是固定的准对角矩阵, 显然其内不存在girth-4, girth-6环。故要使得联合校验矩阵 $\hat{\mathbf{H}}_D$ 中不存在girth-4, girth-6环, 只需进一步保证 \mathbf{H}_{QC} 与 \mathbf{H}_{QD} 之间不存在girth-4, girth-6环即可。

定理2: 由公差构造方法得到的 \mathbf{H}_{QC} 与 \mathbf{H}_{QD} 之间不存在girth-4和girth-6环。

证明: (1) 不存在girth-4环。由式(8)和式(9)知 $p_{j+1,l} - p_{j,l} = d_{j,l}$, 且 $d_{i,j} \neq B - 1$, 故 $p_{j,l} - p_{j+1,l} \neq 1 \pmod B$, 由文献[22]知 \mathbf{H}_{QC} 与 \mathbf{H}_{QD} 之间无girth-4环。

(2) 不存在girth-6环。证明见附录1。

综上所述, 定理2得证。

由上可知, 基于公差构造方法设计的联合校验矩阵 $\hat{\mathbf{H}}_D$ 消除了多信源多中继协作系统中QC-RA码的所有girth-4和girth-6环, 进一步提高了系统编码增益。

4 系统性能仿真分析

本节通过仿真研究基于公差构造联合设计的QC-RA码的多信源多中继编码协作系统的误码率(Bit Error Rate, BER)性能。仿真中信源至中继节点为理想信道, 信源至目的节点 $S_k - D$ 与中继至目的节点 $R_w - D$ 均为独立瑞利块衰落信道, 衰落系数服从均值为零、方差为1的复高斯分布; 每个码字时间内信道衰落系数保持不变, 且假定 $S_k - D$ 信道与 $R_w - D$ 信道平均信噪比相等。信源节点与中继节点均采用二进制相移键控(Binary Phase Shift Keying, BPSK)调制; 目的节点已知信道状态信息并采用联合MS迭代译码算法^[18]译码。

4.1 采用联合设计QC-RA码的编码协作系统与点对点系统BER比较

研究采用联合设计QC-RA码的多信源多中继编码协作系统在瑞利信道下的BER性能。针对双信源双中继编码协作, 协作系统与点对点系统采用的QC-RA码如表1所示。

图2比较了迭代次数分别为1, 5, 10时, 采用联合设计QC-RA码的双信源双中继编码协作与采用QC-RA码的点到点系统的BER性能。仿真结果表明: 在相同迭代次数时, 编码协作与点对点系统相比具有明显的性能增益, 如在迭代10次、BER = 2×10^{-3} 时, 双信源双中继的编码协作系统相对于点对点系统有约5.5 dB的增益。这主要是由于在目的节点, 来自2个信源节点和2个中继节点的4路信号

表1 双信源双中继编码协作及对应点对点系统采用的QC-RA码

	信源节点采用的QC-RA码	中继节点采用的QC-RA码
双信源双中继编码协作系统	$\mathbf{H}_{S_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(1700 \times 850)}^{(1)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ $\mathbf{H}_{S_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(1700 \times 850)}^{(2)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Rate=1/3</p>	$\mathbf{H}_{R_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(1700 \times 850)}^{(1)} & \mathbf{B}_{(1700 \times 850)}^{(1)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ $\mathbf{H}_{R_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(1700 \times 850)}^{(2)} & \mathbf{B}_{(1700 \times 850)}^{(2)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Rate=3/4</p>
点对点系统	$\mathbf{H}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(6800 \times 1700)} & \mathbf{D}_{(6800 \times 6800)} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Rate=1/5</p>	\

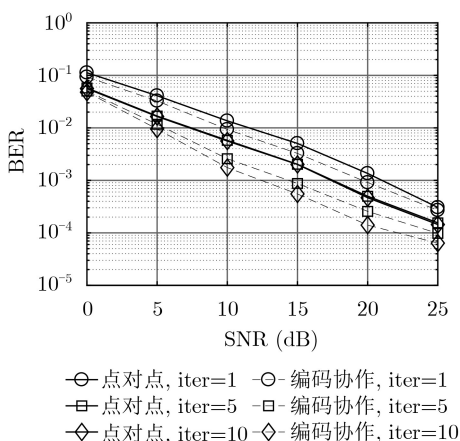


图2 双信源双中继编码协作与对应点对点系统的BER性能比较

分别经历独立衰落信道，经过联合MS译码获得了分集增益。

4.2 采用联合设计QC-RA码的编码协作系统在不同节点数目下的BER比较

研究采用联合设计QC-RA码的编码协作配置不同数目信源节点与中继节点对BER性能的影响。表2给出了双信源单中继系统、单信源双中继系统和单信源单中继系统这三种系统信源节点和中继节点采用的QC-RA码。

