

杂波背景下基于交替方向乘子法的低截获频控阵MIMO 雷达收发联合优化方法

巩朋成^{*①②} 王兆彬^① 谭海明^① 王文钦^②

^①(湖北工业大学太阳能高效利用及储能运行控制湖北省重点实验室 武汉 430068)

^②(电子科技大学通信与信息工程学院 成都 611731)

摘 要: 针对相控阵雷达无法有效实现特定区域能量控制的问题, 该文提出一种杂波环境下基于交替方向乘子法(ADMM)的频控阵MIMO(FDA-MIMO)雷达低截获(LPI)优化设计方法。该方法的优化准则是在保证目标参数估计性能的前提下, 通过联合设计发射波束和接收滤波器使FDA-MIMO雷达在目标2维(距离-方位)区域上辐射的能量尽量小, 即尽可能地降低雷达被截获的概率; 接着利用加权求和的方法将优化准则构造多比例分式规划(FP)和的问题; 然后利用循环迭代的方法, 将优化问题转化成两个子优化问题; 最后基于ADMM方法消除等式约束, 并通过最小化2阶2次近似优化问题获得发射波束的闭合解。此外, 也分析了该方法的计算复杂度。仿真部分通过输出信干噪比(SINR)、发射和接收方向图验证了该方法的有效性。

关键词: MIMO雷达; 频控阵; 多比例分式规划; 波形设计; 交替方向乘子法

中图分类号: TN958

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)05-1267-08

DOI: [10.11999/JEIT200445](https://doi.org/10.11999/JEIT200445)

Joint Design of the Transmit and Receive Beamforming via Alternating Direction Method of Multipliers for LPI of Frequency Diverse Array MIMO Radar in the Presence of Clutter

GONG Pengcheng^{①②} WANG Zhaobin^① TAN Haiming^① WANG Wenqin^②

^①(Hubei Key Laboratory for High-efficiency Utilization of Solar Energy and Operation Control
of Energy Storage System, Hubei University of Technology, Wuhan 430068, China)

^②(School of Communication and Information Engineering, University of Electronic Science
and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: In view of the limitation of the phased-array on suppressing the range-dependent interference, a joint design of the transmit and receive beamforming via the Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) method for Low Probability of Intercept (LPI) of Multiple-Input Multiple-Output with Frequency Diverse Array (FDA-MIMO) radar in the presence of clutter is proposed. The problem of joint design is to maximize the performance of target parameter estimation, and minimize the transmit energy at the target region which enhances LPI capability. Following a weighted sum of the performance metric, the original problem is firstly recasts to a multiple-ratio Fractional Programming (FP) problem. Subsequently, an iterative algorithm is developed. Concretely, at each iteration, the transmit beamforming matrix is optimized by employing ADMM method and the quadratic approximation algorithm. Moreover, the computational complexity of the proposed algorithm is discussed. Numerical simulations are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) radar; Frequency diverse array; Multiple-ratio fractional programming; Waveform design; Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM)

收稿日期: 2020-06-04; 改回日期: 2020-11-05; 网络出版: 2020-11-11

*通信作者: 巩朋成 gpcheng03@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(62071172), 湖北省自然科学基金(2018CFB545), 太阳能高效利用及储能运行控制湖北省重点实验室开放基金(HBSEES202001)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (62071172), The Natural Science Foundation of Hubei Province (2018CFB545), The Open Foundation of Hubei Key Laboratory for High-efficiency Utilization of Solar Energy and Operation Control of Energy Storage System (HBSEES202001)

1 引言

在现代电子对抗中, 日趋多变复杂的雷达电磁环境对低截获技术提出了新的要求, 希望雷达系统能够根据目标和环境的变化而实时地调整发射端的各项参数指标, 以达到更好的低截获效果。低截获概率(Low Probability of Intercept, LPI)^[1]雷达能够探测目标的同时降低被敌方发现的概率, 为雷达及其载体的安全性提供保障。研究LPI雷达及其实现技术显得日益迫切, 而通过有效的技术使得敌方无法获得雷达发射的辐射能量更是关键所在。

