

忆阻突触耦合Hopfield神经网络的初值敏感动力学

陈 墨* 陈成杰 包伯成 徐 权
(常州大学信息科学与工程学院 常州 213164)

摘要: 该文报道了3神经元Hopfield神经网络(HNN)在电磁感应电流作用下的初值敏感动力学。利用非理想忆阻突触, 模拟由两个相邻神经元膜电位之差引起的电磁感应电流, 构建了一种简单的4维忆阻Hopfield神经网络模型。借助理论分析和数值仿真, 分析了不同忆阻突触耦合强度下的复杂动力学行为, 揭示了与状态初值密切相关的特殊动力学行为。最后, 设计了该忆阻HNN的模拟等效实现电路, 并由PSIM电路仿真验证了MATLAB数值仿真的正确性。

关键词: 非理想忆阻突触; Hopfield神经网络; 状态初值; 数值仿真

中图分类号: TN601; TN711.4

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)04-0870-08

DOI: [10.11999/JEIT190858](https://doi.org/10.11999/JEIT190858)

Initial Sensitive Dynamics in Memristor Synapse-coupled Hopfield Neural Network

CHEN Mo CHEN Chengjie BAO Bocheng XU Quan

(School of Information Science and Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: The initial sensitive dynamics in a Hopfield Neural Network (HNN) with three neurons under the action of electromagnetic induction current is reported. A simple 4-D memristive HNN is constructed by using a non-ideal memristor synapse to imitate the electromagnetic induction current caused by membrane potential difference between two adjacent neurons. By means of theoretical analyses and numerical simulations, the complex dynamical behaviors under different coupling strengths of the memristor synapse are researched, and special phenomena closely related to the initial values are revealed. Finally, the analog equivalent realization circuit of the memristive HNN model is designed, and the correctness of MATLAB numerical simulation is verified by PSIM circuit simulations.

Key words: Non-ideal memristor synapse; Hopfield Neural Network (HNN); Initial condition; Numerical simulation

1 引言

在人工神经网络领域, Hopfield神经网络(Hopfield Neural Network, HNN)是由多个神经元构成的一类重要的神经网络模型^[1], 它可以模拟人脑中的复杂动力学^[2,3], 在数据存储、联想记忆、信号检测、认知研究和特征识别等领域有着广泛的应用前景^[4-6]。目前, 已有大量文献通过动力学分析方法揭示并阐述了HNN中的自激吸引子^[7]、隐藏

吸引子^[8]、共存对称吸引子^[9,10]和共存多稳态模式^[11]等复杂动力学行为。

近年来, 忆阻器在模拟突触可塑性和构造人工神经网络方面展现了独特优势^[6,12]。采用忆阻模拟器实现神经网络模型的可变连接权重, 可更有效地模拟生物神经系统的动力学特性^[13,14]。利用忆阻模拟器描述外加电磁辐射^[15-18]或模拟神经元膜电位差诱发的电磁感应效应^[19-21], 可以定量分析电磁辐射对神经形态电路的电活动行为影响。采用绝对值型忆阻模拟器模拟外部电磁辐射效应, 文献[16]研究了电磁辐射分布对多神经元HNN电活动行为的影响, 随着电磁辐射激励的神经元数目的增加, 神经网络的动力学行为逐渐由周期行为演化为混沌、瞬态混沌和超混沌行为。在单欣德马什-罗斯(Hindmarsh-Rose, HR)神经元中引入具有阈值的双曲正切型忆阻模拟器, 文献[17]揭示并阐述了电磁辐射

收稿日期: 2019-11-01; 改回日期: 2020-01-20; 网络出版: 2020-03-13

*通信作者: 陈墨 mchen@cczu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(51777016, 61801054, 61601062), 江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX19_1767)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (51777016, 61801054, 61601062), The Postgraduate Research & Practice Innovation Program of Jiangsu Province, China (KYCX19_1767)

作用下产生的隐藏簇发放电行为及其分岔机制。采用HR神经元作为节点并由3次非线性磁控忆阻突触进行耦合建立多层忆阻神经网络, 文献[18]揭示了电磁感应效应在调节神经网络动态行为中发挥的重要作用。在双神经元Hopfield神经网络中分别引入理想和非理想二次非线性磁控忆阻模拟器, 模拟神经元膜电位差引起的外加电磁感应电流, 文献[20,21]观测到了共存多稳态放电模式。由此可见, 忆阻突触模拟器已成为构建神经形态电路的重要组成部分。

本文在文献[20,21]工作的基础上, 提出了一种新颖的4维忆阻HNN模型, 它在3神经元HNN模型中的两个神经元之间引入了非理想忆阻突触。两个神经元的膜电位差作用于非理想忆阻突触, 产生双向耦合的电磁感应电流, 在相对复杂的3神经元HNN中探讨神经元膜电位差引发的双向电磁感应效应对神经网络电活动行为的影响。理论分析和数值仿真表明, 所提3神经元忆阻HNN具有多个非对称分布的不稳定指数2鞍焦平衡点, 可产生具有不同拓扑结构或不同位置的非对称共存混沌或周期吸引子, 展现出显著的初值敏感性。在神经形态电路中, 多稳定性对神经元的动态记忆和信息处理有着显著的影响^[22], 从动力学角度揭示并阐述其中的多稳定性, 有助于深入了解多稳定性现象在脑信息处理和认知功能等方面的作用, 为脑功能的理解提供神经动力学方面的解释。

