

具有任意激活函数的时延神经元方程的 Hopf 分岔¹

周尚波 廖晓峰* 虞厥邦

(电子科技大学光电子技术系 成都 610054)

*(重庆大学计算机学院 重庆 400044)

摘 要 该文研究了一个带时延的神经元方程, 分析相应的线性化方程的超越特征方程, 研究了模型的线性稳定性。对于神经元来自过去状态的抑制影响, 作者发现当这个影响值变化并通过一个临界序列时, 这个模型会出现 Hopf 分岔, 利用规范形式理论和中心流形定理, 解析确定了周期解的稳定性与 Hopf 分岔方向, 数值例子也证实了所得结论。

关键词 神经元, 离散时延, 稳定性, Hopf 分岔, 周期解

中图分类号 TN-052

1 引言

在生物神经元中, 通常有几种类型的时延, 如元胞时延, 传输时延和突触时延^[1,2], 时延引入神经元或神经网络中, 可能导致复杂的动力学行为, 以前研究者用稳定平衡点作联想记忆和模式识别等应用问题, 目前已发现应用周期振荡和混沌吸引子作联想记忆和模式识别有着更广阔的前景, 因此, 研究神经系统的振荡和混沌行为是非常重要的且有意义的。

由于神经网络是一个大规模的动力学系统, 其动力学行为的研究也较为复杂, 目前国内外众多学者已将注意力转移到少量的神经元且带时延网络模型的研究上^[1-9], 这是因为这些简单的神经元方程可以藕合成一个大规模的神经网络。在文献 [1] 中, 作者研究了无自连接且带离散时延的两个神经元系统的稳定性, 他们也证明了 Hopf 分岔的存在性。在文献 [2] 中, 作者提出了几个带时延的神经元方程, 这些时延包括了离散时延和连续分布时延, 并讨论了神经元模型的稳定性。文献 [7] 讨论了带弱核的神经元方程并发现这个模型不可能导致稳定性转换; 文献 [5] 讨论了带强核的神经元模型, 仿真实验发现了当平均时延变化时, 模型的动力学行为经历了从稳定到不稳定再到稳定的现象; 在文献 [8] 中, 基于规范形式理论和中心流形定理, 我们证明了周期解的稳定性, 并确定了分岔方向。最近在文献 [9] 中作者在带弱核的两个神经元系统中发现了模型从稳定到不稳定再到稳定的动力学现象并证明了分岔周期解的稳定性; 在文献 [6] 中作者讨论了一个带时延的简单神经元模型并得到了周期解的稳定性和分岔。本文我们讨论更一般的带离散时延且一个神经元方程。我们的模型比文献 [6] 有更一般的激活函数而不必取双曲正切函数, 这为研究其他非单调激活函数的神经元模型提供了一个新的研究方法。

本文组织如下: 第 2 节得到了 Hopf 分岔存在的充分条件; 在第 3 节, 基于规范形式理论和中心流形定理, 我们解析获得了 Hopf 分岔周期解的稳定性与分岔方向; 第 4 节给出了数值仿真实验, 最后得到了结论。

2 局部稳定性和 Hopf 分岔的存在性

在这节, 我们讨论下面的神经元模型:

$$dy(t)/dt = -y(t) + af[y(t)] - abf[y(t-1)], \quad t > 0 \quad (1)$$

这里 $f(\cdot)$ 是任意非线性函数并且它存在三阶连续导数。如果 y^* 是 (1) 式的平衡点, 那么 y^* 满足

$$y^* = a(1-b)f(y^*) \quad (2)$$

¹ 2000-06-29 收到, 2000-12-21 定稿

假设 a 和 b 满足下面的不等式:

$$a > 0, \quad b \geq 0, \quad |a(1-b)|M < 1 \quad (3)$$

这里 $|f'(y^*)| \leq M$. 显然 (3) 式满足时, (2) 式有唯一解, 因此 (1) 式有平衡点 $y = y^*$.

