

## 一种低复杂度的 ESPRIT 新算法

包志强 吴顺君 张林让

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 该文提出了一种基于 QR 分解的 Power-ESPRIT (以下简称 QP-ESPRIT 算法) 新算法。首先使用采样数据协方差矩阵的幂(Power)获得噪声子空间的估计, 然后对噪声子空间进行 QR 分解并使用  $R$  矩阵估计信源个数, 提出了无特征分解的信源个数检测算法——SDWED 算法。进而, 信号子空间的特征向量就可以由  $Q$  矩阵确定, 从而应用 ESPRIT 算法获得信源波达方向的估计。该算法不需要预先知道信源个数的先验知识以及分离信号与噪声特征值的门限。在确定信源个数和子空间估计的同时, 本文算法与传统的基于奇异值分解算法相比, 具有近似性能时却拥有较低的计算复杂度。仿真结果证明了该方法的有效性。

**关键词:** 阵列信号处理; ESPRIT; 波达方向; 信源个数检测

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)09-2042-05

## A Novel and Low Complexity ESPRIT Method

Bao Zhi-qiang Wu Shun-jun Zhang Lin-rang

(National Lab of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** In this paper, a low complexity ESPRIT algorithm based on power method and QR decomposition is presented for direction finding, which does not require the *priori* knowledge of sources number and the predetermined threshold in separation of the signal and noise eigen-values. Firstly, the estimation of noise subspace is obtained by the power of covariance matrix and a novel source number detection method without eigen-decomposition is proposed based on QR decomposition. Furthermore, the eigen-vectors of signal subspace can be determined according to  $Q$  matrix, and then the directions of signals could be computed by the ESPRIT algorithm. In determining the source-number and subspace, the proposed algorithm has a substantial computational saving with the approximation performance compared with the Single-Vector-Decomposition (SVD) based algorithm. The simulation results demonstrate its effectiveness and robustness.

**Key words:** Array signal processing; ESPRIT; Direction Of Arrival(DOA); Source number detection

### 1 引言

阵列信号处理作为信号处理的一个重要分支, 在通信、雷达、声呐和地震测量等领域获得了广泛的应用和迅速发展。而波达方向(Direction Of Arrive, DOA)估计是阵列信号处理中的一个重要问题。目前基于子空间结构的超分辨 DOA 估计如 Minimum Norm, MUSIC 和 ESPRIT 等, 由于其高分辨的性能而得到了广泛的应用。然而, 这些算法需要估计协方差矩阵并作特征分解或奇异值分解。由于协方差矩阵估计和特征值分解计算复杂度较高, 不利于实时的信号处理; 尤其当阵元维数较大时会带来严重的计算负担。为了降低计算复杂度, 诸多学者提出了许多无需特征分解的快速算法<sup>[1-4]</sup>。传播算子法(PA)<sup>[1]</sup>采用线性算子从阵列接收数据中提取噪声子空间。线性预测法<sup>[2]</sup>是通过解线性最小均方问题从而获得信号子空间的基。文献<sup>[4]</sup>从自相关矩阵的 DFT 变换中

提取信号子空间的特征向量。文献<sup>[5-8]</sup>使用采样协方差矩阵的幂近似噪声子空间。在文献<sup>[5, 6]</sup>中作者提出的方法需要信源个数的先验知识以及分离噪声和信号特征值的门限, 这两个参数的确定限制了算法的应用。而在文献<sup>[7, 8]</sup>中, Hasan 给出了不需门限的方法确定噪声子空间的估计, 但是仍然需要信源个数的预估计, 而文中却并未指出信源个数估计的方法。这些方法与基于特征分解的算法相比明显地降低了计算的复杂度, 便于算法的实时处理。但是, 需要的先验知识较多, 大大限制了算法的延展性。

对于基于采样协方差矩阵幂的方法(Power 方法)来说, 它们给出的子空间估计是一种近似, 对于低信噪比时, 用于波达方向估计依然有效, 并且可以达到任意精度的近似<sup>[9]</sup>。因此 Power 方法对于子空间的应用非常有效。然而上述两个参数(门限和信源个数)在许多应用场合下未知, 因此对于无参数算法的研究是非常必要且迫切的。本文在文献<sup>[7, 8]</sup>的基础上, 提出了一种低复杂度的 QP-ESPRIT 算法, 首先对得到的噪声子空间进行 QR 分解, 给出了使用  $R$  矩阵无特征分解的信源个数检测新算法(Source number Detector Without