2 数学模型与稳定性分析

2.1 数学模型

本文所采用2次非线性磁控忆阻突触的数学模型为

$$\left. \begin{array}{l} I_{EM} = W(\varphi)V_{EM} \\ W(\varphi) = k\varphi \\ \dot{\varphi} = V_{EM} - \varphi \end{array} \right\} \quad (1)$$

其中, φ 为忆阻内部状态变量, $W(\varphi) = k\varphi$ 为忆导函数表达式, k 为忆阻耦合强度, $V_{EM}=x_1-x_2$ 表示神经元1和神经元2的膜电位差。式(1)所描述的忆阻模拟器为非理想忆阻, 其等效实现电路不使用理想积分器, 可有效地避免直流漂移的产生^[21]。

基于文献[10]的3神经元HNN, 采用式(1)描述的非理想忆阻模拟器, 模拟两个相邻神经元之间的膜电位差诱发的磁感应电流, 构建出图1所示的忆阻HNN。其中, 非理想忆阻突触耦合在神经元1和2之间, I_{EM} 为神经元1和神经元2的膜电位差作用于非理想忆阻突触所产生的电磁感应电流。该电磁感应电流双向作用于神经元1和2。此外, 为简化分析, 神经元1和神经元2保留完整的突触连接, 神经元3仅与其它神经元单向连接。

所提忆阻突触耦合的4维HNN的数学表达式为

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -x_1 + 1.5 \tanh(x_1) + 2.8 \tanh(x_2) \\ \quad + 0.5 \tanh(x_3) + k\varphi(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 1.5 \tanh(x_1) + 1.2 \tanh(x_2) \\ \quad - k\varphi(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_3 = -x_3 - 20 \tanh(x_2) \\ \dot{\varphi} = x_1 - x_2 - \varphi \end{array} \right\} \quad (2)$$

其中, k 为非理想忆阻突触的耦合强度, 双曲正切函数 $\tanh(x_n)(n=1, 2, 3)$ 表示从第 n 个神经元电压输入的神经元激活函数, 其系数为突触权重, 表示两个相邻神经元之间的连接强度。式(2)为所提忆阻HNN的数学模型, 后续分析中简称为系统式(2)。

2.2 稳定性分析

设 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_\varphi)$ 为系统式(2)的一个平衡点, 该平衡点可从式(3)求得

$$\left. \begin{array}{l} 0 = -\xi_1 + 1.5 \tanh(\xi_1) + 2.8 \tanh(\xi_2) \\ \quad + 0.5 \tanh(\xi_3) + k\varphi(\xi_1 - \xi_2) \\ 0 = -\xi_2 - 1.5 \tanh(\xi_1) + 1.2 \tanh(\xi_2) \\ \quad - k\xi_\varphi(\xi_1 - \xi_2) \\ 0 = -\xi_3 - 20 \tanh(\xi_2) \\ 0 = \xi_1 - \xi_2 - \xi_\varphi \end{array} \right\} \quad (3)$$

其中, $\xi_3 = -20 \tanh(\xi_2)$, $\xi_\varphi = \xi_1 - \xi_2$ 。将式(3)的前两式相加, 推导得到

$$\left. \begin{array}{l} 0 = -\xi_1 - \xi_2 + 4 \tanh(\xi_2) + 0.5 \tanh(\xi_3) \\ = -\xi_1 - \xi_2 + 4 \tanh(\xi_2) + 0.5 \tanh[-20 \tanh(\xi_2)] \end{array} \right\} \quad (4)$$

综合式(3)和式(4)化简得到方程为

$$\left. \begin{array}{l} \xi_1 = -\xi_2 + 4 \tanh(\xi_2) + 0.5 \tanh[-20 \tanh(\xi_2)] \\ \xi_2 = -1.5 \tanh(\xi_1) + 1.2 \tanh(\xi_2) - k\varphi(\xi_1 - \xi_2) \end{array} \right\} \quad (5)$$

令函数 $H_1(y, z)$ 和 $H_2(y, z)$ 为

$$\left. \begin{array}{l} H_1(y, z) = -z - 1.5 \tanh(y) + 1.2 \tanh(z) \\ \quad - k\varphi(y - z) \\ H_2(y, z) = -y - z + 4 \tanh(z) \\ \quad + 0.5 \tanh[-20 \tanh(z)] \end{array} \right\} \quad (6)$$

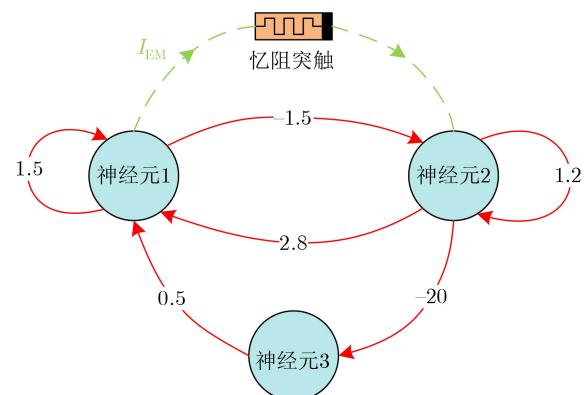


图1 基于非理想忆阻突触的HNN的连接拓扑

则系统式(2)的平衡点 P 即为函数曲线 $H_1(y, z)=0$ 和 $H_2(y, z)=0$ 的交点。

在平衡点附近, 系统式(2)的雅克比矩阵可表示为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 + 1.5g_1 + k\xi_\varphi & 2.8g_2 - k\xi_\varphi & 0.5g_3 k\xi_\varphi \\ -1.5g_1 - k\xi_\varphi & -1 + 1.2g_2 + k\xi_\varphi & 0 - k\xi_\varphi \\ 0 & -20g_2 & -1 \quad 0 \\ 1 & -1 & 0 \quad -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中, $g_i = \operatorname{sech}^2(\xi_i)$, $i = 1, 2, 3$ 。式(6)和式(7)表明平衡点 P 的位置与稳定性仅取决于非理想忆阻突触的耦合强度 k , 因此忆阻突触的耦合强度 k 将对系统式(2)的动力学行为产生显著的影响。