多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output, MIMO)雷达通过波形分集技术在空间形成低增益的宽波束探测空域, 具有更好的低截获优势受到越来越多的关注^[2-4]。为提高雷达射频隐身性能, 廖雯雯等人^[5]基于新体制雷达MIMO探测模式, 提出了MIMO雷达隐身性能优化的目标跟踪算法; 同时, 杨少委等人^[6]还分析了MIMO雷达各参数与其搜索性能及射频隐身性能的关系, 提出了一种MIMO雷达搜索模式下射频隐身优化的算法。赵宜楠等人^[7]针对距离因子不适用于分析分布式MIMO雷达低截获特性的问题, 提出了能够定量衡量双基地雷达低截获特性的参数, 并分析了影响分布式MIMO雷达LPI的因素。针对杂波和干扰背景下分布式MIMO雷达LPI问题, Shi等人^[8]提出一种互信息约束并使总功率最小的MIMO雷达发射波形设计方法。

多数研究LPI的文献以相控阵为研究对象, 利用相控阵实现波束的空间扫描; 但相控阵的缺点是其阵列方向图与距离无关, 只能实现阵列信号的定向而不能实现特定区域能量控制。2006年的IEEE国际雷达会议上, Antonik等人^[9]首次提出了一种频控阵(Frequency Diverse Array, FDA)雷达的概念。在FDA中, 相邻阵元存在一个较小的频率增量, 该频率增量相对时间而言是恒定的, 且远远小于载频, 于是发射信号在频域上部分重叠^[10]。Antonik等人指出FDA波束形成器的波束扫描角随着距离而变化, 结果FDA雷达的波束具有角度和距离依赖性, 这为目标的距离和角度参数联合定位提供可能。为了更好地利用FDA在距离和角度维的自由度, 文献^[11-13]已将FDA技术应用到了MIMO雷达。

针对上述问题, 基于交替方向乘子法(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)^[14]和频控阵, 本文提出一种杂波环境下低截获的FDA-MIMO雷达发射和接收联合优化设计方法。本方法通过设计发射波束和接收滤波器使FDA-MIMO雷达在目标2维区域上辐射的能量尽量小(形成零陷);

同时考虑最大化输出信干噪比(Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio, SINR)。对此, 首先在杂波条件下, 利用加权求和的方法将优化准则构造多比例分式规划和的优化问题; 接着利用循环迭代的方法, 将优化问题转化成两个子优化问题: 在发射波束固定时, 利用最小方差无畸变响应(Minimum Variance Distortionless Response, MVDR)方法求解接收滤波器; 在接收滤波器固定时, 带约束的优化问题是多维多比例分式规划问题, 很难用Dinkelbach^[15]方法求解, 本文提出基于ADMM方法消除等式约束, 接着利用2阶2次近似方法获得发射波束的闭合解。此外, 本文也分析了提出方法的收敛性能和计算复杂度。

2 信号模型及问题描述

2.1 频控阵MIMO雷达信号模型

考虑窄带频控阵MIMO雷达系统模型, 其阵列由 M_t 个发射天线和 M_r 个接收天线构成, 且令第 m 个发射天线上发射的信号 $x_m(t)$ 为

$$\begin{aligned} x_m(t) &= \mathbf{w}_m \tilde{s}(t) \exp\{j2\pi f_m t\} \\ &\triangleq s_m(t) \exp\{j2\pi f_m t\}, \\ 0 \leq t \leq T_n, \quad m &= 1, 2, \dots, M_t \end{aligned} \quad (1)$$