图3比较了迭代次数为10时，采用联合设计QC-RA码的编码协作系统在不同数目信源节点及中继节点下的BER性能。仿真结果表明，在中继节点数相同的情况下，编码协作系统的BER性能随信源节点个数的增加而降低，如在BER=10⁻³时，单信源

单中继系统较双信源单中继系统约有4.5 dB的增益，这是因为信源节点增加，信息位增加，中继节点所要协助的信息比特也增加，从而导致整个系统的等效码率增大。在相同信源节点数的情况下，编码协作系统的BER性能随中继节点个数增加而上升，如在BER=10⁻³时，单信源双中继系统较单信源单中继系统约有4 dB的增益，这是由于中继节点个数增加，目的节点接收到的校验比特增多，整个系统的等效码率降低，从而降低了误码率。

4.3 基于公差构造与其他构造的联合设计QC-RA码的BER比较

将本文提出的基于公差构造的联合设计QC-RA码与一般构造^[19]的联合设计QC-RA码和基于Z型构造^[24]的联合设计QC-RA码的BER性能比较。在双信源单中继的编码协作系统中，3种构造方法信源节点和中继节点采用的QC-RA码的码长码率均一致，具体见表2。

图4比较了在双信源单中继编码协作系统中，迭代次数为1，10时，3种构造方法的BER性能。仿真结果表明，基于公差构造的联合设计QC-RA码编码协作系统均优于其他两种方法；如在BER=10⁻³时，本文提出的基于公差构造的方法较一般构造QC-RA码编码协作系统有约0.5 dB增益，较Z型构造的RA码编码协作系统约有2.5 dB增益。

4.4 采用联合设计QC-RA码的编码协作系统在不同调制方式和不同天线数目下的BER比较

研究采用联合设计QC-RA码的编码协作系统

表2 不同信源节点、中继节点数目情况下编码协作系统采用的RA码

	信源节点采用的QC-RA码	中继节点采用的QC-RA码
双信源单中继系统	$\mathbf{H}_{S_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(1700 \times 1700)}^{(1)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ $\mathbf{H}_{S_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(1700 \times 1700)}^{(2)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Rate=1/2</p>	$\mathbf{H}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(1700 \times 1700)} & \mathbf{B}_{(1700 \times 1700)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Rate=2/3</p>
单信源双中继系统	$\mathbf{H}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(1700 \times 1700)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Rate=1/2</p>	$\mathbf{H}_{R_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(1700 \times 1700)}^{(1)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ $\mathbf{H}_{R_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(1700 \times 1700)}^{(2)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Rate=1/2</p>
单信源单中继系统	$\mathbf{H}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{(1700 \times 1700)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Rate=1/2</p>	$\mathbf{H}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(1700 \times 1700)} & \mathbf{D}_{(1700 \times 1700)} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">Rate=1/2</p>