2006-01-11 收到, 2006-06-26 改回  
国家自然科学基金(60102005), 国家重点实验室基金(J14203 220033)和国家部级基金资助课题

Eigen-Decomposition, SDWED); 进而使用  $\mathbf{Q}$  矩阵就可以获得常规 ESPRIT 方法所需的信号子空间的特征向量从而得到信源波达方向的估计。与文献[8]的算法相比本文无需预先知道信源个数的先验知识, 且计算复杂度仅仅增加了一次 QR 分解, 即大约为  $4M^3/3$ , 这对于实际应用也是可以容忍的。因此本文算法解决了 Power 方法无特征分解情况下的信源个数检测问题, 使得 Power 方法可以得到更为广泛实际的应用。仿真实验证明了本文算法的有效性。

## 2 信号模型

考虑  $P$  个窄带平面波入射到  $M$  个阵元的直线阵列上, 阵列输出的数据由式(1)给出:

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(k) + \mathbf{N}(k) = \sum_{i=1}^P \mathbf{a}(\theta_i)\mathbf{s}_i(k) + \mathbf{N}(k) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_P)]$  表示阵列的导向矢量,  $\mathbf{S}(k) = [\mathbf{s}_1(k) \ \mathbf{s}_2(k) \ \cdots \ \mathbf{s}_P(k)]^H$  代表信源矢量和  $\mathbf{N}(k) = [\mathbf{n}_1(k) \ \mathbf{n}_2(k) \ \cdots \ \mathbf{n}_M(k)]$  定义为噪声矢量。那么阵列输出的协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R}_{XX} = E[\mathbf{X}(k)\mathbf{X}^H(k)] = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{R}_{SS}\mathbf{A}(\theta)^H + \mathbf{R}_{NN} \quad (2)$$

这里  $\mathbf{R}_{SS} = E[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)]$  为信号的协方差矩阵, 上标  $H$  定义为复共扼转置变换。  $\mathbf{R}_{NN} = E[\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^H(t)]$  为噪声的协方差矩阵; 当噪声为高斯白噪声时, 其协方差矩阵等于  $\sigma^2\mathbf{I}$ 。

为了便于分析这里作如下的假设:

(1) 假设所有信号均是零均值的, 联合平稳的高斯随机过程, 且信号间是统计独立的。

(2) 加性噪声也是零均值的高斯随机过程, 且各个阵元的噪声统计独立, 具有相同的方差。

这里只考虑高斯白噪声的情况。基于特征分解的高分辨率方法需要对协方差矩阵  $\mathbf{R}$  进行特征分解,  $\mathbf{R}_{XX}$  可以表示为

$$\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{U}_S \mathbf{\Sigma}_S \mathbf{U}_S^H + \mathbf{U}_N \mathbf{\Sigma}_N \mathbf{U}_N^H = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (3)$$

其中  $\mathbf{U}_S = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_P]$  和  $\mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_{P+1} \ \mathbf{u}_{P+2} \ \cdots \ \mathbf{u}_M]$  分别表示信号和噪声子空间的特征矢量,  $\mathbf{u}_i (i = P+1, \dots, M)$  是协方差矩阵  $\mathbf{R}_{XX}$  的特征矢量。信号子空间的特征矢量与信号的导向矢量有式(4)所示的关系:

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{T} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{T}$  是  $P \times P$  的满秩矩阵。常规的 ESPRIT 就是通过式(4)式推导出来的。通过删除  $\mathbf{U}_S$  的最后 1 行和第 1 行得到的子矩阵  $\mathbf{U}_1$  和  $\mathbf{U}_2$ , 并有如下结论:

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T} = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Psi} \quad (5)$$