其中, T_n 是雷达脉冲持续时间, $\mathbf{w}_m \in \mathbb{C}^{1 \times K}$ 为发射波形加权向量, $\tilde{s}(t) = [\tilde{s}_1(t), \tilde{s}_2(t), \dots, \tilde{s}_K(t)]^T \in \mathbb{C}^{K \times 1}$ 为包含 K 个正交波形的信号矢量, $(\cdot)^T$ 表示转置运算, $f_m = f_0 + (m-1)\Delta f$ 是第 m 个天线上的载波频率, f_0 是第1个阵元的载波频率, Δf 是频率增量, 且 $\Delta f \ll f_0$, $K \leq M_t$ 。

式(1)中, 发射信号 $s_m(t)$ 是由 K 个正交信号 $\tilde{s}_k(t)$ 的线性组合产生的。因此, $M_t \times 1$ 的发射波形向量可表示为

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_{M_t}(t)]^T \triangleq \mathbf{W} \tilde{\mathbf{s}}(t) \quad (2)$$

其中, $\mathbf{W}$ 定义为发射波束^[13], 其矩阵形式为

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{M_t}]^T \quad (3)$$

考虑在远场条件下, 位于角度 θ 、相对于阵列第1个阵元距离 r 处的接收信号为

$$\mathbf{a}^T(r, \theta) \mathbf{W} \tilde{\mathbf{s}}(t) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{a}(r, \theta) = [e^{j\Delta\varphi_1}, \dots, e^{j\Delta\varphi_m}, \dots, e^{j\Delta\varphi_{M_t}}]^T$ 是发射阵列的导向向量, $\Delta\varphi_m$ 表示为

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_m \approx \frac{2\pi}{c} [-f_0(m-1)d_t \sin\theta - (m-1) \\ \cdot \Delta f d_t \sin\theta + (m-1)r\Delta f] \end{aligned} \quad (5)$$

其中, d_t 表示发射阵列的阵元间隔。

暂不考虑散射体的多普勒转移, 则对静止点目

标而言, 发射信号经目标散射反射且在接收端通过下变频和匹配滤波的接收信号为

$$\mathbf{Y}_s = \beta(r, \theta) \mathbf{b}(\theta) \mathbf{a}^T(r, \theta) \mathbf{W} \quad (6)$$

其中, $(\cdot)^H$ 表示共轭转置, $\beta(r, \theta) \in \mathbb{C}$ 为目标所对应的散射系数, $\mathbf{b}(\theta)$ 表示接收导向向量。式(6)表示发射端采用频控阵列, 而接收天线利用相控阵列接收回波信号。

接收阵列的导向向量 $\mathbf{b}(\theta)$ 定义为

$$\mathbf{b}(\theta) = \left[1, e^{-j \frac{2\pi f_0 d_r \sin \theta}{c}}, \dots, e^{-j \frac{2\pi f_0 (M_r - 1) d_r \sin \theta}{c}} \right]^T \quad (7)$$

其中, d_r 是接收阵列的阵元间隔。

堆积接收信号, 即将 $M_r \times K$ 的矩阵 $\mathbf{Y}_s$ 转换成 $M_r K \times 1$ 的列向量 $\mathbf{y}_s = \text{vec}(\mathbf{Y}_s)$, 则式(6)可转化为

$$\mathbf{y}_s = \text{vec}(\mathbf{Y}_s) = \beta(r, \theta) (\mathbf{W}^T \otimes \mathbf{I}_{M_r}) \cdot [\mathbf{a}(r, \theta) \otimes \mathbf{b}(\theta)] \triangleq \beta(r, \theta) \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r, \theta) \quad (8)$$

其中, $\otimes$ 表示Kronecker积, $\mathbf{v}(r, \theta) \triangleq \mathbf{a}(r, \theta) \otimes \mathbf{b}(\theta)$ 表示“虚拟阵列”的导向向量, $\mathbf{I}_{M_r}$ 表示 $M_r \times M_r$ 的单位矩阵, $\tilde{\mathbf{W}}$ 为发射波束矩阵与单位矩阵的Kronecker积, 即