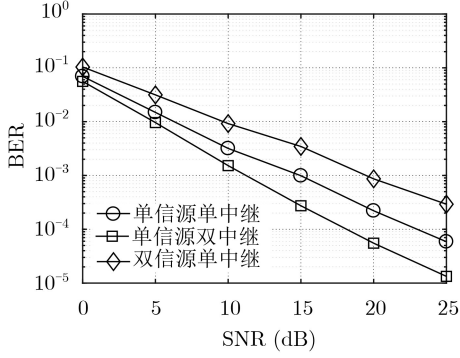


图3 不同信源节点数和中继节点数目下编码协作系统的BER性能比较

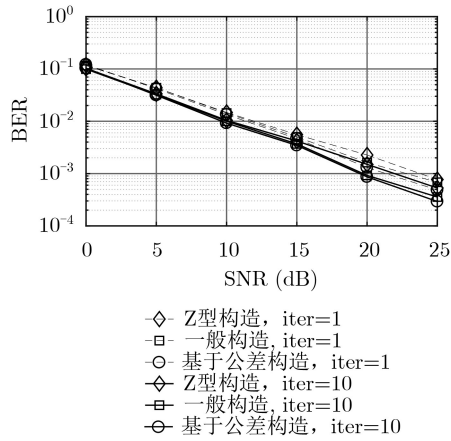


图4 不同构造方法在编码协作系统的BER性能比较

在不同调制方式和不同接收天线数目下的BER性能。目的节点在配置多天线的情形下，多天线对应的每条链路均为独立瑞利块衰落信道，衰落系数服从均值为零、方差为1的复高斯分布，采用最大比合并(Maximal Ratio Combining, MRC)技术处理多天线接收信号。双信源单中继编码协作系统中各个信源节点和中继节点采用的QC-RA码见表2。

图5比较了迭代次数为10时，采用联合设计QC-RA码的双信源单中继协作系统分别在BPSK调制方式和正交相移键控(Quadrature Phase Shift Keying, QPSK)调制方式下的BER性能，并比较了在相同调制方式下不同接收天线数(Ant=1, 2, 3)的BER性能。仿真结果表明，在相同条件下，采用BPSK调制方式的BER性能优于采用QPSK调制方式的BER性能；如在Ant=3, BER=10⁻³时，协作系统在BPSK调制方式下较QPSK调制方式下有约2.5 dB的增益，这是因为QPSK调制方式在牺牲系统可靠性条件下提高了协作系统的传输速率。在采用相同调制方式的情况下，所用的接收天线数越多，系统的BER性能越好；如在协作系统采用BPSK调制方式下，在SNR=1 dB时，天线数Ant=3下的BER=7.5 × 10⁻⁴较天线数Ant=1下的

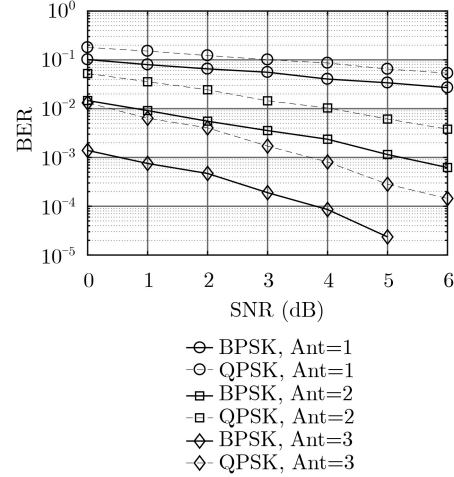


图5 不同调制方式和不同天线数目在编码协作系统中的BER性能比较

BER=8 × 10⁻²具有显著优势，这是由于在目的节点处，接收天线越多，整个系统所获得的空间分集增益越大，从而系统的BER性能越好。

5 结束语

本文研究了一种基于公差构造的QC-RA码，该QC-RA码消除了girth-4, girth-6环，并将该方法构造的QC-RA码运用于编码协作系统中。通过对信源节点和中继节点采用的QC-RA码进行联合设计消除了多信源多中继编码协作系统中所有的girth-4, girth-6环，大大提高了协作系统的BER性能。仿真结果表明编码协作系统较点到点系统有明显的BER性能优势。在相同条件下多信源多中继系统中采用基于公差构造的联合设计QC-RA码的性能均优于采用一般构造的和Z型构造的联合设计QC-RA码。同时，编码协作系统性能随着目的节点配置的天线数增加得到显著提高。

附录1 H_{QC}与H_{QD}之间不存在girth-6环的证明

式(11a)中的H_{QC}与式(11b)中的H_{QD}之间的girth-6环，其最右边只能由H_{QD}中上下相邻的两个1构成，具体有图6所示的3类情形。

情形1：对应于(p_{j,l} - p_{j+1,l}) mod B = 2。

$$\text{由式(8)和式(9)知： } p_{j+1,l} - p_{j,l} = d_{j,l} > 0 \quad (13)$$

$$\text{又 } d_{j,l} \neq 2 \quad (14)$$

得到(p_{j,l} - p_{j+1,l}) mod B ≠ 2，故图6(a)这种情形不可能。

情形2：对应于(p_{j₂,l₂ - 1 - p_{j₁,l₂}) + (p_{j₁,l₁ - p_{j₂,l₁}) = 0 mod B。}}

$$\begin{aligned} \text{当 } l_2 = 2 \text{ 时, } & p_{j_2,l_2} - 1 - p_{j_1,l_2} \geq (j_2 - j_1)d_{j,1} \\ & + \frac{j_1 + 2 + (j_2 - 1 + 2)}{2}(j_2 - j_1) - 2 \end{aligned} \quad (15a)$$