以 $k=-1, 0$ 和 1 为例, 说明系统式(2)的平衡点和稳定性。**图2(a)**绘制了 $k=0$ 时 $H_1(y, z)=0$ 和 $H_2(y, z)=0$ 的函数曲线, 其中, 绿色曲线表示函数 $H_1(y, z)=0$, 黑色曲线表示函数 $H_2(y, z)=0$ 。此时, 系统式(2)具有3个平衡点: 1个0平衡点 P_0 和2个对称平衡点 P_1 和 P_2 。**图2(b)**则给出了 $k=-1$ 和 1 时 $H_1(y, z)=0$ 和 $H_2(y, z)=0$ 的函数曲线, 其中, 蓝色($k=-1$)和红色($k=1$)曲线表示函数 $H_1(y, z)$, 黑色曲线表示函数 $H_2(y, z)$ 。此时, 系统式(2)具有一个0平衡点 P_0 和

3个非对称的平衡点 P_1 , P_2 和 P_3 。**表1**列举了这3种耦合强度下, 系统式(2)平衡点的坐标及其对应特征根和稳定性。可以发现: 系统式(2)在不同的忆阻耦合强度 k 下具有多个不稳定平衡点, 表明它可以产生混沌吸引子, 且容易产生依赖于状态初值的多稳定性现象。

3 分岔分析与初值敏感动力学

3.1 随忆阻耦合强度 k 变化的动力学

选取忆阻耦合强度 k 作为控制参数, 将状态初值设置为 $(0, 10^{-6}, 0, 0)$ 和 $(0, -10^{-6}, 0, 0)$, 采用龙格-库塔算法和Wolf算法计算得到状态变量 x_1 的分岔图和对应的李雅普诺夫指数谱分别如**图3(a)**和**图3(b)**所示。**图3(a)**中的紫色轨迹对应状态初值 $(0, 10^{-6}, 0, 0)$, 褐色轨迹对应状态初值 $(0, -10^{-6}, 0, 0)$ 。当状态初值设为 $(0, 10^{-6}, 0, 0)$ 时, 随着 k 在 $[-1.4, 1.4]$ 范围逐渐增加, 系统式(2)的动力学行为由周期1极限环突变为混沌状态, 然后通过切分岔退化为多周期状态, 再由逆倍周期分岔道路转变为周期3极限环。随后, 在 $k=0$ 附近, 系统运行轨迹从周期3极限环突变为混沌状态, 最后由逆倍周期分岔道路演化为

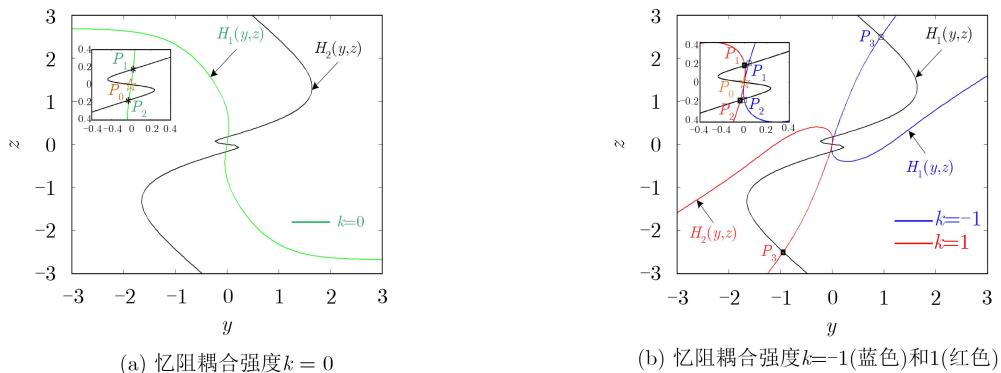


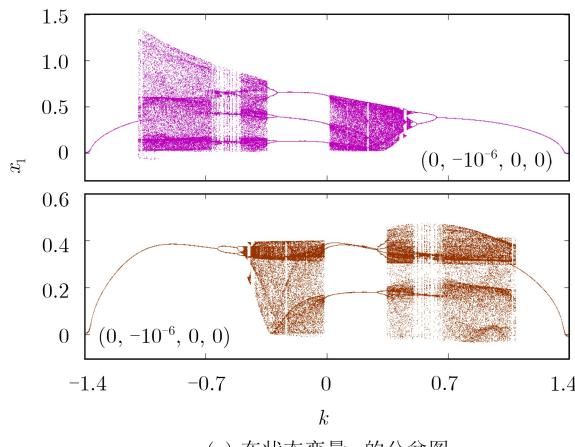
图2 不同忆阻耦合强度时 $H_1(y, z)$ 和 $H_2(y, z)$ 函数曲线及交点平衡点