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^T \otimes \mathbf{I}_{M_r} \quad (9)$$

本文考虑FDA-MIMO雷达接收到的回波信号中, 除了感兴趣的目标信号外, 也包含了与目标信号相干的杂波信号以及干扰和噪声信号。考虑在 $(r_{c,q}, \theta_{c,q})$ 处存在 Q 个杂波散射体, 则雷达接收到的杂波信号为

$$\mathbf{y}_c = \sum_{q=1}^Q \beta_{c,q} (\mathbf{W}^T \otimes \mathbf{I}_{M_r}) [\mathbf{a}(r_{c,q}, \theta_{c,q}) \otimes \mathbf{b}(\theta_{c,q})] \quad (10)$$

其中, $\beta_{c,q}, r_{c,q}, \theta_{c,q}$ 分别表示第 q 个杂波散射体的幅度、距离和角度。同时假设有 L 个来自不同方向的干扰信号, 则接收到的干扰信号可表示为

$$\mathbf{y}_j = \sum_{l=1}^L \beta_{j,l} [\bar{\mathbf{s}}_{j,l} \otimes \mathbf{b}(\theta_{j,l})] \quad (11)$$

其中, $\beta_{j,l}$ 和 $\theta_{j,l}$ 分别表示第 l 个干扰信号的幅度和角度, 且 $\beta_{j,l}$ 服从均值为0, 协方差为 $\delta_l^2 = E[|\beta_{j,l}|^2]$ 的循环对称高斯分布, $E[\cdot]$ 表示取数学期望, $\bar{\mathbf{s}}_{j,l}$ 表示包含干扰信号的随机向量, 且服从零均值高斯分布。

于是, 存在杂波信号、干扰信号和噪声情况下, FDA-MIMO雷达接收端总的接收信号为

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_s + \mathbf{y}_c + \mathbf{y}_j + \mathbf{e} \quad (12)$$

其中, $\mathbf{e}$ 是均值为0、协方差为 σ_e^2 的复高斯噪声。

2.2 问题描述

本文研究在一定的约束条件下, 设计发射加权矩阵和接收滤波器使得雷达输出SINR最大化, 以

抑制杂波和干扰信号; 同时考虑最小化目标(距离-方位)处的辐射功率, 降低雷达截获概率。设接收滤波器为 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{M_r K \times 1}$, 则接收端的信号经过滤波器后的输出SINR为

$$\begin{aligned} \text{SINR}(\mathbf{x}, \mathbf{W}) &= \frac{E(|\mathbf{x}^H \mathbf{y}_s|^2)}{\mathbf{x}^H E(\mathbf{y}_c \mathbf{y}_c^H + \mathbf{y}_j \mathbf{y}_j^H + \mathbf{e} \mathbf{e}^H) \mathbf{x}} \\ &= \frac{\delta_t^2 |\mathbf{x}^H \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r, \theta)|^2}{\mathbf{x}^H (\mathbf{R}_c + \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_e) \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (13)$$

其中, 目标的协方差为 $\delta_t^2 = E(|\beta(r, \theta)|^2)$; $\mathbf{R}_e = E[\mathbf{e} \mathbf{e}^H] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{M_r K}$ 为噪声协方差矩阵; $\mathbf{R}_c$ 和 $\mathbf{R}_j$ 分别为杂波协方差矩阵和干扰协方差矩阵, 其分别可表示为

$$\mathbf{R}_c = E[\mathbf{y}_c \mathbf{y}_c^H] = \sum_{q=1}^Q \delta_{c,q}^2 \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r_{c,q}, \theta_{c,q}) \mathbf{v}^H(r_{c,q}, \theta_{c,q}) \tilde{\mathbf{W}}^H \quad (14)$$

$$\mathbf{R}_j = E[\mathbf{y}_j \mathbf{y}_j^H] = \sum_{l=1}^L \delta_l^2 [\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{b}(\theta_{j,l}) \mathbf{b}^H(\theta_{j,l})] \quad (15)$$