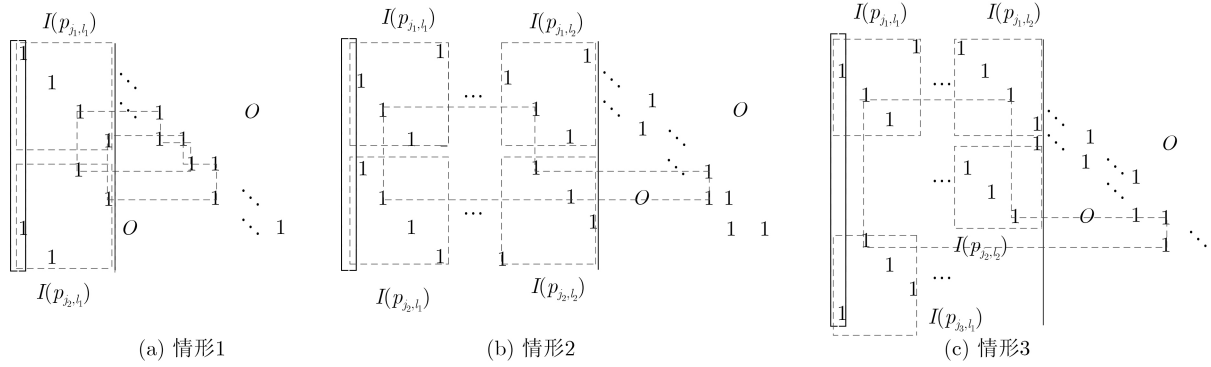


图6 girth-6环的3类情形

$$\frac{j_1 + 2 + (j_2 - 1 + 2)}{2}(j_2 - j_1) \geq 3 \quad (15b)$$

$$\text{得到 } p_{j_2, l_1} - p_{j_1, l_1} = (j_2 - j_1)d_{j,1} > 0 \quad (16)$$

$$\text{当 } l_2 \geq 3 \text{ 时, } p_{j_2, l_2} - 1 - p_{j_1, l_2} \geq D_{j, l_2 - 1} \geq D_{j, l_1} \quad (17)$$

$$\text{得到 } 0 < p_{j_2, l_1} - p_{j_1, l_1} < D_{j, l_1} \quad (18)$$

故 $(p_{j_2, l_2} - 1 - p_{j_1, l_2}) + (p_{j_1, l_1} - p_{j_2, l_1}) \neq 0 \pmod B$, 因此图6(b)这种情形不可能。

情形3: 对应于 $(p_{j_2, l_2} - 1 - p_{j_1, l_2}) + (p_{j_1, l_1} - p_{j_3, l_1}) = 0 \pmod B$, $j_3 = j_2 + 1 \geq 3$ 。

$$\begin{aligned} \text{当 } l_2 = 2 \text{ 时, } p_{j_2, l_2} - 1 - p_{j_1, l_2} &\geq (j_2 - j_1)d_{j,1} \\ &+ \frac{j_1 + 2 + (j_2 - 1 + 2)}{2}(j_2 - j_1) - 2 \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\frac{j_1 + 2 + (j_2 - 1 + 2)}{2}(j_2 - j_1) \geq 3 \quad (19b)$$

因为式(19a)与式(19b)不能同时取等, 故有

$$p_{j_2, l_2} - 1 - p_{j_1, l_2} > (j_2 - j_1)d_{j,1} + 1 \quad (20)$$

$$\text{此时有 } p_{j_3, l_1} - p_{j_1, l_1} = (j_2 + 1 - j_1)d_{j,1} > 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{又因为 } d_{j,1} = 1, \text{ 故有 } p_{j_2, l_2} - 1 - p_{j_1, l_2} \\ > p_{j_3, l_1} - p_{j_1, l_1} > 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{当 } l_2 \geq 3 \text{ 时, } p_{j_2, l_2} - 1 - p_{j_1, l_2} \geq D_{j, l_2 - 1} \geq D_{j, l_1} \quad (23)$$

$$\text{此时有 } 0 < p_{j_3, l_1} - p_{j_1, l_1} < D_{j, l_1} \quad (24)$$

故 $(p_{j_2, l_2} - 1 - p_{j_1, l_2}) + (p_{j_1, l_1} - p_{j_3, l_1}) \neq 0 \pmod B$, $j_3 = j_2 + 1 \geq 3$, 因此图6(c)这种情形不可能。