其中  $\mathbf{\Psi} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{S}$  表示为  $\mathbf{S} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_P)$ ,  $z_i = \exp\{-j(2\pi d/\lambda) \sin(\theta_i)\}$  为信源入射角度的函数。矩阵  $\mathbf{\Psi}$  称为矩阵  $\mathbf{S}$  的相似变换, 因此它们具有相同的特征值。在最小二乘 (LS) 或总体最小二乘 (TLS) 的意义下求解式(5), 得到  $\mathbf{\Psi}$  并作特征或奇异值分解:

$$\mathbf{\Psi} = \sum_{i=1}^P \gamma_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H \quad (6)$$

所以波达方向可由下式估计:

$$\theta_i = \arcsin \left[ \frac{\lambda \arg(\gamma_i)}{2\pi d} \right], \quad i = 1, 2, \dots, P \quad (7)$$

其中  $\arg(\bullet)$  表示取复数相角的操作,  $\lambda$  为信号载波的波长,  $d$  表示阵元间距。

常规的 ESPRIT 算法需要两次特征或奇异值分解, 这样不利于实时信号处理, 尤其当阵元维数较大时会带来严重的计算负担。

## 3 一种低复杂度的 QP-ESPRIT 新算法

### 3.1 基于协方差矩阵幂的子空间近似算法

文献[8]中, Hasan 给出了基于采样协方差矩阵幂的信号和噪声子空间近似的算法。该算法是从如下的两个定理<sup>[8]</sup>推出的。

**定理 1** 令  $\lambda_i$ ,  $\mathbf{u}_i$  分别表示协方差矩阵  $\mathbf{R}_{XX}$  第  $i$  个特征值和对应的特征向量, 因此协方差矩阵可以表示为  $\mathbf{R}_{XX} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^H = \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H$ 。假设  $b \geq 0$  并且

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > b > \lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \dots = \lambda_M = \sigma^2 \quad (8)$$

同时令信号和噪声子空间的特征向量表示为  $\mathbf{U}_S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_P\}$  和  $\mathbf{U}_0 = \{\mathbf{u}_{P+1}, \mathbf{u}_{P+2}, \dots, \mathbf{u}_M\}$ , 它们的投影矩阵表示为  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H$  和  $\mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{U}_0 \mathbf{U}_0^H$ 。那么可以得出以下两个结论:

(1)  $\mathbf{U} = \lim_{n \rightarrow \infty} (b^n \mathbf{I}_M - \mathbf{R}_{XX}^n) (b^n \mathbf{I}_M + \mathbf{R}_{XX}^n)^{-1} = \mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}^\perp$ , 因此, 投影矩阵可以表示为  $\mathbf{\Pi} = (\mathbf{I}_M - \mathbf{U})/2$  和  $\mathbf{\Pi}^\perp = (\mathbf{I}_M + \mathbf{U})/2$ 。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{R}_{XX}^n (b^n \mathbf{I}_M + \mathbf{R}_{XX}^n)^{-1} = \mathbf{\Pi}$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n (b^n \mathbf{I}_M + \mathbf{R}_{XX}^n)^{-1} = \mathbf{\Pi}^\perp$ 。

假设  $M$  足够大, 就可以通过式(9)来估计将信号和噪声特征值正确划分的门限  $b$ <sup>[8]</sup>。

$$b = \text{Trace}(\mathbf{R}_{XX}) / M \quad (9)$$

**定理 2** 假设  $\mathbf{E}_P$  为  $M \times P$  的满秩矩阵, 并且  $\mathbf{E}_P^H \mathbf{\Pi}$  是非奇异的。令  $\mathbf{R}_P^{(n)} = \mathbf{R}_{XX}^n \mathbf{E}_P$ , 则  $\mathbf{Q}_n$  可以表示为  $\mathbf{Q}_n = \mathbf{R}_P^{(n)} (\mathbf{R}_P^{(n)H} \mathbf{R}_P^{(n)})^{-1} \mathbf{R}_P^{(n)H}$ 。那么当  $n$  足够大时  $\mathbf{Q}_n$  逼近信号子空间的投影矩阵, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Q}_n = \mathbf{\Pi}$ 。

定理 1 和定理 2 的详细证明请参见文献[8]。

一旦通过定理 1 或定理 2 获得信号和噪声子空间的估计, 那么 Minimum Norm, MUSIC 和 ESPRIT 算法就可以用来解决 DOA 问题。下面我们给出这 3 种算法。