其中, 杂波的协方差为 $\delta_{c,q}^2 = E[\beta_{c,q} \beta_{c,q}^H]$, 且令 $\mathbf{R}_{je} = \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_e$ 。

同时利用式(4), FDA-MIMO雷达发射信号在目标 (r, θ) 处的功率可定义为^[16]

$$P(\mathbf{W}) = \mathbf{a}^H(r, \theta) \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{a}(r, \theta) = \|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(r, \theta)\|_2^2 \quad (16)$$

其中, $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵2范数。

于是, 本文以输出SINR最大化且目标处的功率最小化为目标函数, 结合每个天线上的能量约束, 联合设计 $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{x}$, 其优化问题的数学表示为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}} \quad & P(\mathbf{W}) \quad \text{and} \quad \max_{\mathbf{x}, \mathbf{W}} \quad \text{SINR}(\mathbf{x}, \mathbf{W}) \\ \text{s.t.} \quad & (\mathbf{W} \odot \mathbf{W}^*) \mathbf{1}_K = E_t \mathbf{1}_{M_t} \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $\odot$ 表示Hadamard积, $(\cdot)^*$ 表示共轭运算, $\mathbf{1}_K$ 表示 $K \times 1$ 的全1向量, $\mathbf{1}_{M_t}$ 表示 $M_t \times 1$ 的全1向量, E_t 表示每个天线上的发射能量。

在忽略杂波但存在干扰的情况下, 式(17)可构造单个分式规划的最小化问题。然而, 在考虑杂波和干扰情况下, 如果将式(17)的目标函数直接构造造成单个分式规划的最小化问题, 则目标函数的分子部分是关于 $\mathbf{W}$ 的4次方函数, 该问题很难求解。对此, 本文利用加权求和的方法将其转化成多分式规划和的优化问题, 再利用循环迭代的方法联合求解 $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{x}$ 。

3 发射波束和接收滤波器联合设计

本文利用加权求和的方法, 将优化问题式(17)构造造成多比例优化问题, 即

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{W}} \quad & \omega_1 P(\mathbf{W}) + \frac{\omega_2}{\text{SINR}(\mathbf{x}, \mathbf{W})} \\ \text{s.t.} \quad & (\mathbf{W} \odot \mathbf{W}^*) \mathbf{1}_K = E_t \mathbf{1}_{M_t} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中, $\omega_m \in [0, 1]$ 是第 m 个目标函数的加权, 且满足 $\sum_{m=1}^2 \omega_m = 1$ 。

对于式(18), 本文利用循环迭代的方法, 将其分别转化成两个子优化问题: (1) 在 $\mathbf{W}$ 固定时, 利用MVDR方法求解 $\mathbf{x}$; (2) 在 $\mathbf{x}$ 固定时, 基于ADMM方法求解 $\mathbf{W}$ 。

3.1 接收滤波器优化

在已知发射加权矩阵 $\mathbf{W}$ 时, 忽略常数部分, 式(18)简化为关于 $\mathbf{x}$ 的无约束优化问题

$$\max_{\mathbf{x}} \frac{\omega_2 \left| \mathbf{x}^H \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r, \theta) \right|^2}{\mathbf{x}^H (\mathbf{R}_c + \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_e) \mathbf{x}} \quad (19)$$

式(19)可进一步转化成MVDR问题, 即

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \mathbf{x}^H (\mathbf{R}_c + \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_e) \mathbf{x}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{x}^H \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r, \theta) = 1 \quad (20)$$

于是, 可得式(19)的优化解为

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{R}_{cje}^{-1} \mathbf{W}_1}{\mathbf{W}_1^H \mathbf{R}_{cje}^{-1} \mathbf{W}_1} \quad (21)$$

