

基于主奇异矢量的L型阵列相干信号二维DOA估计方法

唐晓杰* 何明浩 冯明月 陈昌孝 韩俊
(空军预警学院 武汉 430019)

摘要: 针对现有L型阵列相干信号DOA估计算法精度不高、孔径损失较大的问题, 该文提出一种基于主奇异矢量的解相干(L-PUMA)方法以及改进的主奇异矢量法(L-MPUMA)。L-PUMA算法首先对互协方差矩阵进行降噪, 再通过奇异值分解得到2维主奇异矢量, 然后利用加权最小二乘法得到线性预测方程的多项式系数, 该线性预测方程的根即为信号的DOA估计, 最后提出一种新的配对算法实现仰角和方位角的配对。L-MPUMA算法利用反向共轭变换构造增广主奇异矢量, 进一步提高了数据利用率, 克服了信号完全相干时L-PUMA算法性能下降严重的问题, 仿真实验验证了所提算法的高效性。

关键词: 2维DOA估计; 相干信号; L型阵列; 加权最小二乘法

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)11-2579-08

DOI: 10.11999/JEIT190455

Two-dimensional DOA Estimation Method for L-shaped Array of Coherent Signals Based on Main Singular Vector

TANG Xiaojie HE Minghao FENG Mingyue CHEN Changxiao HAN Jun
(Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China)

Abstract: In order to handle the problem that the existing DOA estimation algorithm for L-shaped array of coherent signals is not accurate and the aperture loss is large, a method named L-shaped array Principal-singular-vector Utilization for Modal Analysis (L-PUMA) and its modified algorithm named L-shaped array Modified PUMA (L-MPUMA) are proposed. L-PUMA algorithm first denoises the cross-covariance matrix, then obtains the two-dimensional main singular vector by singular value decomposition, and then obtains the polynomial coefficient of the linear prediction equation by weighted least squares method. The root of the linear prediction equation is the DOA estimation of the signals. Finally, a new pairing algorithm is proposed to realize the pairing of elevation and azimuth. L-MPUMA algorithm uses the inverse conjugate transform to obtain the augmented main singular vector, which further improves the data utilization rate and overcomes the problem that the performance of L-PUMA deteriorates seriously when the signals are completely coherent. Simulation experiments verify the efficiency of the proposed algorithm.

Key words: Two-Dimensional DOA estimation; Coherent signals; L-shaped array; Weighted least squares

1 引言

到达角(Direction-Of-Arrival, DOA)估计是信号处理的一个重要分支, 广泛应用于雷达目标探测、语音通信、无源定位等领域^[1-4]。在实际应用中, 通常需要通过2维DOA估计获得辐射源的方位角和俯仰角信息。不同的阵列结构会对DOA估计性能产生不同的影响, 其中L型阵列结构简单, 受

到许多研究者的关注。

最初的2维DOA估计算法大多基于2维谱峰搜索^[5], 计算量大且估计精度不高。文献[6]利用ES-PRIT思想分别进行方位角和俯仰角估计, 存在角度配对问题。文献[7]通过解析优化获得方位角与仰角间的关系, 避免了复杂的计算, 但估计精度有所下降。文献[8]将三线性分解运用到2维DOA估计中, 该算法无需谱峰搜索, 且能够实现参数自动配对, 但其中的交替迭代过程仍具有较大的计算量。文献[9]提出了一种自动配对的DOA估计算法, 在保证精度的前提下进一步降低了运算复杂度。

然而, 当存在相干信号时, 上述方法性能出现恶化。针对相干信号, 文献[10]将空间平滑(Spa-

收稿日期: 2019-06-20; 改回日期: 2020-04-01; 网络出版: 2020-08-29

*通信作者: 唐晓杰 944717905@qq.com

基金项目: 湖北省自然科学基金(2019CFB383)

Foundation Item: The Natural Science Foundation of Hubei Province (2019CFB383)

tial Smoothing, SS)方法扩展到2维阵列,但是需要复杂的2维谱峰搜索。文献[11]提出了一种互相关矩阵ESPRIT(Cross Correlation Matrix ESPRIT, CCM-ESPRIT)算法,将互相关矩阵划分成多个子阵来消除信号的相干性,但是该方法孔径损失较大。文献[12]在此基础上提出了互相关矩阵相关矢量(Cross Correlation Matrix Correlation Vector Method, CCM-CVM)算法,减少了孔径损失,但也降低了估计精度,该文献同时提出了一种名为CCM-MCVM的改进算法,略微提高了估计精度,但增加了算法复杂度。文献[11]和文献[12]都使用了同一种角度自动配对算法,这种配对算法在多个相干信号条件下极易导致配对错误。文献[13]将稀疏重构运用到L型阵列DOA估计中,利用正交匹配追踪(OMP)法分别估计独立信号和相干信号,有效减小了孔径损失问题,但同时也引入了网格失配误差。

文献[14]针对相干信号DOA估计提出了一种主奇异矢量分析法(Principal-singular-vector Utilization for Modal Analysis, PUMA),具有估计精度高、复杂度低的优点。受文献[14]启发,本文将PUMA算法扩展到L型阵列,提出了L-PUMA算法及其改进算法L-MPUMA,进一步提高了估计精度,减少了孔径损失。本文使用 $(\cdot)^T$, $(\cdot)^H$, $(\cdot)^{-1}$ 和 $(\cdot)^+$ 分别表示转置、共轭转置、逆运算和伪逆运算, $E\{\cdot\}$, $\text{vec}(\cdot)$, $\text{tr}(\cdot)$, $\text{sum}(\cdot)$, $\text{diag}(\cdot)$ 和 $\text{blkdiag}(\cdot)$ 分别表示期望、矢量化操作、矩阵的迹、求和、对角化和分块对角化操作, \mathbf{I}_m 表示 $m \times m$ 维单位矩阵, $\mathbf{0}_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维零矩阵, \mathbf{J}_m 表示 $m \times m$ 维置换矩阵, \otimes 表示Kronecker积。

2 信号模型

假设接收阵列是由 $x-z$ 平面内沿 x 轴和 z 轴的 M 元均匀线阵组成的L型阵列,共用原点位置的参考阵元 z_0 ,同一轴上相邻阵元间距 d 等于半波 $\lambda/2$,总共有阵元 $2M-1$ 个,阵列结构如图1所示。假设3维空间内有 K 个窄带信号入射到L型阵列上,满足 $K < M$ 。前 N_u 个信号是独立信号,后 $K-N_u$ 个相干信号分为 N_c 组,组间信号相互独立,独立信号与相干信号组数之和 $N = N_u + N_c$,第 k 个信号的仰角为 θ_k ,方位角为 ϕ_k 。

x 轴和 z 轴的接收数据可分别表示为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}_x \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_1(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{A}_z \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_2(t) \quad (2)$$