(1) Power Minimum Norm 算法

$$P_{MN}^{(n)}(\theta) = \frac{1}{\left| \mathbf{a}(\theta)^H b^n (b^n \mathbf{I}_M + \mathbf{R}_{XX}^n)^{-1} \mathbf{e}_1 \right|^2} \quad \text{或}$$

$$P_{MN}^{(n)}(\theta) = \frac{1}{\left| \mathbf{a}(\theta)^H (\mathbf{I}_M - \mathbf{R}_P^{(n)} (\mathbf{R}_P^{(n)H} \mathbf{R}_P^{(n)})^{-1} \mathbf{R}_P^{(n)H}) \mathbf{e}_1 \right|^2} \quad (10)$$

(2) Power MUSIC 算法

$$P_{\text{MUSIC}}^{(n)}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{b}^n (\mathbf{b}^n \mathbf{I}_M + \mathbf{R}_{XX}^n)^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad \text{或}$$

$$P_{\text{MUSIC}}^{(n)}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H (\mathbf{I}_M - \mathbf{R}_P^{(n)} (\mathbf{R}_P^{(n)H} \mathbf{R}_P^{(n)})^{-1} \mathbf{R}_P^{(n)H}) \mathbf{a}(\theta)} \quad (11)$$

(3) 使用定理 2 的 Power ESPRIT 算法

定义两个变换矩阵,  $\mathbf{E}_1 \in R^{(M-1) \times M}$  是除去最后一行的单位矩阵, 而  $\mathbf{E}_2 \in R^{(M-1) \times M}$  是除去第一行的单位矩阵。令  $\mathbf{S}$  如第 2 节所定义,  $\mathbf{E}_P$  为  $M \times P$  的满秩矩阵, 那么矩阵  $(\mathbf{E}_1 \mathbf{R}_{XX}^n \mathbf{E}_P)^+ \mathbf{E}_2 \mathbf{R}_{XX}^n \mathbf{E}_P$  将收敛为  $\mathbf{S}$  矩阵的相似矩阵, 即式(12)成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{E}_1 \mathbf{R}_{XX}^n \mathbf{E}_P)^+ \mathbf{E}_2 \mathbf{R}_{XX}^n \mathbf{E}_P = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P} \quad (12)$$

其中  $\mathbf{P}$  是非奇异的矩阵且 “+” 定义为伪逆。这样信源的方向信息就可以通过矩阵  $(\mathbf{E}_1 \mathbf{R}_{XX}^n \mathbf{E}_P)^+ \mathbf{E}_2 \mathbf{R}_{XX}^n \mathbf{E}_P$  的特征值得到。这个结论的证明可参见文献[8]。

### 3.2 无特征分解的信源个数估计算法(SDWED)

从上面 3 个高分辨 DOA 估计算法中, 我们可以看到这 3 种算法的前提是估计信号或噪声子空间。然而定理 2 必须已知信源个数才能估计子空间, 定理 1 虽然不需要这个条件, 但获得子空间的估计后必须确定信源个数才能进一步应用 MUSIC 等高分辨算法。所以信源个数的检测是十分必要的, 目前大多数经典的检测准则都是基于特征分解的, 例如 AIC(Akaike Information Criterion) 和 MDL(Minimum Description Length) 准则, 还有 GDE(Gerschgorin Disk Estimator) 准则等等。因此无特征分解的信源个数检测算法用于提取协方差矩阵的秩是本文的主要工作之一。

这里我们从定理 1 的结论出发, 首先提取协方差矩阵子空间的近似。假设  $n$  足够大, 噪声子空间可以由式(13)近似:

$$\mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{b}^n (\mathbf{b}^n \mathbf{I}_M + \mathbf{R}_{XX}^n)^{-1} \approx \sum_{i=P+1}^M \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (13)$$

其中  $\mathbf{\Pi}^\perp$  的秩为  $M-P$ 。对噪声子空间的投影矩阵  $\mathbf{\Pi}^\perp$  的列进行施密特正交化则  $\mathbf{\Pi}^\perp$  可以表示成  $\mathbf{\Pi}^\perp = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_M) = \mathbf{B} \mathbf{C}$ , 其中  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_M)$ , 并且对于  $i \neq j$ ,  $\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j^H = 0$ 。矩阵  $\mathbf{C}$  可以写成