将方程 (1) 用 Taylor 展开式在平衡点 y^* 附近展开

$$\dot{y}(t) = Ly(t) + H(y) + \text{高阶项} \quad (4)$$

这里

$$\begin{cases} Ly(t) &= (a_1 - 1)(y(t) - y^*) + b_1(y(t-1) - y^*) \\ H(y) &= a_2(y(t) - y^*)^2 + a_3(y(t) - y^*)^3 + b_2(y(t-1) - y^*)^2 + b_3(y(t) - y^*)^3 \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} a_1 &= af'(y^*), \quad a_2 = af''(y^*)/2, \quad a_3 = af'''(y^*)/6 \\ b_1 &= -abf'(y^*), \quad b_2 = -abf''(y^*)/2, \quad b_3 = -abf'''(y^*)/6 \end{cases}$$

那么线性化方程为

$$\dot{u} = (a_1 - 1)u(t) + b_1u(t-1), u(t) = y(t) - y^* \quad (5)$$

众所周知, 平衡点 $y = y^*$ 的稳定性依赖于特征方程的根, 因此我们有

引理 1 在复数域内, 考虑下面的超越方程:

$$\lambda = (a_1 - 1) + b_1e^{-\lambda} \quad (6)$$

这里 $a_1 \neq 1$ 和 $b_1 \neq 0$.

(1) 如果 $b_1 > 0$, $a_1 < 2$ 和 $a_1 + b_1 < 1$, 则 (6) 式的解 λ 有负实部.

(2) 如果 $b_1 > 0$, $a_1 < 2$ 和 $a_1 - 1 < |b_1| < [(a_1 - 1)^2 + \theta^2]^{1/2}$, 这里 $\theta = (a_1 - 1)\tan\theta$, 则 (6) 式的解 λ 有负实部.

(3) 如果 $a_1 > 1$ 或 $a_1 < 1$, 则存在 b_1^0 使得 (6) 式在 $b_1 = b_1^0$ 点有纯虚根.

证明 (6) 式的所有根有负实部的充分必要条件是^[10]

(1) $a_1 - 1 < 1$ 和 (2) $a_1 - 1 < -b_1 < [(a_1 - 1)^2 + \theta^2]^{1/2}$. 这里 θ 是 $\theta = (a_1 - 1)\tan\theta$ 的唯一根. 由条件 (1), 我们一定有 $a_1 < 2$. 并且由条件 (2) 我们有 $a_1 + b_1 < 1$, 而且 $-b_1 < [\theta^2 + (a_1 - 1)^2]^{1/2}$. 如果 $b_1 > 0$, 那么这些条件变为 $a_1 < 2$, $a_1 + b_1 < 1$; 如果 $b_1 < 0$, 稳定性条件是 $a_1 < 2$, $a_1 - 1 < |b_1| < [(a_1 - 1)^2 + \theta^2]^{1/2}$. 这就完成了 (1) 和 (2) 的证明. 下面我们证明条件 (3).

假设对某些参数值 $b_1 = b_1^0$, (6) 式有纯虚解 $\lambda = i\omega_0$, $\omega_0 \in R^+$. 这就得到了下面的方程:

$$\begin{cases} a_1 + b_1^0 \cos \omega_0 = 1 \\ \omega_0 + b_1^0 \sin \omega_0 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

或等价于方程

$$\omega_0 = (a_1 - 1)\tan\omega_0 \quad (8)$$

有正根 ω_0 当且仅当 (1) $a_1 > 1$, $\omega_0 \in (n\pi, n\pi + \pi/2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$; (2) $a_1 < 1$, $\omega_0 \in (n\pi - \pi/2, n\pi)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. 因而 λ 是方程 (6) 的解. 证毕

注意到 (2) 成立, 则 $b_1^0 < 0$, 显然与假设 $b_1^0 > 0$ 矛盾, 因此在下面的研究中我们仅考虑情形 (1).

利用引理 1, 我们有下面的定理:

定理 1 (局部稳定性和 Hopf 分岔的存在性)

(1) 如果 $b_1 > 0$, $a_1 < 2$, $a_1 + b_1 < 1$, 那么 $y = y^*$ 是系统 (1) 的唯一稳定平衡点; 如果 $b_1 < 0$, $a_2 < 2$, $a_1 - 1 < |b_1| < [(a_1 - 1)^2 + \theta^2]^{1/2}$, $\theta = (a_1 - 1)\tan\theta$, 那么 $y = y^*$ 是系统 (1) 的唯一稳定平衡点.

(2) 如果 $a_1 > 1$, 那么在点 $b_1 = b_1^0 > 0$ 存在一个从 y^* 到周期轨道的 Hopf 分岔.

证明 (1) 的证明可直接从引理 1 得到, 在下面我们证明条件 (2).