式中 $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T \in \mathbb{C}^{K \times 1}$ 为入射信号矢量, $\mathbf{N}_1(t)$ 和 $\mathbf{N}_2(t)$ 表示 M 维零均值高斯白噪声,噪声功率为 σ^2 ,且相互独立。 $\mathbf{A}_x = [\mathbf{a}(\theta_1,$

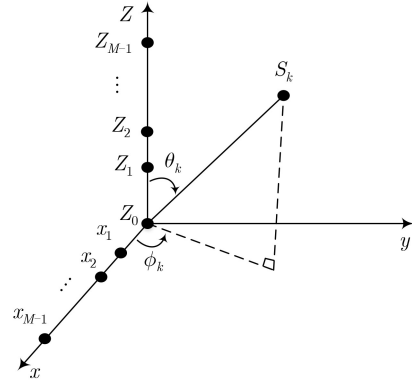


图1 L型阵列几何结构

$\phi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \phi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K, \phi_K)] \in \mathbb{C}^{M \times K}$ 为 x 轴阵列流形, $\mathbf{A}_z = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)] \in \mathbb{C}^{M \times K}$ 为 z 轴阵列流形。其中 $\mathbf{a}(\theta_i, \phi_i) = [1, e^{-j2\pi d \sin(\theta_i) \cos(\phi_i)/\lambda}, \dots, e^{-j2\pi(M-1)d \sin(\theta_i) \cos(\phi_i)/\lambda}]^T$, $\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{-j2\pi d \cos(\theta_i)/\lambda}, \dots, e^{-j2\pi(M-1)d \cos(\theta_i)/\lambda}]^T$ 。

3 L-PUMA算法

L-PUMA算法分为3个步骤,首先是降噪处理,然后是仰角和方位角估计,最后是角度配对。

3.1 互协方差矩阵降噪

在L型阵列中,除了原点处的噪声, x 轴和 z 轴的噪声矢量是相互独立的,其噪声协方差为0,而 x 轴和 z 轴又共用原点处的参考阵元,因此原点位置的噪声协方差为 σ^2 。噪声协方差矩阵可表示为

$$E\{\mathbf{N}_1(t)\mathbf{N}_2^H(t)\} = \sigma^2 \times \text{blkdiag}(1, \mathbf{0}_{M-1, M-1}) = \mathbf{Q}_0 \quad (3)$$

易得,接收数据的互协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{Z,X} &= E\{\mathbf{Z}(t)\mathbf{X}^H(t)\} \\ &= \mathbf{A}_z \mathbf{R}_S \mathbf{A}_x^H + \mathbf{Q}_0 \\ &= \mathbf{U}_{S1} \Omega_{S1} \mathbf{V}_{S1}^H + \mathbf{U}_{n1} \Omega_{n1} \mathbf{V}_{n1}^H \end{aligned} \quad (4)$$

式中 Ω_{S1} 为大奇异值, Ω_{n1} 为小奇异值, \mathbf{U}_{S1} , \mathbf{V}_{S1} 分别为大奇异值对应的左、右奇异矢量矩阵, \mathbf{U}_{n1} , \mathbf{V}_{n1} 分别为小奇异值对应的左、右奇异矢量矩阵。同理,接收数据的自协方差矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_Z &= E\{\mathbf{Z}(t)\mathbf{Z}^H(t)\} \\ &= \mathbf{A}_z \mathbf{R}_S \mathbf{A}_z^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M \\ &= \mathbf{U}_{S2} \Omega_{S2} \mathbf{U}_{S2}^H + \mathbf{U}_{n2} \Omega_{n2} \mathbf{U}_{n2}^H \end{aligned} \quad (5)$$

式中 Ω_{S2} 为大特征值, Ω_{n2} 为小特征值, \mathbf{U}_{S2} 和 \mathbf{U}_{n2} 分别为大特征值和小特征值对应的特征矢量矩阵。

许多文献选择使用互协方差来做降噪处理[11,12],但没有考虑到互协方差共同参考阵元而引入的噪声矩阵 \mathbf{Q}_0 ,实际上 \mathbf{Q}_0 会比 $\sigma^2 \mathbf{I}_M$ 带来更大的估计误差。将式(5)对应的自协方差矩阵左乘 \mathbf{U}_{n2}^H ,右乘 \mathbf{U}_{n2} ,有

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}_{n2}^H (\mathbf{A}_z \mathbf{R}_S \mathbf{A}_z^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M) \mathbf{U}_{n2} \\ &= \mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{U}_{S2} \Omega_{S2} \mathbf{U}_{S2}^H \mathbf{U}_{n2} + \sigma^2 \mathbf{I}_{M-K} \\ &= \sigma^2 \mathbf{I}_{M-K} \end{aligned} \quad (6)$$

同时减去 $\sigma^2 \mathbf{I}_{M-K}$ ，有 $\mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{A}_z \mathbf{R}_S \mathbf{A}_z^H \mathbf{U}_{n2} = \mathbf{0}$ ，即 $\mathbf{U}_{n2}^H \mathbf{A}_z = \mathbf{0}$ 。

同理，将式(4)对应的互协方差矩阵左乘 \mathbf{U}_{n1}^H ，右乘 \mathbf{V}_{n1} ，有

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}_{n1}^H (\mathbf{A}_z \mathbf{R}_S \mathbf{A}_z^H + \mathbf{Q}_0) \mathbf{V}_{n1} \\ &= \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{U}_{S1} \Omega_{S1} \mathbf{V}_{S1}^H \mathbf{V}_{n1} + \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{U}_{n1} \Omega_{n1} \mathbf{V}_{n1}^H \mathbf{V}_{n1} \\ &= \Omega_{n1} \end{aligned} \quad (7)$$

将式(7)第1和第3行相减，有 $\mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{A}_z \mathbf{R}_S \mathbf{A}_z^H \mathbf{V}_{n1} = \Omega_{n1} - \mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{Q}_0 \mathbf{V}_{n1} \neq 0$ ，所以有 $\mathbf{U}_{n1}^H \mathbf{A}_z \neq 0$ 。可知阵列流形 \mathbf{A}_z 与噪声子空间 \mathbf{U}_{n2} 正交，而与噪声子空间 \mathbf{U}_{n1} 不正交。

在实际情况中，快拍数 L 为有限值，此时互协方差矩阵近似表示为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_{Z,X} &= \mathbf{Z} \mathbf{X}^H / L \\ &= \mathbf{A}_z \mathbf{R}_S \mathbf{A}_z^H + \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1(\sigma^2, L) \end{aligned} \quad (8)$$