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & k_{21} & \dots & k_{M1} \\ & 1 & \dots & k_{M2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

在式(14)中, 对于  $i > j$ ,  $k_{ij} = \frac{(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j)}{(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_j)}$  且  $k_{ij}$  代表了  $\mathbf{a}_i$  和  $\mathbf{b}_j$  之间的距离。等式  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_M) = \mathbf{B} \mathbf{C}$  可以重写为式(15)。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 &= k_{21} \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_M &= k_{M1} \mathbf{b}_1 + k_{M2} \mathbf{b}_2 + \dots + k_{M,M-1} \mathbf{b}_{M-1} + \mathbf{b}_M \end{aligned} \right\} (15)$$

式(15)表示矢量  $\mathbf{a}_i$  可以由正交矢量  $\mathbf{b}_j$  表示, 而且矢量  $\mathbf{b}_j$  前的系数  $(k_{i+1,i}, k_{i+2,i}, \dots, k_{M,i})$  代表了矢量组  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_M)$  中

隶属于  $\mathbf{b}_j$  的程度。因此可以选择矩阵  $\mathbf{C}$  的第  $i$  列系数  $(1, k_{i+1,i}, k_{i+2,i}, \dots, k_{M,i})$  中模值最大的元素组成矢量  $\mathbf{K} = (\max c_1, \max c_2, \dots, \max c_M)$ ,  $\mathbf{K}$  代表了矢量  $\mathbf{a}_i$  与矢量  $\mathbf{b}_j$  最大的相似程度。

此时单位化  $\mathbf{b}_i$  得到单位正交矢量  $\mathbf{q}_i = \mathbf{b}_i / |\mathbf{b}_i|$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ )。因此  $\mathbf{\Pi}^\perp$  的 QR 分解可以用式(16)来表示:

$$\mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{Q} \mathbf{R} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M) \{\text{diag}(|\mathbf{b}_1|, |\mathbf{b}_2|, \dots, |\mathbf{b}_M|) \mathbf{C}\} \quad (16)$$

其中  $\mathbf{R} = \text{diag}(|\mathbf{b}_1|, |\mathbf{b}_2|, \dots, |\mathbf{b}_M|) \mathbf{C}$ 。由于  $\mathbf{\Pi}^\perp$  的秩为  $M-P$ , 那么  $\mathbf{R}$  的秩与  $\mathbf{\Pi}^\perp$  的秩相同, 即对于  $i = M-P+1, M-P+2, \dots, M$  则  $|\mathbf{b}_i| = 0$ 。如果投影矩阵的 QR 分解已知, 就可以有效地使用  $\mathbf{R}$  的元素确定矩阵  $\mathbf{\Pi}^\perp$  的秩, 即确定信源的个数。

SDWED 算法的流程描述如下:

步骤 1 使用定理 1 计算噪声子空间的投影矩阵  $\mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{b}^n (\mathbf{b}^n \mathbf{I}_M + \mathbf{R}_{XX}^n)^{-1}$ 。

步骤 2 对矩阵  $\mathbf{\Pi}^\perp$  进行 QR 分解并得到矩阵  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_M)^T$ 。选择  $\mathbf{R}$  矩阵每一行  $\mathbf{r}_i^T = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{iM}) = |\mathbf{b}_i| \mathbf{c}_i$  中模值最大的元素组成一行矢量  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M\} = (|\mathbf{b}_1|, |\mathbf{b}_2|, \dots, |\mathbf{b}_M|) \mathbf{K}^T$ , 其中  $\mu_i = |\mathbf{b}_i| \max c_i$ 。

步骤 3 使用式(17)确定信源的个数:

$$P = M + 1 - \max_i |\mu_i - \mu_{i-1}| \quad (i = 2, 3, \dots, M) \quad (17)$$

若通过上述算法获得信源个数的估计, Power minimum norm 算法, Power MUSIC 算法和 Power ESPRIT 算法就可以使用得到信源的方位估计。