表1 $k=-1, 0$ 和 1 时的平衡点及其特征值和稳定性

k	平衡点	特征值	稳定性
-1	$P_0: (0, 0, 0, 0)$	$1.6062, -0.9531 \pm j2.3986, -1$	不稳定指数1鞍焦
	$P_1: (-0.0019, -0.1689, 3.3462, 0.1670)$	$0.0981 \pm j2.0026, -0.8763, -0.9875$	不稳定指数2鞍焦
	$P_2: (0.0369, 0.1814, -3.5887, -0.1445)$	$0.5146 \pm j2.0051, -0.9923, -1.0882$	不稳定指数2鞍焦
	$P_3: (0.9448, 2.5018, -19.7332, -1.5570)$	$3.4659, -0.9464, -1, -1.6894$	不稳定鞍点
0	$P_0: (0, 0, 0, 0)$	$1.6062, -0.9531 \pm j2.3986, -1$	不稳定指数1鞍焦
	$P_1: (0.0220, 0.1761, -3.4860, -0.1541)$	$0.3267 \pm j2.0074, -0.9906, -1$	不稳定指数2鞍焦
	$P_2: (-0.0220, -0.1761, 3.4860, 0.1541)$	$0.3267 \pm j2.0074, -0.9906, -1$	不稳定指数2鞍焦
1	$P_0: (0, 0, 0, 0)$	$1.6062, -0.9531 \pm j2.3986, -1$	不稳定指数1鞍焦
	$P_1: (-0.9448, -2.5018, 19.7332, 1.5570)$	$3.4659, -0.9464, -1, -1.6894$	不稳定鞍点
	$P_2: (-0.0369, -0.1814, 3.5887, 0.1445)$	$0.5146 \pm j2.0051, -0.9923, -1.0882$	不稳定指数2鞍焦
	$P_3: (0.0019, 0.1689, -3.3462, -0.1670)$	$0.0981 \pm j2.0026, -0.8763, -0.9875$	不稳定指数2鞍焦

周期1极限环。当状态初值微调为 $(0, -10^{-6}, 0, 0)$, 系统式(2)的分岔路径与紫色轨迹截然不同, 说明状态初值的微小改变对系统的动力学产生了显著的影响。图3(b)给出了与图3(a)对应的前3根李雅普诺夫指数谱, 它反映的动力学与图3(a)分岔图中揭示的一致。

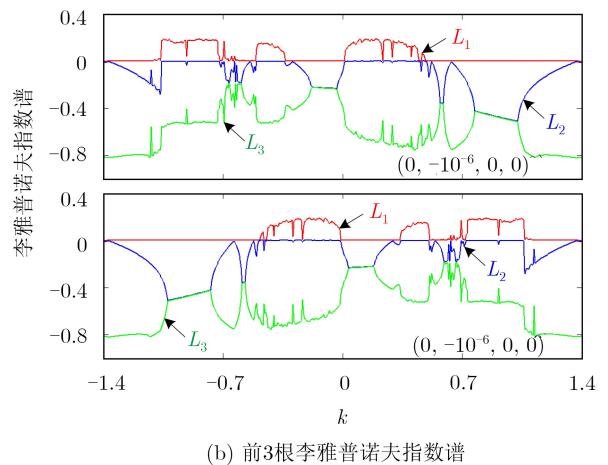
将非理想忆阻突触的耦合强度 k 分别取为-0.8, -0.4, 0和0.5, 数值仿真得到几组共存吸引子在 x_1-x_3 平面上的相轨图如图4所示, 其中, 紫色轨迹的状态初值为 $(0, 10^{-6}, 0, 0)$, 褐色轨迹的状态初值为 $(0, -10^{-6}, 0, 0)$ 。图4(a)和图4(d)绘制了 $k=-0.8/0.5$ 时共存的周期极限环和混沌吸引子; 图4(b)给出了

(a) 在状态变量 x_1 的分岔图

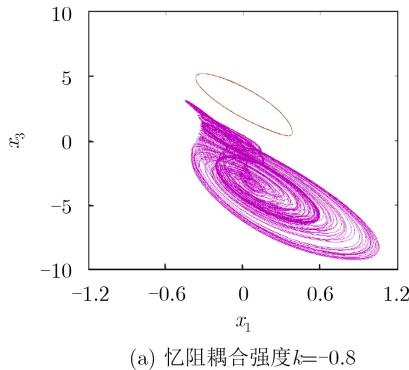
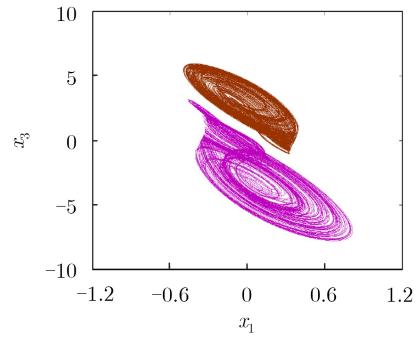
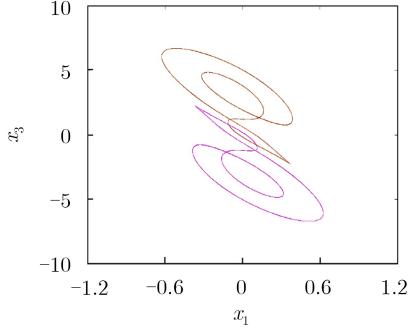
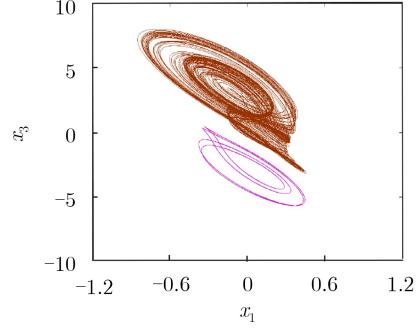
$k=-0.4$ 时共存的非对称混沌吸引子; 图4(c)展示了 $k=0$ 时共存的对称多周期极限环。在其它状态初值条件下, 忆阻HNN模型式(2)将会产生其他类型或拓扑结构的共存吸引子, 意味着忆阻HNN具有初值敏感性。