设 $\lambda = \mu + i\omega$ 且利用 (6) 式, 我们得到 μ 和 ω 的方程:

$$\left. \begin{aligned} \mu &= (a_1 - 1) + b_1 e^{-\mu} \cos \omega \\ \omega &= -b_1 e^{-\mu} \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

我们已知道对于 $b_1 = b_1^0$, (6) 式有解 $\lambda_0 = \mu_0 + i\omega_0$, 这里 $\mu_0 = 0$ 和 $\omega_0 \in R^+$.

对 Hopf 分岔出现的第二个条件是^[10] $\left. \frac{d\operatorname{Re}(\lambda)}{db_1} \right|_{b_1=b_1^0} > 0$. 在下面我们证明这个条件也满足.

设 $\mu = \operatorname{Re}(\lambda)$, $\omega = \operatorname{Im}(\lambda)$, 在 b_1 从 (9) 式容易得到

$$\frac{d\mu}{db_1} = e^{-\mu} \cos \omega - b_1 e^{-\mu} \cos \omega \frac{d\mu}{db_1} - b_1 e^{-\mu} \sin \omega \frac{d\omega}{db_1}$$

和

$$\frac{d\omega}{db_1} = -e^{-\mu} \sin \omega + b_1 e^{-\mu} \sin \omega \frac{d\mu}{db_1} - b_1 e^{-\mu} \cos \omega \frac{d\omega}{db_1}$$

从 (7) 式, 当 $b_1 = b_1^0$, $\mu = 0$,

$$\frac{d\mu(\mu_0, \omega_0, b_1^0)}{db_1} = \cos \omega_0 - b_1^0 \cos \omega_0 \frac{d\mu(\mu_0, \omega_0, b_1^0)}{db_1} - b_1^0 \sin \omega_0 \frac{d\omega(\mu_0, \omega_0, b_1^0)}{db_1}$$

和

$$\frac{d\omega(\mu_0, \omega_0, b_1^0)}{db_1} = -\sin \omega_0 + b_1^0 \sin \omega_0 \frac{d\mu(\mu_0, \omega_0, b_1^0)}{db_1} - b_1^0 \cos \omega_0 \frac{d\omega(\mu_0, \omega_0, b_1^0)}{db_1}$$

也就是

$$\frac{d\mu(\mu_0, \omega_0, b_1^0)}{db_1} = \frac{b_1^0 + \cos \omega_0}{(1 + b_1^0 \cos \omega_0)^2 + (b_1^0 \sin \omega_0)^2} = \frac{(b_1^0)^2 + (1 - a_1)}{b_1^0 [(1 + b_1^0 \cos \omega_0)^2 + (b_1^0 \sin \omega_0)^2]}$$

如果 $a_1 < 1$, $b_1^0 > 0$, 那么 $d\mu(\mu_0, \omega_0, b_1^0)/db_1 > 0$; 并且如果 $a_1 > 1$, $b_1^0 > \sqrt{a_1 - 1}$ 或 $-\sqrt{a_1 - 1} < b_1^0 < 0$, 那么 $d\mu(\mu_0, \omega_0, b_1^0)/db_1 > 0$. 证毕

3 分岔周期解的方向和稳定性

在这节我们利用文献 [11] 引入的规范形式方法和中心流形定理来研究分岔周期的方向, 周期和稳定性.

为了方便起见, 设 $b_1 = b_1^0 + \mu$, $\mu \in R$. 那么对 (1) 式 $\mu = 0$ 是 Hopf 分岔. 这节我们假设函数 f 满足

$$f \in C^3(R), \quad uf(u) \neq 0, \quad u \neq 0 \quad (10)$$

那么 (1) 式可再写为

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & (a_1 - 1)u(t) + b_1u(t-1) + a_2u^2(t) + a_3u^3(t) \\ & + b_2u^2(t-1) + b_3u^3(t-1) + O(|u|^4) \end{aligned} \quad (11)$$

对于 $\phi \in C$, 设

$$L_\mu \phi = (a_1 - 1)\phi(0) + b_1\phi(-1) \quad (12)$$

和

$$F(\mu, \phi) = a_2\phi^2(0) + a_3\phi^3(0) + b_2\phi^2(-1) + b_3\phi^3(-1) + O(|\phi|^4) \quad (13)$$

由 Riesz 表示定理, 在 $\theta \in [-1, 0]$ 上存在有界变差函数 $\eta(\theta, \mu)$ 使得

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta), \quad \phi \in C \quad (14)$$

如果我们选择 $\eta(\theta, \mu) = (a_1 - 1)\delta(\theta) + b_1\delta(\theta + 1)$, $\theta \in [-1, 0]$, 那么 (14) 式就得到满足。