式中， L 为快拍数， \mathbf{Z} 和 \mathbf{X} 均为 $M \times L$ 维矢量， $\mathbf{Q}_1(\sigma^2, L)$ 是 σ^2 和 L 的函数，包含了有限快拍产生的误差以及信号噪声间的互相关成分。同理，自协方差矩阵近似表示为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{R}}_Z &= \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H / L \\ &= \mathbf{A}_z \mathbf{R}_S \mathbf{A}_z^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M + \mathbf{Q}_2(\sigma^2, L) \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{Q}_2(\sigma^2, L)$ 包含了相同的噪声成分。易知，当快拍数有限时，噪声子空间 \mathbf{U}_{n1} 、 \mathbf{U}_{n2} 与阵列流形 \mathbf{A}_z 均不正交。若选取互协方差矩阵进行后续的DOA估计，则需要减少误差的影响，其中 \mathbf{Q}_1 和 \mathbf{Q}_2 为随机误差，无法消除，而 \mathbf{Q}_0 只需要估计出噪声功率即可进行消除。

根据式(5)对 \mathbf{R}_Z 进行特征值分解得到噪声功率的估计值 $\hat{\sigma}^2 = \text{sum}(\text{diag}(\Omega_{n2})) / (M - N)$ ，最后可得降噪后的互协方差矩阵 $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}_{Z,X} - \hat{\mathbf{Q}}_0$ ，其中 $\hat{\mathbf{Q}}_0$ 为 \mathbf{Q}_0 的估计值。

3.2 仰角和方位角估计

L-PUMA算法需要预先知道相干信号的组数 N 和总数 K ，可以根据文献[15]所提的改进盖氏圆算法获得，在估计出 N 和 K 之后，进行仰角和方位角的估计。对 \mathbf{R} 进行奇异值分解，得到

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_S \Omega_S \mathbf{V}_S^H + \mathbf{U}_n \Omega_n \mathbf{V}_n^H \quad (10)$$

Ω_S 为 N 个大奇异值， Ω_n 为 $M - N$ 个小奇异值， $\Omega_S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ ， $\Omega_n = \text{diag}(\lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \dots, \lambda_M)$ 。 \mathbf{U}_S 和 \mathbf{V}_S 为大奇异值对应的左、右主奇异矢量矩

阵， \mathbf{U}_n 和 \mathbf{V}_n 为小奇异值对应的噪声奇异矢量矩阵。不同于非相干条件，此时界定信号子空间和噪声子空间的不再是信号个数 K ，而是信号组数 N 。由文献[16]可知，相干条件下信号子空间和阵列流形间的关系可以表示为

$$\mathbf{U}_S = \mathbf{A}_z \mathbf{G}_1 \quad (11)$$

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{A}_z \mathbf{G}_2 \quad (12)$$

式中， \mathbf{G}_1 、 \mathbf{G}_2 均为 $K \times N$ 维变换矩阵，其秩为 N 。

先对仰角 θ 进行估计，构造以 $z_i = e^{-j2\pi d \cos(\theta_i)/\lambda}$ ， $i = 1, 2, \dots, K$ 为根的 K 次方程

$$f(z) = \prod_{i=1}^K (z - z_i) = 0 \quad (13)$$

将式(13)展开成

$$f(z) = b_0 z^K + b_1 z^{K-1} + \dots + b_K = 0 \quad (14)$$

不妨令 $b_0 = 1$ ，只需要确定多项式系数 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_K]^T$ ，即可通过方程求根得到信号的仰角。构造 $M \times (M - K)$ 维 Toeplitz 矩阵 \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_K & b_{K-1} & \dots & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_K & b_{K-1} & \dots & b_0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & b_K & b_{K-1} & \dots & b_0 \end{bmatrix}^H \quad (15)$$

对于 $i = 1, 2, \dots, K$ ，有

$$\mathbf{B}^H \mathbf{a}(\theta_i) = f(z_i) \begin{bmatrix} 1 & z_i & \dots & z_i^{(M-K-1)} \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{(M-K) \times 1} \quad (16)$$

因此， $\mathbf{B}^H \mathbf{A}_z = \mathbf{0}_{(M-K) \times K}$ ，可知 \mathbf{B} 是阵列流形 \mathbf{A}_z 的正交补。又因为 $\mathbf{U}_S = \mathbf{A}_z \mathbf{G}_1$ ，所以有

$$\mathbf{B}^H \mathbf{U}_S = \mathbf{0}_{(M-K) \times N} \quad (17)$$

将 \mathbf{U}_S 写成 $\mathbf{U}_S = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N]$ ，其中 \mathbf{u}_i 为第 i 个主奇异矢量，有

$$\mathbf{B}^H \mathbf{u}_i = \mathbf{F}_i \mathbf{b} - \mathbf{g}_i = \mathbf{0}_{(M-K) \times 1} \quad (18)$$

式中

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}_i]_K & [\mathbf{u}_i]_{K-1} & \dots & [\mathbf{u}_i]_1 \\ [\mathbf{u}_i]_{K+1} & [\mathbf{u}_i]_K & \dots & [\mathbf{u}_i]_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\mathbf{u}_i]_{M-1} & [\mathbf{u}_i]_{M-2} & \dots & [\mathbf{u}_i]_{M-K} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{g}_i = -[\mathbf{u}_i]_{K+1}, [\mathbf{u}_i]_{K+2}, \dots, [\mathbf{u}_i]_M]^T \quad (20)$$

$[\mathbf{u}_i]_K$ 表示矢量 \mathbf{u}_i 的第 K 个元素。对式(17)进行矢量化

$$\text{vec}(\mathbf{B}^H \mathbf{U}_S) = \mathbf{F} \mathbf{b} - \mathbf{g} = \mathbf{0}_{(M-K)N \times 1} \quad (21)$$

式中 $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1^T, \mathbf{F}_2^T, \dots, \mathbf{F}_N^T]^T$ ， $\mathbf{g} = [\mathbf{g}_1^T, \mathbf{g}_2^T, \dots, \mathbf{g}_N^T]^T$ 。在误差条件下，式(21)可以表示为

$$\hat{\mathbf{F}}\mathbf{b} \approx \hat{\mathbf{g}} \quad (22)$$

$\hat{\mathbf{F}}$ 和 $\hat{\mathbf{g}}$ 是 \mathbf{F} 和 \mathbf{g} 的测量值。用加权最小二乘法(Weighted Least Squares, WLS)来求解 \mathbf{b} , 即

$$\mathbf{b} = \arg \min_{\mathbf{b}} \hat{\mathbf{e}}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{e}} \quad (23)$$

式中

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{F}}\mathbf{b} - \hat{\mathbf{g}} = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{B}^H) \hat{\mathbf{u}}_S \quad (24)$$

$$\mathbf{W} = (\mathbb{E} \{ \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}}^H \})^{-1} \quad (25)$$

$\hat{\mathbf{u}}_S = \text{vec}(\hat{\mathbf{U}}_S)$ 为量化后的主特征矢量。容易得到式(23)的解为

$$\mathbf{b} = (\hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{F}})^{-1} \hat{\mathbf{F}}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{g}} \quad (26)$$