其中, $\mathbf{W}_1 = \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r, \theta)$, $\mathbf{R}_{cje} = \mathbf{R}_c + \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_e$ 。

3.2 发射波束优化

下面考虑在 $\mathbf{x}$ 固定时, 利用ADMM方法求解 $\mathbf{W}$ 。首先, 式(18)的优化问题可等价变换为

$$\min_{\mathbf{d}} \quad \omega_1 \mathbf{d}^H \mathbf{R}_A \mathbf{d} + \frac{\omega_2 \mathbf{d}^H \mathbf{R}_{cvx} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d}}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{d}^H \mathbf{d} = M_t E_t \quad (22)$$

其中, $\mathbf{R}_{cvx} = \sum_{q=1}^Q \delta_{c,q}^2 \mathbf{P}(\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^T) \mathbf{v}^*(r_{c,q}, \theta_{c,q}) \mathbf{v}^T(r_{c,q}, \theta_{c,q}) (\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^*) \mathbf{P}^T + \alpha(\mathbf{x}) \mathbf{I}_{KM_t}$, $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{X})$, $\mathbf{P}$ 是交换矩阵, $\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \mathbf{R}_{je} \mathbf{x} / M_t E_t$; $\mathbf{R}_{vx} = \mathbf{P}(\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^T) \mathbf{v}^*(r, \theta) \mathbf{v}^T(r, \theta) (\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^*) \mathbf{P}^T$, $\mathbf{d} = \text{vec}(\mathbf{W})$; $\mathbf{R}_A = \mathbf{I}_K \otimes \mathbf{A}(r, \theta)$, $\mathbf{A}(r, \theta) = \mathbf{a}(r, \theta) \mathbf{a}^H(r, \theta)$ 。下面证明式(18)到式(22)的转换。

证明 首先利用 $\text{tr}(\mathbf{B}^H \mathbf{C}) = \text{vec}^H(\mathbf{B}) \text{vec}(\mathbf{C})$ [17], 式(16)可转化为

$$\left\| \mathbf{W}^H \mathbf{a}(r, \theta) \right\|_2^2 = \text{vec}^H(\mathbf{W}) (\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{A}(r, \theta)) \text{vec}(\mathbf{W}) \quad (23)$$

其中, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹。

其次, 式(13)的分子部分可以转化为

$$\left| \mathbf{x}^H \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r, \theta) \right|^2 = \mathbf{x}^T (\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_{M_r})^H \mathbf{v}^*(r, \theta) \mathbf{v}^T(r, \theta) \cdot (\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_{M_r}) \mathbf{x}^* \quad (24)$$

于是, 通过引入交换矩阵 $\mathbf{P}$, 利用交换矩阵的性质 $\text{vec}(\mathbf{W}^T) = \mathbf{P}^T \text{vec}(\mathbf{W})$, 可以证明

$$\left| \mathbf{x}^H \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r, \theta) \right|^2 = \text{vec}^H(\mathbf{W}) \mathbf{P}(\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^T) \mathbf{v}^*(r, \theta) \mathbf{v}^T(r, \theta) \cdot (\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^*) \mathbf{P}^T \text{vec}(\mathbf{W}) \quad (25)$$

同样, 式(13)的分母部分可转化为

$$\mathbf{x}^H (\mathbf{R}_c + \mathbf{R}_{je}) \mathbf{x} = \sum_{q=1}^Q \delta_{c,q}^2 \mathbf{d}^H \mathbf{P}(\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^T) \mathbf{v}^* \cdot (r_{c,q}, \theta_{c,q}) \mathbf{v}^T(r_{c,q}, \theta_{c,q}) \cdot (\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^*) \mathbf{P}^T \mathbf{d} + \alpha(\mathbf{x}) \mathbf{d}^H \mathbf{d} \quad (26)$$

综上所述, 式(18)可以转化到式(22)。证毕

式(26)中的目标函数是多维的多比例优化函数 [15], 是一个非确定性 (Non-deterministic Polynomial, NP) 问题, 很难用Dinkelbach方法求解。针对此, 本文提出基于ADMM方法求解该优化问题。