### 3.3 一种低复杂度的 QP-ESPRIT 新算法

文献[8]中提出的 Power ESPRIT 算法是根据定理 2 推出的, 而算法的前提是必须预先知道信源个数的先验知识。本节将进一步使用上一节的结果, 使用噪声子空间投影矩阵的 QR 分解给出一种基于 QR 分解的 Power ESPRIT 新算法 (QP-ESPRIT)。

定理 3 对定理 2 给出的噪声子空间投影矩阵  $\mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{Q} \mathbf{R}$  进行 QR 分解, 噪声子空间投影矩阵  $\mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{Q} \mathbf{R}$  中的  $\mathbf{R}$  矩阵首先被用来确定信源个数  $P$ ; 令  $\mathbf{Q}_{\text{Last}P} = \{\mathbf{q}_{N-P+1}, \mathbf{q}_{N-P+2}, \dots, \mathbf{q}_N\}$  表示  $\mathbf{Q}$  矩阵后  $P$  列向量, 令  $\mathbf{S}$  如第 2 节所定义, 那么矩阵  $(\mathbf{E}_1 \mathbf{Q}_{\text{Last}P})^+ \mathbf{E}_2 \mathbf{Q}_{\text{Last}P}$  将收敛为  $\mathbf{S}$  矩阵的相似矩阵, 即式(18)成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{E}_1 \mathbf{Q}_{\text{Last}P})^+ \mathbf{E}_2 \mathbf{Q}_{\text{Last}P} = (\mathbf{P}')^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P}' \quad (18)$$

其中  $\mathbf{P}'$  是非奇异的矩阵, “+” 定义为伪逆。

证明 要证明矩阵  $(\mathbf{E}_1 \mathbf{Q}_{\text{Last}P})^+ \mathbf{E}_2 \mathbf{Q}_{\text{Last}P}$  将收敛为  $\mathbf{S}$  矩阵的相似矩阵, 我们首先需要证明  $\mathbf{Q}_{\text{Last}P}$  张成信号子空间。根据 QR 分解的性质可知  $\mathbf{Q}$  矩阵的前  $N-P$  个列向量张成噪声投影矩阵  $\mathbf{\Pi}^\perp$  的空间,  $\mathbf{\Pi}^\perp$  可以表示成  $\mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{Q} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{N \times (N-P)} & \mathbf{Q}_{N \times P} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{(N-P) \times N} \end{bmatrix}$ 。因此  $\mathbf{Q}_{N \times (N-P)}$  为一组张成噪声子空间的基, 而矢量  $\mathbf{Q}_{N \times P}$  与  $\mathbf{Q}_{N \times (N-P)}$  正交, 所以张成信

号子空间。进而式(19)成立：

$$\mathbf{Q}_{\text{Last}P} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{\Gamma} \quad (19)$$

其中  $\mathbf{\Gamma}$  是  $P \times P$  的满秩矩阵。又因为  $(\mathbf{E}_1\mathbf{A}(\theta)\mathbf{\Gamma})^+ \mathbf{E}_2\mathbf{A}(\theta)\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{E}_1\mathbf{A}(\theta))^+ \mathbf{E}_2\mathbf{A}(\theta) = (\mathbf{P}')^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}'$ ，所以式(12)可以重写为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{E}_1\mathbf{Q}_{\text{Last}P})^+ \mathbf{E}_2\mathbf{Q}_{\text{Last}P} = (\mathbf{P}')^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}' \quad (20)$$

证毕

那么信源的方位估计就可以对矩阵  $(\mathbf{E}_1\mathbf{Q}_{\text{Last}P})^+ \mathbf{E}_2\mathbf{Q}_{\text{Last}P}$  进行特征分解得到。与文献[8]中提出的 Power ESPRIT 算法不同，本文算法直接对定理 1 给出的噪声子空间的近似进行 QR 分解， $\mathbf{R}$  矩阵和  $\mathbf{Q}$  矩阵分别用于信源个数和方位的估计，因此解决了 Power 方法无特征分解情况下的信源个数检测问题，使得 Power 方法可以得到实际的应用。