然而 \mathbf{W} 又是 \mathbf{b} 的函数, 因此不能直接用式(26)求解 \mathbf{b} , 需要对 \mathbf{W} 作简化。文献[14]给出了 \mathbf{W} 的近似解

$$\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{D} \otimes (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \quad (27)$$

式中

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left(\frac{(\lambda_1 - \delta^2)^2}{\lambda_1}, \frac{(\lambda_2 - \delta^2)^2}{\lambda_2}, \dots, \frac{(\lambda_N - \delta^2)^2}{\lambda_N} \right) \quad (28)$$

$$\delta^2 = \frac{1}{M-N} \sum_{i=N+1}^M \lambda_i \quad (29)$$

至此 $\hat{\mathbf{b}}$ 可以通过交替迭代求得。首先通过式(22)的最小二乘解 $\hat{\mathbf{b}}_0 = \hat{\mathbf{F}}^+ \hat{\mathbf{g}}$ 确定 $\hat{\mathbf{b}}$ 的初始值, 再代入式(27)初始化 $\hat{\mathbf{W}}$, 然后将 $\hat{\mathbf{W}}$ 代入式(23)更新 $\hat{\mathbf{b}}$, 最后求解线性方程即可得到信号的仰角估计值 $\{\hat{\theta}_i\}_{i=1}^K$ 。

同理, 对方位角 ϕ 进行估计, 构造以 $x_i = e^{-j2\pi d \sin(\theta_i) \cos(\phi_i) / \lambda}$, $i = 1, 2, \dots, K$ 为根的 K 次方程

$$g(z) = c_0 z^K + c_1 z^{K-1} + \dots + c_K = 0 \quad (30)$$

只需要确定多项式系数 $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_K]^T$, 即可得到信号的方位角。构造 $M \times (M-K)$ 维Toeplitz矩阵

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_K & c_{K-1} & \dots & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_K & c_{K-1} & \dots & c_0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & c_K & c_{K-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix}^H \quad (31)$$

易知 $\mathbf{C}^H \mathbf{V}_S = \mathbf{0}_{(M-K) \times K}$, 因此只需要将式(22)中的 \mathbf{U}_S 替换成 \mathbf{V}_S , 再进行相同的操作, 即可确定系数 $\hat{\mathbf{c}}$, 最后求解以 $\hat{\mathbf{c}}$ 为系数的方程得到 K 个根 $\{x_i\}_{i=1}^K$ 。

需要注意的是, 不能通过 x_i 直接估计方位角 $\{\hat{\phi}_i\}_{i=1}^K$, 因为 $x_i = e^{-j2\pi d \sin(\theta_i) \cos(\phi_i) / \lambda}$, 与 $\hat{\theta}_i$ 之间存在

在配对问题, 需要通过配对算法得到正确的配对次序。

3.3 角度配对

通过仰角估计值 $\{\hat{\theta}_i\}_{i=1}^K$ 可以得到 $\hat{\mathbf{A}}_z$, 通过 K 个根 $\{x_i\}_{i=1}^K$ 可以得到 $\hat{\mathbf{A}}_x$ 。然而在上述算法中, 仰角和方位角是分别估计得到的, 不存在关联, 即 $\hat{\mathbf{A}}_z$ 和 $\hat{\mathbf{A}}_x$ 之间存在顺序模糊。易知自协方差矩阵与互协方差矩阵中都含有信号协方差 \mathbf{R}_S , 通过此共有信息可实现角度配对。将 $\hat{\mathbf{A}}_z$ 和 $\hat{\mathbf{A}}_x$ 分别表示为

$$\hat{\mathbf{A}}_z = \mathbf{A}_z \mathbf{E}_1 \quad (32)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_x = \mathbf{A}_x \mathbf{E}_2 \quad (33)$$

\mathbf{E}_1 和 \mathbf{E}_2 为列变换矩阵。易知, 去噪后的自协方差矩阵 $\bar{\mathbf{R}}_Z, \bar{\mathbf{R}}_X$ 以及互协方差矩阵 \mathbf{R} 中都含有信号协方差矩阵 \mathbf{R}_S , 其中 $\bar{\mathbf{R}}_Z = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H / L - \delta^2 \mathbf{I}_M$, $\bar{\mathbf{R}}_X = \mathbf{X} \mathbf{X}^H / L - \delta^2 \mathbf{I}_M$ 。通过式(34)求出 \mathbf{R}_S

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_{S1} &= \hat{\mathbf{A}}_z^+ \bar{\mathbf{R}}_Z (\hat{\mathbf{A}}_z^+)^H, & \mathbf{R}_{S2} &= \hat{\mathbf{A}}_x^+ \bar{\mathbf{R}}_X (\hat{\mathbf{A}}_x^+)^H \\ &= \mathbf{E}_1^T \mathbf{R}_S \mathbf{E}_1, & &= \mathbf{E}_2^T \mathbf{R}_S \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{R}_{S3} &= \hat{\mathbf{A}}_x^+ \mathbf{R} (\hat{\mathbf{A}}_z^+)^H, & \mathbf{R}_{S4} &= \hat{\mathbf{A}}_z^+ \mathbf{R} (\hat{\mathbf{A}}_x^+)^H \\ &= \mathbf{E}_2^T \mathbf{R}_S \mathbf{E}_1, & &= \mathbf{E}_1^T \mathbf{R}_S \mathbf{E}_2 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

最小化如式(35)代价函数 p , 可以得到 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$

$$p = \min_{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2} \left\| \mathbf{E}_2 \mathbf{R}_{S3} \mathbf{E}_1^T - \mathbf{E}_1 \mathbf{R}_{S1} \mathbf{E}_1^T + \mathbf{E}_1 \mathbf{R}_{S4} \mathbf{E}_2^T - \mathbf{E}_2 \mathbf{R}_{S2} \mathbf{E}_2^T \right\|_F \quad (35)$$

不妨令 $\mathbf{H} = \mathbf{E}_2^T \mathbf{E}_1$, 其中 \mathbf{H} 为列变换矩阵, 在求解过程中需要加入本身的结构约束, 即 \mathbf{H} 的每行只有一个元素为1, 其余元素为0。式(35)可进一步简化为

$$p = \min_{\mathbf{H}} \left\| \mathbf{R}_{S3} - \mathbf{H} \mathbf{R}_{S1} + \mathbf{H} \mathbf{R}_{S4} \mathbf{H} - \mathbf{R}_{S2} \mathbf{H} \right\|_F \quad (36)$$

由式(32)和式(33)可知, $\hat{\mathbf{A}}_z$ 与 $\hat{\mathbf{A}}_x \mathbf{H}$ 是完全匹配的。因此只需最小化代价函数 p , 求出变换矩阵 \mathbf{H} 即可完成角度配对。相比于文献[17]中的PSCM配对算法, 本文所提的配对算法精度更高。