对于 $\phi \in C^1([-1, 0], \mathbf{R})$, 定义

$$A(\mu)\phi = \begin{cases} d\phi(\theta)/d\theta, & -1 \leq \theta < 0 \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta), & \theta = 0 \end{cases} \quad (15)$$

和

$$R(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & -1 \leq \theta < 0 \\ F(\mu, \phi), & \theta = 0 \end{cases} \quad (16)$$

那么 (11) 式可重写为

$$\dot{u}_t = A(\mu)u_t + R(\mu)u_t \quad (17)$$

这里 $u(t) = y(t) - y^*$, $u_t = u(t + \theta)$, $\theta \in [-1, 0]$.

对于 $\psi \in C^1[0, 1]$, A 的伴随算子 A^* 定义为

$$A^*\psi(\delta) = \begin{cases} -d\psi(\delta)/d\delta, & 0 < \delta < 1 \\ \int_{-1}^0 d\eta(\delta, \mu)\psi(-\delta), & \delta = 0 \end{cases} \quad (18)$$

对于 $\psi \in C([0, 1]; (C^2)^*)$ 和 $\phi \in C([0, 1]; C^2)$, 我们定义内积为

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{\theta=-1}^0 \int_{s=0}^\theta \bar{\psi}(s - \theta)d\eta(\theta)\phi(s)ds \quad (19)$$

为了计算算子 A 的 Poincare 规范形式, 我们需要计算 A 的属于特征值 $i\omega_0$ 的特征向量 q 和 A^* 的属于特征值 $i\omega_0$ 的特征向量 q^* .

直接计算, 我们得到 $A(0)$ 的相应于 $i\omega_0$ 的特征向量:

$$q(\theta) = \exp(i\omega_0\theta), \quad -1 \leq \theta < 0 \quad (20)$$

和 $A^*(0)$ 的相应于 $-i\omega_0$ 的特征向量:

$$q^*(\theta) = D \exp(i\omega_0s), \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (21)$$

这里 $D = 1/(1 + b_1 e^{i\omega_0})$, 因此, 我们有

$$\langle q^*, q \rangle = 1, \quad \langle q^*, \bar{q} \rangle = 0 \quad (22)$$

下面我们来证实 $\langle q^*, q \rangle = 1$. 事实上, 从 (19) 式, 我们有

$$\begin{aligned} \langle q^*, q \rangle &= \bar{q}^*(0)q(0) - \int_{\theta=-1}^0 \int_{s=0}^{\theta} \bar{q}^*(s-\theta) d\eta(\theta) q(s) ds \\ &= \bar{D} - \int_{\theta=-1}^0 \int_{s=0}^{\theta} \bar{D} e^{-i\omega_0(s-\theta)} d\eta(\theta) e^{i\omega_0 s} ds = (1 + b_1 e^{-i\omega_0}) \bar{D} = 1 \end{aligned}$$

同样, 我们能证实 $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$. 注意到 $Aq(0) = i\omega_0 q(0)$, $A^* q^*(0) = -i\omega_0 q^*(0)$. 我们有: $(a_1 - 1) + b_1 e^{-i\omega_0} = i\omega_0$, $(a_1 - 1) + b_1 e^{i\omega_0} = -i\omega_0$. 因此 $b_1[e^{i\omega_0} - e^{-i\omega_0}] = -2i\omega_0$. 且

$$\begin{aligned} \langle q^*, \bar{q} \rangle &= \bar{q}^*(0)\bar{q}(0) - \int_{\theta=-1}^0 \int_{s=0}^{\theta} \bar{D} e^{-i\omega_0(s-\theta)} [(a_1 - 1)\delta(\theta) + b_1\delta(\theta + 1)] e^{-i\omega_0\theta} d\theta ds \\ &= \bar{D} - \bar{D} \int_{\theta=-1}^0 \int_{s=0}^{\theta} [(a_1 - 1)\delta(\theta) + b_1\delta(\theta + 1)] e^{i\omega_0\theta} e^{2i\omega_0 s} d\theta ds \\ &= \bar{D}[1 + (b_1/(2i\omega_0))(e^{i\omega_0} - e^{-i\omega_0})] = 0 \end{aligned}$$