3.2 随系统初始值变化的动力学

设定 $k=0.6$, 选取系统式(2)的状态初值 $x_1(0)$ 为分岔变量, 其他状态初值设置为0, 仿真得到状态变量 x_1 的分岔图如图5(a)所示。状态初值 $x_1(0)$ 在 $[-1.2, 1.2]$ 范围内变化时, 忆阻HNN的运行轨迹在 $x_1(0)=0$ 时由周期2极限环突变为混沌, 然后在 $x_1(0)=0.9$ 时进入发散状态。同样地, 将忆阻耦合

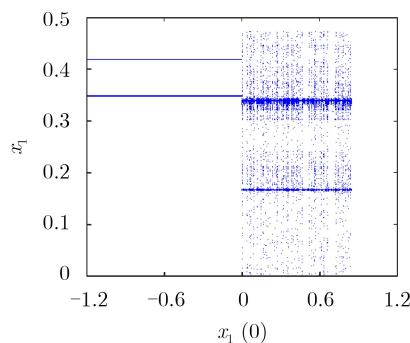


(b) 前3根李雅普诺夫指数谱

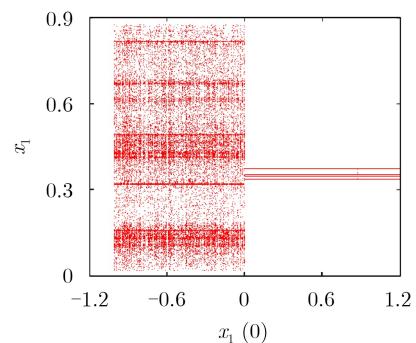
图3 不同初值下随参数 k 变化的共存分岔行为(a) 忆阻耦合强度 $k=-0.8$ (b) 忆阻耦合强度 $k=-0.4$ (c) 忆阻耦合强度 $k=0$ (d) 忆阻耦合强度 $k=0.5$ 图4 不同忆阻耦合强度下 x_1-x_3 平面上的相轨图

强度调整为 $k=-0.5$, 其余参数设置保持不变, 仿真得到状态变量 x_1 的分岔图如图5(b)所示, 其分岔路径与图5(a)所示完全不同。

吸引盆可以直观地刻画2-D平面上2个状态初值同时变化时系统式(2)的动力学特性。将耦合参数分别选取为 $k=0.6$ 和 -0.5 , 仿真得到 $x_1(0)-x_2(0)$ 平面上的吸引盆分别如图6(a)和图6(b)所示。其中, $x_3(0)=\phi(0)=0$, 黑色区域表示发散状态, 黄色区域表示周期状态, 红色区域表示混沌状态。观察图6可以发现, 红色混沌区域与黄色周期区域相互交织。图7(a)和图7(b)分别给出了 $k=0.6$ 和 -0.5 时, 对应共存吸引子在 x_1-x_3 平面上的相轨图。表2中列举了