综上情形1、情形2、情形3所述, 式(11a)中的 H_{QC} 与式(11b)中 H_{QD} 两者之间不存在girth-6环。

参考文献

- [1] GALLAGER R G. Low-Density Parity-Check Codes[M]. Cambridge: The MIT Press, 1963.
- [2] CHEN Weigang, HAN Changcai, and YANG Jinsheng. Low-complexity encoder for LDPC codes in space applications[J]. *Electronics Letters*, 2019, 55(23): 1241–1243. doi: [10.1049/el.2019.2417](https://doi.org/10.1049/el.2019.2417).
- [3] VATTA F, SORANZO A, COMISSO M, *et al.* Performance study of a class of irregular LDPC codes through low complexity bounds on their belief-propagation decoding thresholds[C]. 2019 AEIT International Annual Conference (AEIT), Florence, Italy, 2019: 1–6. doi: [10.23919/AEIT.2019.8893306](https://doi.org/10.23919/AEIT.2019.8893306).
- [4] TASDIGHI A, BANIHASHEMI A H, and SADEGHI M R. Symmetrical constructions for regular girth-8 QC-LDPC codes[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2017, 65(1): 14–22. doi: [10.1109/TCOMM.2016.2617335](https://doi.org/10.1109/TCOMM.2016.2617335).
- [5] LI Jiali, CHEN Wen, JIANG Xueqin, *et al.* Construction of multiple-rate quasi-cyclic LDPC codes with girth eight[C]. 2016 8th International Conference on Wireless Communications & Signal Processing, Yangzhou, China, 2016: 1–5. doi: [10.1109/WCSP.2016.7752486](https://doi.org/10.1109/WCSP.2016.7752486).
- [6] 张轶, 达新宇, 苏一栋. 利用等差数列构造大围长准循环低密度奇偶校验码[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(2): 394–398. doi: [10.11999/JEIT140538](https://doi.org/10.11999/JEIT140538).
- [7] ZHANG Yi, DA Xinyu, and SU Yidong. Construction of quasi-cyclic low-density parity-check codes with a large girth based on arithmetic progression[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(2): 394–398. doi: [10.11999/JEIT140538](https://doi.org/10.11999/JEIT140538).
- [8] ZHANG Yi and DA Xinyu. Construction of girth-eight QC-LDPC codes from arithmetic progression sequence with large column weight[J]. *Electronics Letters*, 2015, 51(16): 1257–1259. doi: [10.1049/el.2015.0389](https://doi.org/10.1049/el.2015.0389).
- [9] ZHANG Guohua, SUN Rong, and WANG Xinmei. Construction of girth-eight QC-LDPC codes from greatest common divisor[J]. *IEEE Communications Letters*, 2013, 17(2): 369–372. doi: [10.1109/LCOMM.2012.122012.122292](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2012.122012.122292).
- [10] SUN Rong, LIU Jingwei, ZHANG Pingli, *et al.* On the rateless character of irregular RA codes[C]. 2011 IEEE Workshops of International Conference on Advanced Information Networking and Applications, Singapore, 2011:

- 297–301. doi: [10.1109/WAINA.2011.49](https://doi.org/10.1109/WAINA.2011.49).
- [10] LANEMAN J N, WORNELL G W, and TSE D N C. An efficient protocol for realizing cooperative diversity in wireless networks[C]. 2001 IEEE International Symposium on Information Theory, Washington, USA, 2001: 294–295. doi: [10.1109/ISIT.2001.936157](https://doi.org/10.1109/ISIT.2001.936157).
- [11] VAN NGUYEN B, JUNG H, and KIM K. Physical layer security schemes for full-duplex cooperative systems: State of the art and beyond[J]. *IEEE Communications Magazine*, 2018, 56(11): 131–137. doi: [10.1109/MCOM.2017.1700588](https://doi.org/10.1109/MCOM.2017.1700588).
- [12] WANG Jieling, YU Quan, LI Zan, *et al.* Distributed space time block transmission and QRD based diversity detector in asynchronous cooperative communications systems[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2018, 67(6): 5111–5125. doi: [10.1109/TVT.2018.2812901](https://doi.org/10.1109/TVT.2018.2812901).
- [13] MOUALEU J M, HAMOUDA W, XU Hongjun, *et al.* Multi-relay turbo-coded cooperative diversity networks over Nakagami- m fading channels[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2013, 62(9): 4458–4470. doi: [10.1109/TVT.2013.2265329](https://doi.org/10.1109/TVT.2013.2265329).
- [14] EJAZ S and YANG Fengfan. Jointly optimized Reed-Muller codes for multilevel multirelay coded-cooperative VANETS[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2017, 66(5): 4017–4028. doi: [10.1109/TVT.2016.2604320](https://doi.org/10.1109/TVT.2016.2604320).
- [15] SHIRVANIMOGHADDAM M, LI Yonghui, TIAN Shuang, *et al.* Distributed raptor coding for erasure channels: Partially and fully coded cooperation[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2013, 61(9): 3576–3589. doi: [10.1109/TCOMM.2013.072913.120724](https://doi.org/10.1109/TCOMM.2013.072913.120724).
- [16] JIN Ming, WANG Junming, ZHANG Yan, *et al.* The research and design of single relay coded cooperative system based on Polar codes[C]. 2017 13th IEEE International Conference on Electronic Measurement & Instruments, Yangzhou, China, 2017: 254–258. doi: [10.1109/ICEMI.2017.8265949](https://doi.org/10.1109/ICEMI.2017.8265949).
- [17] WANG Hui and CHEN Qingchun. LDPC based network coded cooperation design for multi-way relay networks[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 62300–62311. doi: [10.1109/ACCESS.2019.2915293](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2915293).
- [18] 张顺外. LDPC编码协作系统性能与码的设计研究[D]. [博士学位论文], 南京航空航天大学, 2013.
- ZHANG Shunwai. LDPC-coded cooperation: Performance studies and codes design[D]. [Ph.D. dissertation], Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2013.
- [19] 张顺外, 魏琪. 多信源多中继编码协作系统准循环LDPC码的联合设计与性能分析[J]. *电子与信息学报*, 2019, 41(10): 2325–2333. doi: [10.11999/JEIT190069](https://doi.org/10.11999/JEIT190069).
- ZHANG Shunwai and WEI Qi. Joint design of quasi-cyclic low density parity check codes and performance analysis of multi-source multi-relay coded cooperative system[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(10): 2325–2333. doi: [10.11999/JEIT190069](https://doi.org/10.11999/JEIT190069).
- [20] ZHANG Shunwai, YANG Fengfan, TANG Lei, *et al.* Network-coding-based multisource RA-coded cooperative MIMO[C]. 2013 3rd International Conference on Computer Science and Network Technology, Dalian, China, 2013: 737–741. doi: [10.1109/ICCSNT.2013.6967215](https://doi.org/10.1109/ICCSNT.2013.6967215).
- [21] SADEGHI M R. Optimal search for girth-8 quasi cyclic and spatially coupled multiple-edge LDPC codes[J]. *IEEE Communications Letters*, 2019, 23(9): 1466–1469. doi: [10.1109/LCOMM.2019.2924892](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2019.2924892).
- [22] ZHANG Shunwai, YANG Fengfan, and SONG Rongfang. Energy-harvesting-based RA-coded cooperative MIMO: Codes design and performance analysis[J]. *Digital Signal Processing*, 2017, 60: 56–62. doi: [10.1016/j.dsp.2016.08.013](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2016.08.013).
- [23] RYAN W E and LIN Shu. Channel Codes Classical and Modern[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2009.
- [24] 张丽丽, 赵泽茂, 包建荣. 基于Z形及等差数列结构的QC-LDPC码构造[J]. *通信学报*, 2010, 31(8A): 117–121.
- ZHANG Lili, ZHAO Zemaoyao, and BAO Jianrong. Construct of QC-LDPC codes based on Z-shape and arithmetic progression sequence[J]. *Journal on Communications*, 2010, 31(8A): 117–121.
- 张顺外: 男, 1987年生, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为编码协作网络.
- 付勇峰: 男, 1996年生, 硕士生, 研究方向为编码协作通信技术.

责任编辑: 马秀强