在下面的叙述中, 我们沿用文献 [11] 的记号. 设

$$z = \langle q^*, u_t \rangle \quad (23)$$

那么

$$\dot{z}(t) = i\omega_0 z(t) + \bar{q}^* \hat{f}(z, \bar{z}) \quad (24)$$

这里

$$\hat{f}(z, \bar{z}) = F(0, w(z, \bar{z}) + 2\text{Re}(zq(0))) \quad (25)$$

那么 (24) 式可写为

$$\dot{z}(t) = i\omega_0 z(t) + g(z, \bar{z}) \quad (26)$$

且 $w(z, \bar{z}) = w_{20}z^2/2 + w_{11}z\bar{z} + w_{02}\bar{z}^2/2 + \dots$ 和 $g(z, \bar{z}) = g_{20}z^2/2 + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\bar{z}^2/2 + g_{21}z^2\bar{z}/6 + \dots$. 因而, 我们有

$$\dot{w} = \begin{cases} Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0)\hat{f}q(\theta)\}, & -1 \leq \theta < 0 \\ Aw - 2\text{Re}\{\bar{q}^*(0)\hat{f}q(0)\} + \hat{f}, & \theta = 0 \end{cases} \quad (27)$$

上式可重写为

$$\dot{w} = Aw + H(z, \bar{z}) \quad (28)$$

$$H(z, \bar{z}) = H_{20}z^2/2 + H_{11}z\bar{z} + H_{02}\bar{z}^2/2 + \dots \quad (29)$$

注意到

$$u_t(\theta) = w(z, \bar{z})(\theta) + ze^{i\omega_0\theta} + \bar{z}e^{-i\omega_0\theta} \quad (30)$$

因而, 我们得到

$$\begin{aligned} u_t(0) &= w(z, \bar{z})(0) + z + \bar{z} \\ u_t(-1) &= w(z, \bar{z})(-1) + ze^{-i\omega_0} + \bar{z}e^{i\omega_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= a_1[z^2 + \bar{z}^2 + 2z\bar{z} + 2w_{11}(0)z^2\bar{z} + w_{02}(0)z\bar{z}^2 + w_{20}(0)z^2\bar{z} + 2w_{11}(0)z\bar{z}^2 + \dots] \\
&\quad + a_3[3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + \dots] + b_2[z^2e^{-2i\omega_0} + \bar{z}^2e^{2i\omega_0} + 2z\bar{z} + 2e^{-i\omega_0}w_{11}(-1)z^2\bar{z} \\
&\quad + e^{-i\omega_0}w_{02}(-1)z\bar{z}^2 + e^{i\omega_0}w_{20}(-1)z^2\bar{z} + 2e^{-i\omega_0}w_{11}(-1)z\bar{z}^2 + \dots] \\
&\quad + b_3[3z^2\bar{z}e^{-i\omega_0} + 3z\bar{z}^2e^{i\omega_0} + \dots] \\
&= (a_2 + b_2e^{-2i\omega_0})z^2 + 2(a_2 + b_2)z\bar{z} + (a_2 + b_2e^{2i\omega_0})\bar{z}^2 \\
&\quad + [2a_2w_{11}(0) + a_2w_{20}(0) + 3a_3 + 2b_2e^{-i\omega_0}w_{11}(-1) + b_2e^{2i\omega_0}w_{20}(-1) + 3b_3e^{-i\omega_0}]z^2\bar{z} \\
&\quad + [2a_2w_{11}(0) + a_2w_{02}(0) + 3a_3 + 2b_2e^{i\omega_0}w_{11}(-1) + b_2e^{-i\omega_0}w_{02}(-1) + 3b_3e^{i\omega_0}]z\bar{z}^2 + \dots
\end{aligned}$$

另一方面, 我们有

$$\begin{aligned}
\bar{q}^*(0)\hat{f} &= \bar{D}(a_2 + b_2e^{-2i\omega_0})z^2 + 2\bar{D}(a_2 + b_2)z\bar{z} + \bar{D}(a_2 + b_2e^{2i\omega_0})\bar{z}^2 \\
&\quad + \bar{D}[2a_2w_{11}(0) + a_2w_{20}(0) + 3a_3 + 2b_2e^{-i\omega_0}w_{11}(-1) + b_2e^{i\omega_0}w_{20}(-1) + 3b_3e^{-i\omega_0}]z^2\bar{z} \\
&\quad + \bar{D}[2a_2w_{11}(0) + a_2w_{02}(0) + 3a_3 + 2b_2e^{i\omega_0}w_{11}(-1) + b_2e^{-i\omega_0}w_{02}(-1) + 3b_3e^{i\omega_0}]z\bar{z}^2 + \dots
\end{aligned}$$