3.4 L-PUMA算法步骤

步骤1 首先求出降噪后的互协方差矩阵 \mathbf{R} ;

步骤2 将 \mathbf{U}_S 按照式(19)和式(20)的形式构造矩阵 \mathbf{F} 和 \mathbf{g} , 得到 \mathbf{b} 的初始值 $\hat{\mathbf{b}}_0 = \hat{\mathbf{F}}^+ \hat{\mathbf{g}}$, 再通过式(27)和式(26)的交替迭代优化 \mathbf{b} , 然后求解线性方程式(14)计算出 K 个根 $\{z_i\}_{i=1}^K$, 得到仰角的估计值 $\hat{\theta}_i = \arccos \left(-\frac{\lambda}{2\pi d} \angle z_i \right)$;

步骤3 将步骤2中的 \mathbf{U}_S 替换为 \mathbf{V}_S , 重复步骤2的迭代操作, 得到 \mathbf{c} , 再求解式(30)计算出 K 个根 $\{x_i\}_{i=1}^K$, x_i 中同时包含了仰角和方位角的信息;

步骤4 利用 $\{z_i\}_{i=1}^K$ 和 $\{x_i\}_{i=1}^K$ 得到估计的阵列流形 $\hat{\mathbf{A}}_z$ 和 $\hat{\mathbf{A}}_x$ ，再通过最小化式(36)求出变换矩阵 \mathbf{H} ，最后通过 \mathbf{H} 得到配对后的角度 $\{\hat{\theta}_i\}_{i=1}^K, \{\hat{\phi}_i\}_{i=1}^K$ 。

4 改进的L-PUMA(L-MPUMA)算法

L-PUMA算法的估计精度由线性方程 $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{b} \approx \hat{\mathbf{g}}$ 决定， $\hat{\mathbf{F}}$ 的维数越大，方程的个数越多，则 \mathbf{b} 的计算精度越高。当信号完全相干时，主奇异矢量的个数减至1，大幅降低了线性方程的个数，算法性能下降严重，L-MPUMA通过构造反向主奇异矢量 $\mathbf{U}_R = \mathbf{J}_M \mathbf{U}_S^*$ 来进一步扩大 $\hat{\mathbf{F}}$ 的维数，易知

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^H [\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_R] &= \mathbf{B}^H \mathbf{A}_z \left[\mathbf{G}, \phi^{-(M-1)} \mathbf{G}^* \right] \\ &= \mathbf{0}_{(M-K) \times 2N} \end{aligned} \quad (37)$$

式中 $\phi = \text{diag} \left([e^{-j2\pi d \cos(\theta_1)/\lambda}, e^{-j2\pi d \cos(\theta_2)/\lambda}, \dots, e^{-j2\pi d \cos(\theta_K)/\lambda}] \right)$ ，令 $\mathbf{U}_{SR} = [\mathbf{U}_S, \mathbf{U}_R]$ 为增广主奇异矢量，可知 \mathbf{B} 与 \mathbf{U}_{SR} 正交，因此式(22)可扩展为

$$\hat{\mathbf{F}}_{SR} \mathbf{b} \approx \hat{\mathbf{g}}_{SR} \quad (38)$$

式中 $\hat{\mathbf{F}}_{SR} = \left[\hat{\mathbf{F}}^T, \left(\mathbf{J}_{M-K} \hat{\mathbf{F}}^* \right)^T \right]^T$ ， $\hat{\mathbf{g}}_{SR} = \left[\hat{\mathbf{g}}^T, \left(\mathbf{J}_{M-K} \hat{\mathbf{g}}^* \right)^T \right]^T$ 。式(38)的解为

$$\mathbf{b} = \arg \min_{\mathbf{b}} \mathbf{e}_{SR}^H \mathbf{W}_{SR} \mathbf{e}_{SR} \quad (39)$$

式中 $\mathbf{e}_{SR} = (\mathbf{I}_{2N} \otimes \mathbf{B}^H) \hat{\mathbf{u}}_{SR}$ ， $\mathbf{W}_{SR} = (\mathbf{E} \{ \mathbf{e}_{SR} \mathbf{e}_{SR}^H \})^{-1}$ 。 $\hat{\mathbf{u}}_{SR} = \text{vec}(\hat{\mathbf{U}}_{SR})$ 为量化后的增广主特征矢量， \mathbf{W}_{SR} 为 $2N$ 个矩阵组成的块对角阵。由第3节的推导可知式(39)可进一步写为

$$\mathbf{b} = \left(\hat{\mathbf{F}}_{SR}^H \mathbf{W}_{SR} \hat{\mathbf{F}}_{SR} \right)^{-1} \hat{\mathbf{F}}_{SR}^H \mathbf{W}_{SR} \hat{\mathbf{g}}_{SR} \quad (40)$$

\mathbf{W}_{SR} 中的第 $N+i$ 个块矩阵为

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}^H \mathbf{E} \left\{ \left(\mathbf{J}_M \hat{\mathbf{u}}_i^* \right) \left(\mathbf{J}_M \hat{\mathbf{u}}_i^* \right)^H \right\} \mathbf{B} \\ & \approx \mathbf{B}^H \mathbf{J}_M \left(\mathbf{E} \{ \hat{\mathbf{u}}_i \hat{\mathbf{u}}_i^H \} \right)^* \mathbf{J}_M \mathbf{B} \\ & \approx \frac{\lambda_i \sigma^2}{L(\lambda_i - \sigma^2)^2} \mathbf{B}^H \mathbf{B} \end{aligned} \quad (41)$$

与第 i 个块矩阵完全相同。因此可以得到 \mathbf{W}_{SR} 的近似解

$$\hat{\mathbf{W}}_{SR} = \mathbf{D}_{SR} \otimes (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \quad (42)$$

式中

$$\mathbf{D}_{SR} = \text{blkdiag}(\mathbf{D}, \mathbf{D}) \quad (43)$$

然后分别通过 \mathbf{U}_S 和 \mathbf{V}_S 构造增广主特征矢量 \mathbf{U}_{SR} 和 \mathbf{V}_{SR} ，最后通过迭代以及角度配对估计出仰角和方位角。