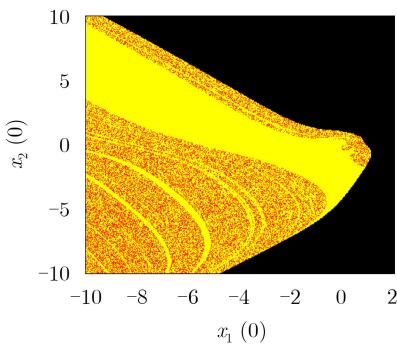


(a) $k=0.6$ 时随单参数初值 $x_1(0)$ 变化的分岔图

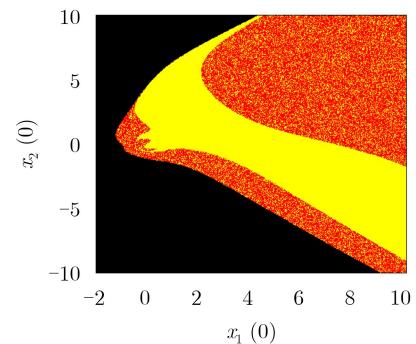


(b) $k=-0.5$ 时随单参数初值 $x_1(0)$ 变化的分岔图

图 5 状态变量 x_1 随状态初值变化的分岔图

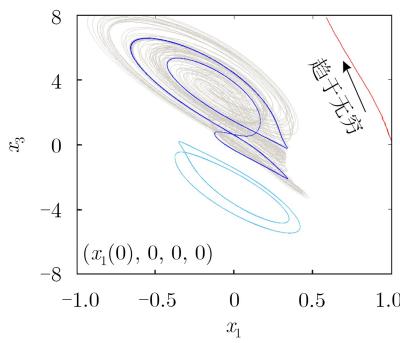


(a) 忆阻耦合强度 $k=0.6$

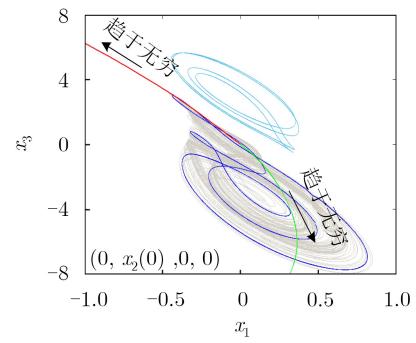


(b) 忆阻耦合强度 $k=-0.5$

图 6 不同忆阻耦合强度下 $x_1(0)-x_2(0)$ 平面的吸引盆



(a) 忆阻耦合强度 $k=0.6$



(b) 忆阻耦合强度 $k=-0.5$

图 7 不同忆阻耦合强度下共存吸引子在 x_1-x_3 平面上的相轨图

图7中不同颜色吸引子对应的状态初值和吸引子类型。上述仿真结果表明, 忆阻HNN(2)产生了初值敏感的超级事件^[23]现象, 具有显著的初值敏感性。

4 电路设计与PSIM仿真验证

参照文献[10,14,21], 对忆阻HNN模型式(2)进行模拟电路等效实现, 得到图8(a)所示等效实现电路。该电路包括8个理想运算放大器、3个反向双曲正切功能函数、1个乘法器, 以及若干电阻和电容。其中, 非理想忆阻突触的等效实现电路如图8(b)所示, 双曲正切函数tanh(\cdot)和反双曲正切函数-tanh(\cdot)的等效实现电路可参考文献[10]。

表 2 图7中不同颜色吸引子对应的初值及吸引子类型

颜色	$k=0.6$	$k=-0.5$	吸引子类型
(-10 ⁻⁶ , 0, 0, 0)	(0, -10 ⁻⁹ , 0, 0)	周期吸引子	
(10 ⁻⁶ , 0, 0, 0)	(0, 10 ⁻⁹ , 0, 0)	多周期吸引子	
(10 ⁻⁵ , 0, 0, 0)	(0, 10 ⁻⁷ , 0, 0)	混沌吸引子	
(1, 0, 0, 0)	(0, -2, 0, 0)	发散	
-	(0, 5, 0, 0)	发散	

图8(a)电路有4个状态变量, 分别为主电路3个积分通道的电容电压 v_1 , v_2 和 v_3 , 以及忆阻模拟器的内部状态变量 v_φ , 对应的电路状态方程建立为

$$\left. \begin{aligned} RC \frac{dv_1}{dt} &= -v_1 + \frac{R}{R_1} \tanh(v_1) + \frac{R}{R_2} \tanh(v_2) \\ &\quad + \frac{R}{R_3} \tanh(v_3) + \frac{R}{R_4} k \varphi(v_1 - v_2) \\ RC \frac{dv_2}{dt} &= -v_2 - \frac{R}{R_6} \tanh(v_1) + \frac{R}{R_5} \tanh(v_2) \\ &\quad - \frac{R}{R_7} k v_\varphi(v_1 - v_2) \\ RC \frac{dv_3}{dt} &= -v_3 - \frac{R}{R_8} \tanh(v_2) \\ RC \frac{dv_\varphi}{dt} &= v_1 - v_2 - v_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

取 RC 的时间常数为1 ms, 即 $R=10$ k Ω , $C=100$ nF, 电路中各元件参数分别计算为: $R_1=R/1.5=6.6667$ k Ω , $R_2=R/2.8=3.5714$ k Ω , $R_3=R/0.5=$

20 k Ω , $R_4=10$ k Ω , $R_5=R/1.2=8.3333$ k Ω , $R_6=R/1.5=6.6667$ k Ω , $R_7=10$ k Ω 和 $R_8=R/20=0.5$ k Ω 。忆阻耦合强度 k 由图8(b)中的比例系数 K 表示。

PSIM电路仿真软件可以精确地设置积分电容的初始值, 采用比例运算模块可以准确设定比例系数 K , 因此, 本文通过PSIM电路仿真对数值仿真结果进行验证。为简化仿真电路, 图8的反双曲正切函数 $\tanh(\cdot)$ 使用PSIM电路仿真软件中的 \tanh 函数模块实现。设定 $K=0.6$, 按图7(a)中各共存吸引子的状态初值调节4个动态元件的初始电压, 截取到的 v_1-v_3 平面上的共存吸引子相轨图如图9(a)所示。调节 $K=-0.5$, 按图7(b)中各共存吸引子的状态初值调节4个动态元件的初始电压, 截取到的 v_1-v_3 平面上的共存吸引子相轨图如图9(b)所示。对比图7和图9的结果可以发现: PSIM电路仿真得到的相轨图与MATLAB数值仿真得到的几乎完全一致, 验证了忆阻HNN模型(2)的电路实现形式也可以展现出初值敏感的动力学行为。

5 结束语

本文采用非理想2次非线性磁控忆阻模拟器描述两个相邻神经元膜电位差诱发的电磁感应电流, 构建了考虑膜电位差电磁感应效应的3神经元忆阻HNN模型。理论分析和数值仿真表明, 该忆阻HNN在确定的忆阻耦合强度下具有不同数量和不同稳定