与下方程:

$$g(z, \bar{z}) = \bar{q}^*(0)\hat{f}(z, \bar{z})$$

比较系数我们得到

$$\left. \begin{aligned} g_{20} &= 2\bar{D}(a_2 + b_2e^{-i\omega_0}) \\ g_{11} &= 2\bar{D}(a_2 + b_2) \\ g_{02} &= 2\bar{D}(a_2 + b_2e^{i\omega_0}) \\ g_{21} &= 2\bar{D}[2a_2w_{11}(0) + a_2w_{20}(0) + 3a_3 \\ &\quad + 2b_2e^{-i\omega_0}w_{11}(-1) + b_2e^{i\omega_0}w_{20}(-1) + 3b_3e^{-i\omega_0}] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

由于

$$\begin{aligned}
H(z, \bar{z}, \theta) &= -2\text{Re}(\bar{q}^*(0)\hat{f}q(\theta)) = -[\bar{q}^*(0)\hat{f}q(\theta) + q^*(0)\bar{f}\bar{q}(\theta)] = gq(\theta) - \bar{g}\bar{q}(\theta) \\
&= -\left(g_{20}\frac{z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + g_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots\right)q(\theta) - \left(\bar{g}_{20}\frac{z^2}{2} + \bar{g}_{11}z\bar{z} + \bar{g}_{02}\frac{\bar{z}^2}{2} + \dots\right)\bar{q}(\theta)
\end{aligned}$$

因此, 我们有

$$H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta)$$

和

$$H_{11}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta)$$

在文献 [11] 已证明

$$\left. \begin{aligned} (A - 2i\omega_0)w_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta) \\ Aw_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta) \\ (A + 2i\omega_0)w_{02}(\theta) &= -H_{02}(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

从 (27) 式和 (15) 式得到

$$\dot{w}_{20}(\theta) = 2i\omega_0w_{20}(\theta) - g_{20}q(0)e^{i\omega_0\theta} - \bar{g}_{02}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0\theta}$$

解上面的方程我们得到

$$w_{20}(\theta) = \frac{g_{20}}{i\omega_0} q(0) e^{i\omega_0 \theta} + \frac{\bar{g}_{20}}{3i\omega_0} \bar{q}(0) e^{-i\omega_0 \theta} + E_1 e^{2i\omega_0 \theta} \quad (33)$$

类似可得

$$w_{11}(\theta) = -\frac{g_{11}}{i\omega_0} q(0) e^{i\omega_0 \theta} + \frac{\bar{g}_{11}}{i\omega_0} \bar{q}(0) e^{-i\omega_0 \theta} + E_2 \quad (34)$$

这里 E_1 和 E_2 是两个实常数并且可从 H 置 $\theta = 0$ 而得到, 事实上, 因为

$$H(z, \bar{z}, 0) = -2\text{Re}\{\bar{q}^* \hat{f}q(0)\} + \hat{f}$$

我们有

$$H_{20}(0) = -g_{20}q(0) - \bar{g}_{20}\bar{q}(0) + 2(a_2 + b_2 e^{-2i\omega_0})$$

和

$$H_{11}(0) = -g_{11}q(0) - \bar{g}_{11}\bar{q}(0) + 2(a_2 + b_2)$$

由 (32) 式和 (15) 式, 我们有

$$(a_1 - 1)w_{20}(0) + b_1 w_{20}(-1) = 2i\omega_0 w_{20}(0) - H_{20}(0) \quad (35)$$

和

$$(a_1 - 1)w_{11}(0) + b_1 w_{11}(-1) = -H_{11}(0) \quad (36)$$

将 (33) 式代入 (35) 式, 我们得到

$$E_1 = \frac{[(1 - a_1) - 2i\omega_0] \left[\frac{g_{20}}{i\omega_0} q(0) + \frac{\bar{g}_{20}}{3i\omega_0} \bar{q}(0) \right] - b_1 \left[\frac{g_{20}}{i\omega_0} q(0) e^{-i\omega_0} + \frac{\bar{g}_{20}}{3i\omega_0} \bar{q}(0) e^{i\omega_0} \right] - H_{20}(0)}{(a_1 - 1) + b_2 e^{-2i\omega_0} - 2i\omega_0} \quad (37)$$