5 多目标处理能力分析

为了方便描述，将文献[11]所提算法称为CCM算法，文献[12]所提的两种算法称为CVM和MCVM算法，文献[13]所提算法称为OMP算法。下面对L-PUMA算法和L-MPUMA算法的测向能力进行比较，在L-PUMA算法中， \mathbf{b} 由式 $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{b} \approx \hat{\mathbf{g}}$ 确定，其中 $\hat{\mathbf{F}}$ 是 $(M-K)N \times K$ 矩阵，相当于通过 $(M-K)N$ 个方程确定 K 个未知数，当 $(M-K)N < K$ 时， \mathbf{b} 存在较大的求解误差，因此需要满足 $(M-K)N \geq K$ ，即最大可分辨信号数 $k_{\max} = \frac{N}{N+1}M$ 。同理，对于L-MPUMA算法， \mathbf{b} 由式 $\hat{\mathbf{F}}_{SR}\mathbf{b} \approx \hat{\mathbf{g}}_{SR}$ 确定，其中 $\hat{\mathbf{F}}_{SR}$ 是 $2(M-K)N \times K$ 维矩阵，因此最大可分辨信号数 $k_{\max} = \frac{2N}{2N+1}M$ ，相比于L-PUMA，L-MPUMA算法提高了最大可分辨信号数，并且本文提出的两种算法较以往算法都提高了信号分辨数。

6 仿真实验

将本文提出的L-PUMA，L-MPUMA算法与CCM，CVM，MCVM以及OMP算法进行比较。假设接收阵元噪声为高斯白噪声，噪声间相互独立，每次仿真均进行1000次蒙特卡罗实验。

实验1：配对算法性能比较

为了验证本文所提配对算法的有效性，将L-PUMA算法中的配对环节用文献[17]中的PSCM配对算法替代，简称为L-PUMA2算法。同样地，将L-MPUMA算法中的配对环节用PSCM替代，称为L-MPUMA2算法。假设有3个信号入射到17个阵元构成的L型阵列上，入射信号的仰角、方位角分别为 $(65^\circ, 120^\circ)$ ， $(80^\circ, 105^\circ)$ 和 $(95^\circ, 90^\circ)$ 。前两个信号相干，相干系数为 $[1, 0.4e^{j\pi/3}]$ ，第3个信号独立，快拍数为200。由图2可知，当 $-5 \text{ dB} < \text{SNR} < 5 \text{ dB}$ 时，L-PUMA算法的RMSE明显低于L-PUMA2，L-MPUMA算法的RMSE明显低于L-MPUMA2，可见改进的配对算法提升了算法性能。

再分析临近目标对配对算法性能的影响，假设 $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$ ，快拍数为200，阵元数保持不变。有两个相干信号入射到接收阵列上，第1个信号的仰角、方位角为 $(50^\circ, 80^\circ)$ ，第2个信号的仰角、方位角为 $(50^\circ + \Delta\alpha, 80^\circ - \Delta\alpha)$ ， $\Delta\alpha$ 表示角度间隔，其变化范围为 $1^\circ \sim 10^\circ$ ，步长为 0.5° 。如图3所示，随着角度间隔的增加，入射信号的空间分辨率越来越大，配对成功率随之升高，其中经过配对算法改进的L-PUMA的成功率要高于L-PUMA2，同理，L-MPUMA的成功率也高于L-MPUMA2。

实验2: 信噪比变化对算法性能的影响

假设有3个信号入射到17个阵元构成的L型阵列上, 入射信号的仰角、方位角分别为 $(65^\circ, 120^\circ)$, $(80^\circ, 105^\circ)$ 和 $(95^\circ, 90^\circ)$ 。前两个信号相干, 相干系数为 $[1, 0.4e^{j\pi/3}]$, 第3个信号独立, 快拍数为200。由图4可知, 当 $SNR < -5$ dB时, CCM算法的RMSE最低, 当 $SNR > -5$ dB时, L-MPUMA算法的RMSE最低, L-PUMA算法次之, 而CVM和MCVM的RMSE均较大, OMP算法的性能在所有算法中处于中间水平。

仅改变入射信号之间的相干性, 假设信号完全相干, 相干系数为 $[1, 0.3e^{j\pi/10}, 0.8e^{-j\pi/6}]$ 。由图5可知, OMP算法在低信噪比条件下性能下降严重, L-PUMA算法的RMSE整体升高, 性能完全被CCM算法超越, 这是由于信号的完全相干导致了线性方程个数的减少, 因此估计精度下降。而L-MPUMA算法仍能保持很好的性能, 当 $SNR > -5$ dB时, 其RMSE低于任何一种算法。

实验3: 快拍数变化对算法性能的影响

设 $SNR = 10$ dB, 快拍数从100增加至1000, 其余参数均与实验2相同。如图6所示, 当信号部分相干时, 可以看出算法受快拍数的影响不大, RMSE变化较为平缓, 各算法的性能由差到好排序依次是: CVM, MCVM和CCM, L-PUMA, OMP, L-MPUMA。

仅改变信号相干性, 将部分相干的信号改成完全相干。如图7所示, 当信号完全相干时, 所有算法的RMSE均被抬高, 其中L-PUMA的RMSE与CVM和MCVM相当, 性能下滑严重; CCM和OMP算法的性能处于中间水平; 而L-MPUMA的RMSE则最低, 性能最好。可见信号的相干越大, 解相干算法的性能越差, L-PUMA对于信号的相干程度十分敏感, 而L-MPUMA受到的影响则较小, 鲁棒性较好。

实验4: 多目标处理能力

假设 $SNR = 10$ dB, 快拍数为200, 共有4个相干信号入射到11个阵元组成的L型阵列上, 仰角、方位角分别为 $(65^\circ, 115^\circ)$, $(80^\circ, 100^\circ)$, $(95^\circ, 85^\circ)$ 和 $(110^\circ, 70^\circ)$ 。假设4个信号完全相干, 都属于同一组相干信号, 即 $N = 1$, 如图8所示, 星号代表目标的

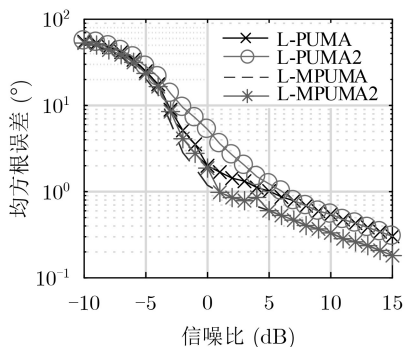


图2 配对算法RMSE随SNR的变化

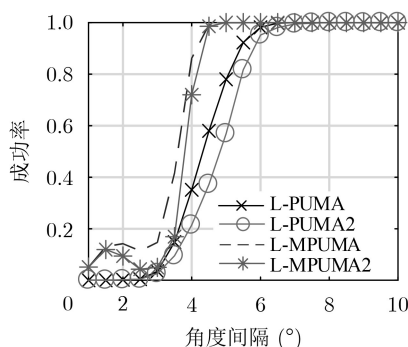


图3 配对成功率随角度间隔的变化

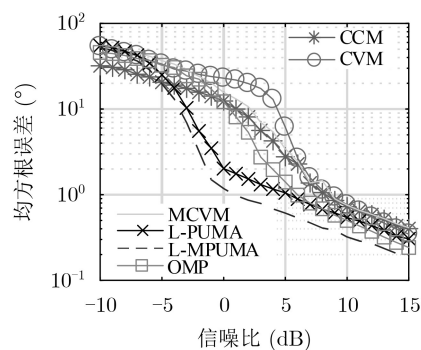


图4 RMSE随SNR的变化(部分相干)