### 3.4 运算复杂度分析

如文献[9]中所述，计算子空间矩阵  $(b^n\mathbf{I}_M - \mathbf{R}_{XX}^n)(b^n\mathbf{I}_M + \mathbf{R}_{XX}^n)^{-1}$  的运算复杂度为  $(2r + 4/3)M^3$ ，其中  $n = 2^r$ ， $M$  表示协方差矩阵的阶数。本文提出的算法仅仅增加了一次对噪声子空间投影矩阵 QR 分解的运算量。矩阵 QR 有效地分解算法可以通过快速的 Givens QR 分解获得，文献[9]中给出了快速的 Givens QR 分解的运算量为  $4M^3/3$ 。因此本文算法的总的运算量大约为  $(2r + 2.67)M^3$ 。

而文献[10]给出了基于矩阵奇异值分解(SVD)算法的运算量大约需要  $21M^3$ 。即如果我们选择  $r = 4$  那么对应的  $n = 16$  (对于子空间估计的精度已经足够)，则本文获得噪声子空间投影矩阵及信源个数估计需要的运算量为  $10.67M^3$ ，仅仅是基于奇异值分解算法运算量的 50%，因此本文算法具有大大降低运算复杂度的潜力。

## 4 实验结果与分析

为了验证本文提出方法的有效性，本文设计了两组仿真实验。实验中使用阵元个数为 16 的均匀直线阵列，阵元间距为半波长。真实的信源个数为 3，信号的到达角度为  $\theta = [-5^\circ, 2^\circ, 9^\circ]$ ，信噪比定义为  $\text{SNR} = 10 \lg(\sigma_s^2 / \sigma_n^2)$ 。每组实验都是独立进行 200 次 Monte-Carlo 仿真实验得到。

**实验 1** 不同信噪比和不同采样快拍数下的信源个数检测性能实验对比

将本文提出的信源检测算法(SDWED)与经典的 AIC 和 MDL 准则进行比较。图 1 所示为不同信噪比下 3 种算法的检测性能对比。阵元采样快拍数为 256，3 个信源的信噪比相同并且从 -15dB 变化到 25dB。采样协方差矩阵的幂为 8。由图中可以看出本文算法与 AIC 和 MDL 算法有着近似的性能。图 2 则给出了不同采样快拍数下 3 种算法的性能对比。3 个信源的信噪比固定为 0dB，阵元采样快拍数从 10 变化到 200。可以看出 SDWED 算法在较少快拍数时仍然拥有鲁棒的检测性能。

**实验 2** 不同信噪比和不同采样协方差矩阵的幂下方向估计的均方根误差对比实验

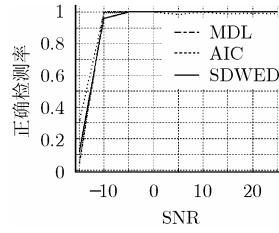


图 1 不同信噪比下 3 种算法的检测性能对比

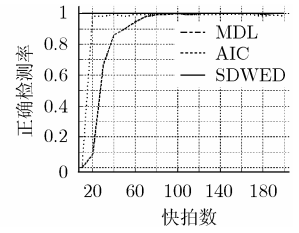


图 2 不同快拍数下 3 种算法的检测性能对比

把本文提出的 QP-ESPRIT 算法，基于奇异值分解(SVD)方法，文献[8]Power ESPRIT 方法和参数估计的 CRB 下界进行对比。图 3(a)和 3(b)给出了不同信噪比下  $2^\circ$  和  $9^\circ$  信号估计的均方根误差的对比。采样快拍数为 256，3 个信源的信噪比相同并且从 -16dB 变化到 20dB。采样协方差矩阵的幂为 16。从图 3 中可以看出本文提出的方法性能与其他两种算法性能几乎一致。由此可见，本文的方法在保证性能的基础上，大大降低了运算复杂度，更适于实际的应用。