类似地

$$E_2 = \frac{[(a_1 - 1) \left[\frac{g_{11}}{i\omega_0} q(0) - \frac{\bar{g}_{11}}{i\omega_0} \bar{q}(0) \right] + b_1 \left[\frac{g_{11}}{i\omega_0} q(0) e^{-i\omega_0} - \frac{\bar{g}_{11}}{i\omega_0} \bar{q}(0) e^{i\omega_0} \right] - H_{11}(0)}{(a_1 - 1) + b_1} \quad (38)$$

基于上面的分析, 我们能计算下面的量:

$$\left. \begin{aligned} C_1(0) &= \frac{i}{2\omega_0} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{g_{21}}{2} \\ \mu_2 &= -\text{Re}\{C_1(0)\} / [\text{Re}\lambda'(0)] \\ T_2 &= [\text{Im}\{C_1(0)\} + \mu_2 \text{Im}\lambda'(0)] / \omega_0 \\ \beta_2 &= 2\text{Re}\{C_1(0)\} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

定理 2 在 (39) 式中, μ_2 确定了 Hopf 分岔方向: 如果 $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 < 0$), 那么 Hopf 分岔是上临界的 (下临界的) 并且对于 $b_1 > b_1^0$ ($< b_1^0$) 分岔周期解存在; β_2 确定了分岔周期解的稳定性: 如果 $\beta_2 < 0$ (> 0), 那么分岔周期解是轨道稳定的 (不稳定的); T_2 确定了分岔周期解的周期: 如果 $T_2 > 0$ (< 0), 那么周期增加 (减少)。

4 数值例子

在这节，我们考虑系统 (1) 式的几种具体情形，为了方便起见取 $f(x) = \tanh(x)$ ，对于不同的 a, b ，定理 2 中各种参数值的计算结果见表 1。注意表 1 中第一行的值是文献 [6] 的结果，因此文献 [6] 的结果是本文的一个推论或一个具体例子，而本文推广了文献 [6] 的结论到更一般的神经元模型。

我们用表 1 的第 1 行和第 3 行的数值进行了计算机仿真，采用四阶 Runge-Kutta 方法，其结果与我们的理论相吻合 (见图 1-4)。

表 1 对不同的 a, b ，定理 2 中的参数值

a	b	ω_0	$C_1(0)$	μ_2	β_2
1	1.5808	4.5864	-6	586.5716	-12
2	3	4.4934	$-6.3489 - 0.8872i$	590.1008	-12.6979
3	2	4.2748	$-7.0101 - 1.5496i$	606.2079	-14.0203
4	10	3.9164	$-6.3426 - 0.3264i$	769.3457	-12.6853
5	3	3.7902	$-7.3015 - 0.9223i$	1229.2	-14.6030
6	9	4.5864	$-0.60805 - 0.5645i$	2580.3	-12.1618