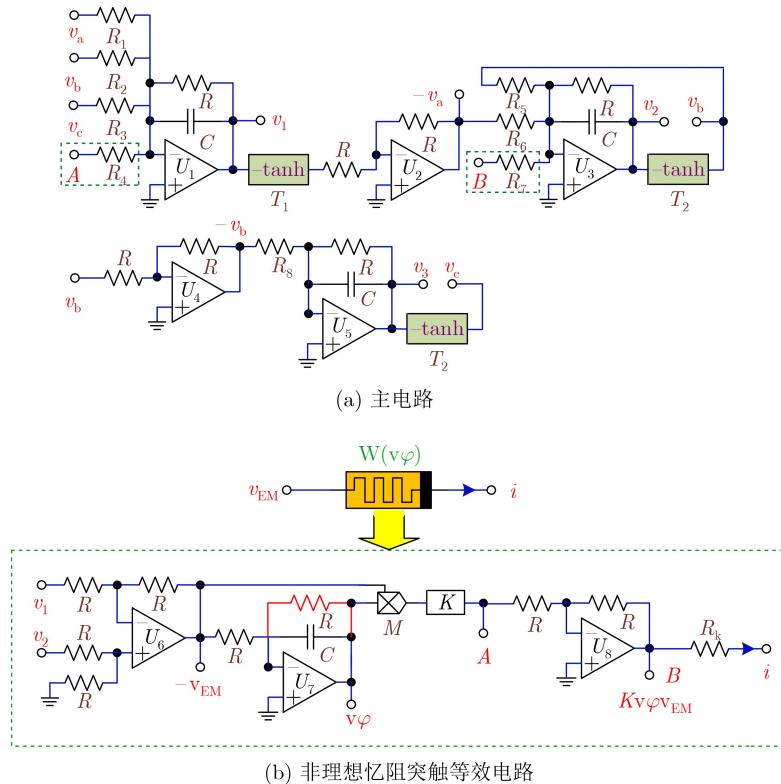
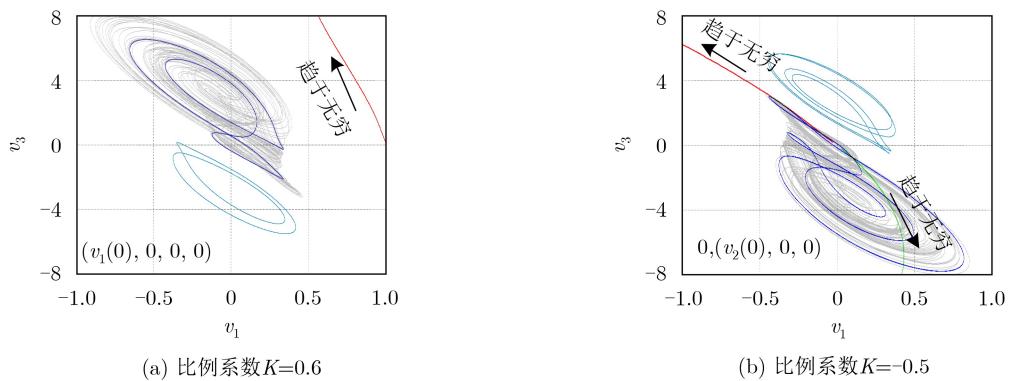


图 8 忆阻HNN模型(2)的等效实现电路

图9 PSIM电路仿真得到的共存吸引子在 v_1 - x_3 平面上的相轨图

状态的确定平衡点，可产生具有不同拓扑结构或不同位置的非对称共存混沌或周期吸引子。特别地，该忆阻HNN的吸引盆呈现出周期和混沌交织的超级事件现象，展现出明显的初值敏感性，可为神经形态电路的工程应用提供更多灵活度。最后，对忆阻HNN模型进行模拟电路等效实现，并通过PSIM电路仿真对所揭示的初值敏感动力学进行了验证。

参 考 文 献

- [1] HOPFIELD J J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 1984, 81(10): 3088–3092. doi: [10.1073/pnas.81.10.3088](https://doi.org/10.1073/pnas.81.10.3088).
- [2] KORN H and FAURE P. Is there chaos in the brain? II. Experimental evidence and related models[J]. *Comptes Rendus Biologies*, 2003, 326(9): 787–840. doi: [10.1016/j.crvi.2003.09.011](https://doi.org/10.1016/j.crvi.2003.09.011).
- [3] MA Jun and TANG Jun. A review for dynamics in neuron and neuronal network[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(3): 1569–1578. doi: [10.1007/s11071-017-3565-3](https://doi.org/10.1007/s11071-017-3565-3).
- [4] 阮秀凯, 张志涌. 基于连续Hopfield型神经网络的QAM信号盲检测[J]. 电子与信息学报, 2011, 33(7): 1600–1605. doi: [10.3724/SP.J.1146.2010.01271](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2010.01271).
RUAN Xiukai and ZHANG Zhiyong. Blind detection of QAM signals using continuous Hopfield-type neural network[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(7): 1600–1605. doi: [10.3724/SP.J.1146.2010.01271](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2010.01271).
- [5] HILLAR C J and TRAN N M. Robust exponential memory in Hopfield networks[J]. *The Journal of Mathematical Neuroscience*, 2018, 8: 1–20. doi: [10.1186/s13408-017-0056-2](https://doi.org/10.1186/s13408-017-0056-2).
- [6] 王春华, 蔺海荣, 孙晶如, 等. 基于忆阻器的混沌、存储器及神经网络电路研究进展[J]. 电子与信息学报, 2020, 42(4): 795–810. doi: [10.11999/JEIT190821](https://doi.org/10.11999/JEIT190821).
WANG Chunhua, LIN Hairong, SUN Jingru, et al. Research progress on chaos, memory and neural network circuits based on memristor[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2020, 42(4): 795–810. doi: [10.11999/JEIT190821](https://doi.org/10.11999/JEIT190821).
- [7] NJITACKE Z T and KENGNE J. Complex dynamics of a 4D Hopfield Neural Networks (HNNs) with a nonlinear synaptic weight: Coexistence of multiple attractors and remerging Feigenbaum trees[J]. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2018, 93: 242–252. doi: [10.1016/j.aeue.2018.06.025](https://doi.org/10.1016/j.aeue.2018.06.025).
- [8] DANCA M F and KUZNETSOV N. Hidden chaotic sets in a Hopfield neural system[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2017, 103: 144–150. doi: [10.1016/j.chaos.2017.06.002](https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.06.002).
- [9] RAJAGOPAL K, MUÑOZ-PACHECO J M, PHAM V T, et al. A Hopfield neural network with multiple attractors and its FPGA design[J]. *The European Physical Journal Special Topics*, 2018, 227(7/9): 811–820. doi: [10.1140/epjst/e2018-800018-7](https://doi.org/10.1140/epjst/e2018-800018-7).
- [10] BAO Bocheng, CHEN Chengjie, BAO Han, et al. Dynamical effects of neuron activation gradient on Hopfield neural network: Numerical analyses and hardware experiments[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, 29(4): 1930010. doi: [10.1142/S021812741930010](https://doi.org/10.1142/S021812741930010).
- [11] NJITACKE Z T, KENGNE J, FOZIN T F, et al. Dynamical analysis of a novel 4-neurons based Hopfield neural network: emergences of antimonotonicity and coexistence of multiple stable states[J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2019, 7(3): 823–841. doi: [10.1007/s40435-019-00509-w](https://doi.org/10.1007/s40435-019-00509-w).
- [12] 刘益春, 林亚, 王中强, 等. 氧化物基忆阻型神经突触器件[J]. 物理学报, 2019, 68(16): 168504. doi: [10.7498/aps.68.20191262](https://doi.org/10.7498/aps.68.20191262).
LIU Yichun, LIN Ya, WANG Zhongqiang, et al. Oxide-based memristive neuromorphic synaptic devices[J]. *Acta Physica Sinica*, 2019, 68(16): 168504. doi: [10.7498/aps.68.20191262](https://doi.org/10.7498/aps.68.20191262).