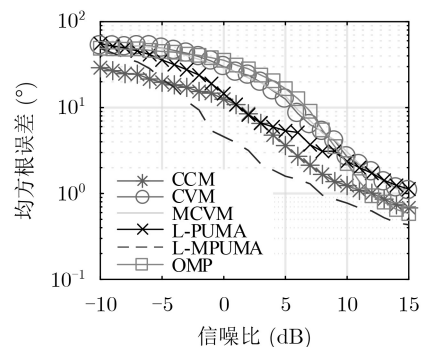


图5 RMSE随SNR的变化(完全相干)

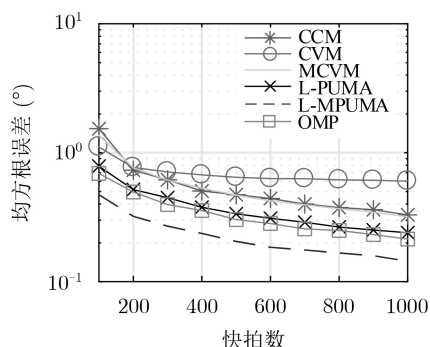


图6 RMSE随快拍数的变化(部分相干)

真实位置，可以看出L-MPUMA算法估计出的角度与真实角度比较接近，而L-PUMA算法则出现估计错误，估计值严重偏离真实值。这是因为在 $N = 1, M = 6$ 的条件下，L-PUMA最多可处理的信号数为 $k_{\max} = \frac{N}{N+1}M = 3$ ，L-MPUMA可处理的信号数为 $k_{\max} = \frac{2N}{2N+1}M = 4$ 。

假设4个信号部分相干，分为两组相干信号，即 $N = 2$ ，且每组信号数为2个，仰角和方位角保持不变。从理论上分析，L-PUMA最多可处理的信号数为4个，L-MPUMA可处理的信号数为4.8个，向下取整为4个。如图9所示，两种算法估计出的目标均接近真实目标，其中L-MPUMA的偏差更小，L-PUMA的偏差稍大但也能做到准确估计。与图8中信号完全相干的情况相比，此时算法的分辨率有很大提升。

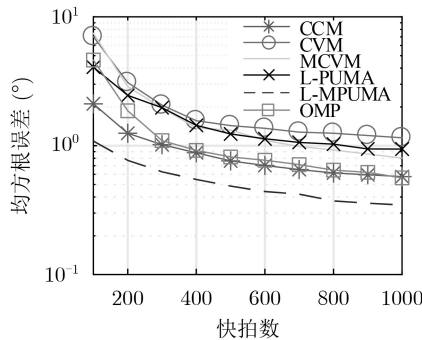


图7 RMSE随快拍数的变化(完全相干)

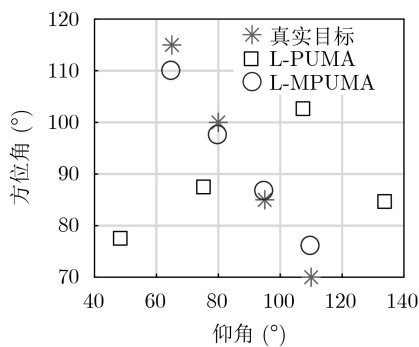


图8 目标的空间分布(1组相干信号)

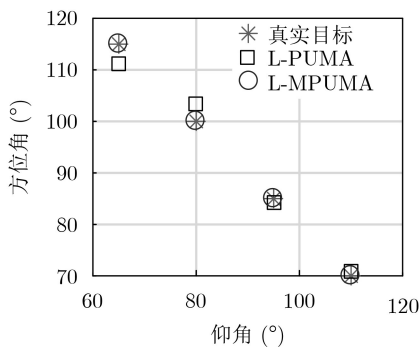


图9 目标的空间分布(2组相干信号)

在其他条件不变的情况下，再增加一个独立信号，新增的仰角、方位角为 $(125^\circ, 55^\circ)$ ，此时共有3组相干信号，即 $N = 3$ ，信号总数为5个，阵元数仍保持11个。由分析可知L-PUMA最多可处理4个信号，L-MPUMA最多可处理5个信号。如图10所示，L-MPUMA算法仍可以得到和真实目标较为接近的结果，而L-PUMA算法则完全失效，无法显示出目标。

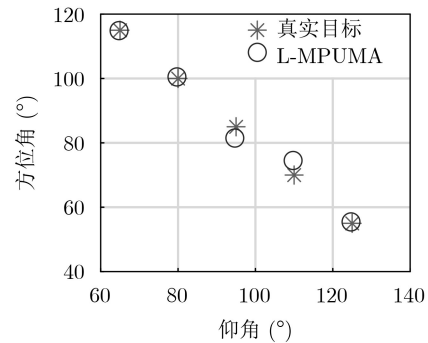


图10 目标的空间分布(3组相干信号)

7 结论

本文针对L型阵列相干信号DOA估计问题，提出了两种解相干算法：L-PUMA和L-MPUMA算法，较大程度提高了估计精度和最大可分辨信号数。虽然L-PUMA算法在信号完全相干条件下性能下降比较严重，但当信号部分相干时性能良好。L-MPUMA算法则对信号的相干程度不敏感，进一步提高了精度和鲁棒性。

参考文献

- [1] 刘松, 庞育才. 基于扩展ESPRIT的随机阵列高效DOA估计算法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(6): 1324–1329. doi: [10.11999/JEIT180672](https://doi.org/10.11999/JEIT180672).
- LIU Song and PANG Yucai. Efficient augmented ESPRIT-based direction-of-arrival estimation algorithm for random arrays[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(6): 1324–1329. doi: [10.11999/JEIT180672](https://doi.org/10.11999/JEIT180672).
- [2] 杨康, 文方青, 黄冬梅, 等. 基于实值三线性分解的互耦条件下双基地MIMO雷达角度估计算法[J]. 系统工程与电子技术, 2018, 40(2): 314–321. doi: [10.3969/j.issn.1001-506X.2018.02.12](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-506X.2018.02.12).
- YANG Kang, WEN Fangqing, HUANG Dongmei, et al. Real-value-based trilinear decomposition-based direction estimation algorithm for bistatic MIMO radar in the presence of mutual coupling[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2018, 40(2): 314–321. doi: [10.3969/j.issn.1001-506X.2018.02.12](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-506X.2018.02.12).
- [3] 赵洋, 李新波, 石要武. 声矢量阵列波达方向估计的四元数空