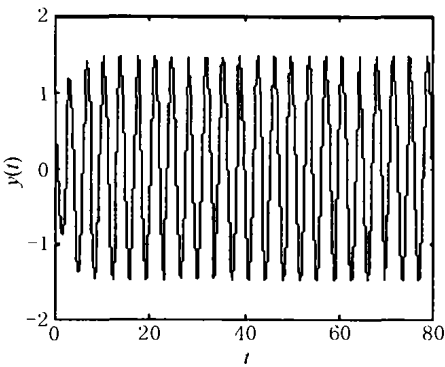


图 1 $a = 1, b = 1.5808$, 系统 (1) 式的波形图

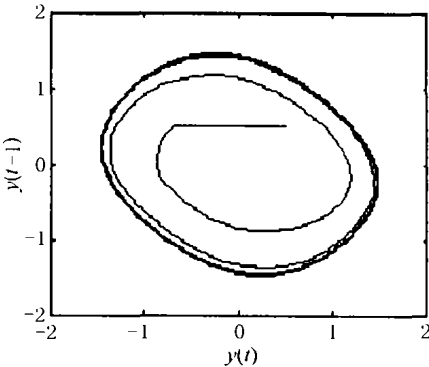


图 2 $a = 1, b = 1.5808$, 系统 (1) 式的相图

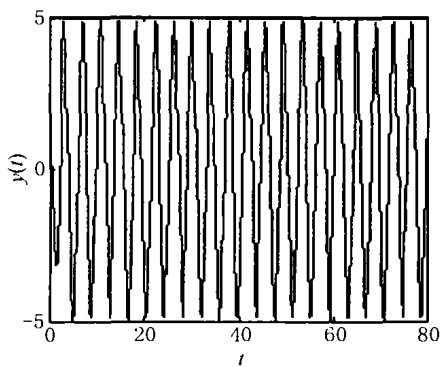


图 3 $a = 3, b = 2$, 系统 (1) 式的波形图

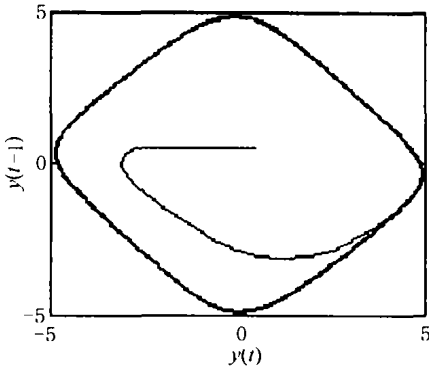


图 4 $a = 3, b = 2$, 系统 (1) 式的相图

5 结 论

本文我们研究了带离散时延神经元模型的 Hopf 分岔, 获得了判定分岔周期解的稳定性的解析公式。我们的结果推广了文献 [6] 的结果, 并且讨论了更一般的神经元模型以及激活函数可取任意的非单调函数。今后进一步可研究的方向是两个带离散时延神经元模型的 Hopf 分岔以及一个带离散时延神经元模型的混沌现象。

参 考 文 献

- [1] K. Gopalsmy, I. Leung, Delay induced periodicity in a neural network of excitation and inhibition, *Physica D*, 1996, 89, 395-426.
- [2] K. Gopalsmay, Issic K. C. Leung, Convergence under dynamical thresholds with delays, *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1994, NN-8(2), 341-348.
- [3] L. Olien, J. Belair, Bifurcations, stability and monotonicity properties of a delayed neural network model, *Physica D*, 1997, 102, 349-363.
- [4] J. Belair, S. Dufour, Stability in a three-dimensional system of delay-differential equations, *Can. Appl. Math. Quart.*, 1996, 4(2), 135-156.
- [5] 廖晓峰, 吴中福, 虞厥邦, 带分布时延神经网络, 从稳定到振荡再到稳定的动力学现象, *电子科学学刊*, 2001, 23(7), 687-692.
- [6] 王炎, 廖晓峰, 吴中福, 虞厥邦, 一个带时延神经网络的分岔现象研究, *电子科学学刊*, 2000, 22(6), 972-977.
- [7] Xiaofeng Liao, Zhongfu, Juebang Yu, Hopf bifurcation analysis of a neural system with a continuously distributed delay, *International Symposium on Signal Processing and Intelligent System*, Guangzhou, China, Nov. 1999.
- [8] Xiaofeng Liao, Zhongfu, Juebang Yu, Stability switches and bifurcation analysis of a neural network with continuously distributed delay, *IEEE Trans. on SMC-I*, 1999, SMC-I-29(6), 692-696.
- [9] Xiaofeng Liao, Kwok-wo Wong, Zhongfu Wu, Bifurcation analysis in a two-neuron system with continuously distributed delays, Accepted by *Physical D*, to appear.
- [10] K. Jack Hale, Sjoerd M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, New York, Springer-verlag, Inc., 1993.
- [11] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y. H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, London, Cambridge, Univ, Press, 1981.

HOPF BIFURCATION FOR DELAYED NEURON EQUATION WITH ARBITRARY ACTIVATION FUNCTION

Zhou Shangbo Liao Xiaofeng* Yu Juebang

(Dept. of Opto-electronic Technology, UEST of China, Chengdu 610054, China)

*(Faculty of Computer Sci. and Eng., Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract In this paper, a neural equation with discrete time delay is studied, The transcendental equation corresponding to the above-mentioned linearized system is analyzed. The linear stability for this model has been investigated. For the case with inhibitory influence from the past state, it is found that Hopf bifurcation occurs when this influence varies and passes through a sequence of critical values. The stability of bifurcating periodic solutions and the direction of Hopf bifurcation are determined by applying the normal form theory and the center manifold theorem. Some numerical examples illustrated those results.

Key words Neuron, Discrete time delay, Stability, Holf bifurcation, Periodic solution

周尚波: 男, 1963 年生, 博士生, 主要兴趣是神经网络动力学与混沌保密通信。

廖晓峰: 男, 1964 年生, 博士后, 教授, 主要兴趣是神经网络动力学, 混沌保密通信与信号处理。

虞厥邦: 男, 1932 年生, 教授, 主要兴趣是非线性网络与神经网络。