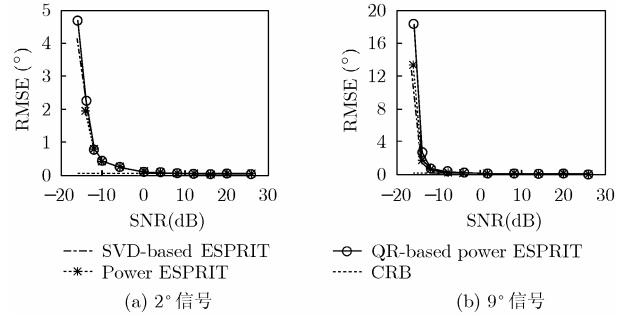


图 3 不同信噪比下方向估计的均方根误差对比

图 4 所示为在不同采样协方差矩阵的幂下方向估计的均方根误差对比。信源个数与到达角度等参数与图 3 实验的相同。从图 4 中可以看出协方差矩阵的幂越大，信源方位估计的误差就越小。但是协方差矩阵的幂为 16 和 32 时估计的误差几乎相同，因此选择协方差矩阵的幂等于 16，即  $r = 4$  时已经足以满足一般的估计精度的要求，而且此时 Power 方法用于估计子空间的运算量仅为基于 SVD 方法的 50%，极大地降低了算法的复杂度。

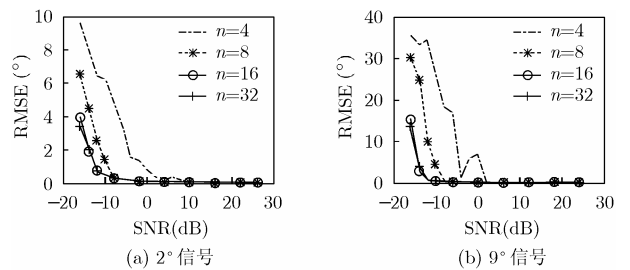


图 4 不同采样协方差矩阵的幂下方向估计的均方根误差对比

## 5 结束语

本文提出了一种低复杂度的QP-ESPRIT新算法，使用采样数据协方差矩阵的幂获得噪声子空间的估计，然后利用噪声子空间的QR分解来进行信源个数估计，并进一步得出

低复杂度的ESPRIT方法。本文算法不需要信源个数的先验知识,而且不需要分离信号和噪声特征值时的门限。解决了Power方法无特征分解情况下的信源个数检测问题,使得Power方法可以得到更为广泛而实际的应用。为了确定信源个数和子空间的估计,该算法与传统的基于SVD分解的算法相比具有近似的性能和较低的计算复杂度。

### 参 考 文 献

- [1] Marcos S and Benidir M. On a high resolution array processing method non-based on the eigenanalysis approach. International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, New Mexico, USA, IEEE, 1990: 2955–2958.
- [2] Xin J M and Akira S. Computationally efficient subspace-based method for direction-of-arrival estimation without eigendecomposition. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2004, 52(4): 876–893.
- [3] Carlos E D and Masoud A. Efficient estimation of the signal subspace without eigendecomposition. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(1): 236–239.
- [4] Arnab K S and Xia W. Minimum-norm Method without eigendecomposition. *IEEE Signal Processing Letters*, 1994, 1(1): 12–14.
- [5] Alex B G. Direction of arrival estimation using generalized minimum norm approach. *Electronics Letters*, 1991, 27(16): 1485–1486.
- [6] Victor T E and Alex B G. Fast algorithm for minimum-norm direction-of-arrival estimation. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1994, 42(9): 2389–2394.
- [7] Mohammed A H and Ali A H. Principal and minor subspace computation with applications. International Symposium on Signal Processing and its Applications, Kuala Lumpur, Malaysia, August 2001: 92–95.
- [8] Mohammed A H, Mahmood R A, and Ali A H. Rational invariant subspace approximations with applications. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2000, 48(11): 3032–3041.
- [9] Golub G H and Van Loan C F. *Matrix Computations*. 3<sup>rd</sup> ED. Baltimore, MD: John Hopkins Univ. Press, 1996: 264–265.
- [10] Golub G H and Reinsch C. Singular value decomposition and least squares solutions. *Numer. Math.*, 1970, 14(4): 403–420.

包志强: 男, 1978年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、高速实时并行信号处理。

吴顺君: 男, 1942年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为自适应信号处理、高速实时并行信号处理等。

张林让: 男, 1966年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为自适应信号处理、波达方向估计、方向图综合。