- 间稀疏分解[J]. 光学精密工程, 2018, 26(3): 715–722. doi: [10.3788/OPE.20182603.0715](https://doi.org/10.3788/OPE.20182603.0715).
- ZHAO Yang, LI Xinbo, and SHI Yaowu. Quaternion sparse decomposition algorithm for DOA estimation with acoustic vector sensor array[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2018, 26(3): 715–722. doi: [10.3788/OPE.20182603.0715](https://doi.org/10.3788/OPE.20182603.0715).
- [4] 史云飞, 郝永生, 刘德亮, 等. RSS协助的Ray-tracing室内定位算法[J]. 信号处理, 2018, 34(10): 1259–1266. doi: [10.16798/j.issn.1003-0530.2018.10.015](https://doi.org/10.16798/j.issn.1003-0530.2018.10.015).
- SHI Yunfei, HAO Yongsheng, LIU Deliang, *et al.* RSS-assisted Ray-tracing indoor positioning algorithm[J]. *Journal of Signal Processing*, 2018, 34(10): 1259–1266. doi: [10.16798/j.issn.1003-0530.2018.10.015](https://doi.org/10.16798/j.issn.1003-0530.2018.10.015).
- [5] CHEN Y H and LIAN Y T. 2-D multitarget angle tracking algorithm using sensor array[J]. *IEEE Proceedings – Radar, Sonar and Navigation*, 1995, 142(4): 158–161. doi: [10.1049/ip-rsn:19951984](https://doi.org/10.1049/ip-rsn:19951984).
- [6] 陈建, 王树勋, 魏小丽. 一种基于L型阵列的二维波达方向估计的新方法[J]. 吉林大学学报: 工学版, 2006, 36(4): 590–593.
- CHEN Jian, WANG Shuxun, and WEI Xiaoli. New method for estimating two-dimensional direction of arrival based on L-shape array[J]. *Journal of Jilin University: Engineering and Technology Edition*, 2006, 36(4): 590–593.
- [7] 景小荣, 刘雪峰. L型阵列的二维DOA估计方法[J]. 重庆邮电大学学报: 自然科学版, 2016, 28(1): 24–29. doi: [10.3979/j.issn.1673-825X.2016.01.004](https://doi.org/10.3979/j.issn.1673-825X.2016.01.004).
- JING Xiaorong and LIU Xuefeng. Method of two-dimensional DOA estimation for L-shaped array[J]. *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications: Natural Science Edition*, 2016, 28(1): 24–29. doi: [10.3979/j.issn.1673-825X.2016.01.004](https://doi.org/10.3979/j.issn.1673-825X.2016.01.004).
- [8] ZHANG Xiaofei, LI Jianfeng, and XU Lingyun. Novel two-dimensional DOA estimation with L-shaped array[J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2011, 2011(1): 50. doi: [10.1186/1687-6180-2011-50](https://doi.org/10.1186/1687-6180-2011-50).
- [9] 杨艳飞, 高健, 张兴敢. 一种基于L型阵列的改进的二维DOA估计方法[J]. 南京大学学报: 自然科学, 2016, 52(5): 953–959. doi: [10.13232/j.cnki.jnju.2016.05.023](https://doi.org/10.13232/j.cnki.jnju.2016.05.023).
- YANG Yanfei, GAO Jian, and ZHANG Xinggan. An improved method for estimating two-dimensional DOA based on L-shape array[J]. *Journal of Nanjing University: Natural Sciences*, 2016, 52(5): 953–959. doi: [10.13232/j.cnki.jnju.2016.05.023](https://doi.org/10.13232/j.cnki.jnju.2016.05.023).
- [10] FRIEDLANDER B and WEISS A J. Direction finding using spatial smoothing with interpolated arrays[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1992, 28(2): 574–587. doi: [10.1109/7.144583](https://doi.org/10.1109/7.144583).
- [11] GU Jianfeng, WEI Ping, and TAI Hengming. 2-D direction-of-arrival estimation of coherent signals using cross-correlation matrix[J]. *Signal Processing*, 2008, 88(1): 75–85. doi: [10.1016/j.sigpro.2007.07.013](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2007.07.013).
- [12] 史清响, 马秀荣, 谢玉凤, 等. 基于相关矢量法L型阵列相干信号DOA估计[J]. 科学技术与工程, 2015, 15(8): 194–198. doi: [10.3969/j.issn.1671-1815.2015.08.037](https://doi.org/10.3969/j.issn.1671-1815.2015.08.037).
- SHI Qingxiang, MA Xiurong, XIE Yufeng, *et al.* DOA estimation of coherent signals based on correlation vector method with L-shaped array[J]. *Science Technology and Engineering*, 2015, 15(8): 194–198. doi: [10.3969/j.issn.1671-1815.2015.08.037](https://doi.org/10.3969/j.issn.1671-1815.2015.08.037).
- [13] 刁鸣, 安春莲. 独立信号与相干信号并存的二维DOA估计新方法[J]. 西安电子科技大学学报: 自然科学版, 2013, 40(5): 66–71, 98. doi: [10.3969/j.issn.1001-2400.2013.05.011](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-2400.2013.05.011).
- DIAO Ming and AN Chunlian. 2-D DOA estimation of coexisting uncorrelated and coherent signals[J]. *Journal of Xidian University*, 2013, 40(5): 66–71, 98. doi: [10.3969/j.issn.1001-2400.2013.05.011](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-2400.2013.05.011).
- [14] QIAN Cheng, HUANG Lei, CAO Mingyang, *et al.* PUMA: An improved realization of MODE for DOA estimation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, 53(5): 2128–2139. doi: [10.1109/TAES.2017.2683598](https://doi.org/10.1109/TAES.2017.2683598).
- [15] LIU Z M, LU Z Y, HUANG Z T, *et al.* Improved Gerschgorin disk estimator for source enumeration with robustness against spatially non-uniform noise[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2011, 5(9): 952–957. doi: [10.1049/iet-rsn.2011.0188](https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2011.0188).
- [16] 安春莲. 独立信号与相干信号并存的测向算法研究[D]. [博士学位论文], 哈尔滨工程大学, 2013.
- AN Chunlian. Research on direction finding for coexisted uncorrelated and coherent sources[D]. [Ph. D. dissertation], Harbin Engineering University, 2013.
- [17] WEI Yinsheng and GUO Xiaojiang. Pair-matching method by signal covariance matrices for 2D-DOA estimation[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2014, 13: 1199–1202. doi: [10.1109/LAWP.2014.2331076](https://doi.org/10.1109/LAWP.2014.2331076).
- 唐晓杰: 男, 1995年生, 博士生, 研究方向为信号与信息处理.
何明浩: 男, 1963年生, 教授, 研究方向为信号与信息处理.
冯明月: 男, 1988年生, 讲师, 研究方向为信号与信息处理.
陈昌孝: 男, 1982年生, 讲师, 研究方向为信号与信息处理.
韩俊: 男, 1983年生, 讲师, 研究方向为信号与信息处理.

责任编辑: 陈倩