- [13] PHAM V T, JAFARI S, VAIDYANATHAN S, et al. A novel memristive neural network with hidden attractors and its circuitry implementation[J]. *Science China Technological Sciences*, 2016, 59(3): 358–363. doi: [10.1007/s11431-015-5981-2](https://doi.org/10.1007/s11431-015-5981-2).
- [14] BAO Bocheng, QIAN Hui, XU Quan, et al. Coexisting behaviors of asymmetric attractors in hyperbolic-type memristor based Hopfield neural network[J]. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 2017, 11: No. 81, 1–14. doi: [10.3389/fncom.2017.00081](https://doi.org/10.3389/fncom.2017.00081).
- [15] HU Xiaoyu, LIU Chongxin, LIU Ling, et al. Chaotic dynamics in a neural network under electromagnetic radiation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 91(3): 1541–1554. doi: [10.1007/s11071-017-3963-6](https://doi.org/10.1007/s11071-017-3963-6).
- [16] LIN Hairong and WANG Chunhua. Influences of electromagnetic radiation distribution on chaotic dynamics of a neural network[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 369: 124840. doi: [10.1016/j.amc.2019.124840](https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.124840).
- [17] BAO Han, HU Aihuang, LIU Wenbo, et al. Hidden bursting firings and bifurcation mechanisms in memristive neuron model with threshold electromagnetic induction[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(2): 502–511. doi: [10.1109/TNNLS.2019.2905137](https://doi.org/10.1109/TNNLS.2019.2905137).
- [18] XU Fei, ZHANG Jiqian, JIN Meng, et al. Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 94(2): 775–783. doi: [10.1007/s11071-018-4393-9](https://doi.org/10.1007/s11071-018-4393-9).
- [19] BAO Han, LIU Wenbo, and HU Aihuang. Coexisting multiple firing patterns in two adjacent neurons coupled by memristive electromagnetic induction[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(1): 43–56. doi: [10.1007/s11071-018-4549-7](https://doi.org/10.1007/s11071-018-4549-7).
- [20] CHEN Chengjie, CHEN Jingqi, BAO Han, et al. Coexisting multi-stable patterns in memristor synapse-coupled Hopfield neural network with two neurons[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(4): 3385–3399. doi: [10.1007/s11071-019-04762-8](https://doi.org/10.1007/s11071-019-04762-8).
- [21] CHEN Chengjie, BAO Han, CHEN Mo, et al. Non-ideal memristor synapse-coupled bi-neuron Hopfield neural network: Numerical simulations and breadboard experiments[J]. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2019, 111: 152894. doi: [10.1016/j.aeue.2019.152894](https://doi.org/10.1016/j.aeue.2019.152894).
- [22] BREAKSPEAR M. Dynamic models of large-scale brain activity[J]. *Nature Neuroscience*, 2017, 20(3): 340–352. doi: [10.1038/nn.4497](https://doi.org/10.1038/nn.4497).
- [23] WANG Guangyi, YUAN Fang, CHEN Guanrong, et al. Coexisting multiple attractors and riddled basins of a memristive system[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018, 28(1): 013125. doi: [10.1063/1.5004001](https://doi.org/10.1063/1.5004001).

陈 墨: 女, 1982年生, 副教授, 研究方向为忆阻电路与系统、类脑计算与神经网络。

陈成杰: 男, 1996年生, 硕士生, 研究方向为类脑计算与神经网络、神经混沌动力学。

包伯成: 男, 1965年生, 教授, 研究方向为忆阻电路与系统、混沌信息动力学和类脑计算与神经网络。

徐 权: 男, 1983年生, 副教授, 研究方向为非自治混沌电路与系统、类脑计算与神经网络。