引入辅助变量 $\mathbf{h}$, 式(22)转化为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{h}} \quad & \omega_1 \mathbf{d}^H \mathbf{R}_A \mathbf{d} + \frac{\omega_2 \mathbf{d}^H \mathbf{R}_{cvx} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d}} \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathbf{h}\|_2^2 = M_t E_t, \quad \mathbf{h} - \mathbf{d} = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

为了解式(27), 本文引入拉格朗日乘子向量 $\boldsymbol{\lambda}$, 利用ADMM方法将第2个约束转化到目标函数中, 而第1个约束保持不变。则式(27)的增广拉格朗日函数为

$$\min_{\mathbf{h}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}} \quad f_{\rho}(\mathbf{h}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}) = f_d(\mathbf{d}) + \Re\{\boldsymbol{\lambda}^H (\mathbf{h} - \mathbf{d})\} + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{h} - \mathbf{d}\|_2^2 \quad (28)$$

其中, ρ 为惩罚参数, 第1项定义为

$$f_d(\mathbf{d}) = \omega_1 \mathbf{d}^H \mathbf{R}_A \mathbf{d} + \frac{\omega_2 \mathbf{d}^H \mathbf{R}_{cvx} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d}} \quad (29)$$

本文利用ADMM方法迭代求解式(28), 在第 $(n+1)$ 次迭代时, ADMM迭代为

$$\mathbf{d}^{n+1} = \arg \min_{\mathbf{d}} \quad f_{\rho}(\mathbf{h}^n, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}^n) \quad (30)$$

$$\mathbf{h}^{n+1} = \arg \min_{\mathbf{h} \in \Omega_h} \quad f_{\rho}(\mathbf{h}, \mathbf{d}^{n+1}, \boldsymbol{\lambda}^n) \quad (31)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{n+1} = \boldsymbol{\lambda}^n + \rho(\mathbf{h}^{n+1} - \mathbf{d}^{n+1}) \quad (32)$$

其中, $\Omega_h = \{\mathbf{h} \mid \|\mathbf{h}\|_2^2 = M_t E_t\}$ 。下面考虑求解式(30)和式(31)。

(1) 更新 $\mathbf{d}$: 在固定 $\mathbf{h}^n$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^n$ 时, 式(30)的最小化问题为

$$\min_{\mathbf{d}} \quad f_{\rho}(\mathbf{h}^n, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}^n) = f_d(\mathbf{d}) + \Re\{(\boldsymbol{\lambda}^n)^H (\mathbf{h}^n - \mathbf{d})\} + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{h}^n - \mathbf{d}\|_2^2 \quad (33)$$

由于 $f_d(\mathbf{d})$ 是分式规划, 式(33)很难解决。为了解决式(33), 将 $f_d(\mathbf{d})$ 利用当前的值 $\mathbf{d}^n$ 近似处理 [18]。本文考虑利用2阶2次近似, 即

$$f_d(\mathbf{d}) \approx f_d(\mathbf{d}^n) + \nabla^H f_d(\mathbf{d})|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}^n}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^n) + \frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^n)^H \mathbf{H}_d(\mathbf{d})|_{\mathbf{d}=\mathbf{d}^n}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^n) \quad (34)$$

其中,

$$\nabla f_d(\mathbf{d}) = 2\omega_1 \mathbf{R}_A \mathbf{d} + \frac{\omega_2 \mathbf{R}_{cvx} \mathbf{d} - 2f_2(\mathbf{d}) \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d}} \quad (35)$$

$$f_2(\mathbf{d}) = \frac{\omega_2 \mathbf{d}^H \mathbf{R}_{cvx} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d}} \quad (36)$$

$\mathbf{H}_d(\mathbf{d})$ 表示 $f_d(\mathbf{d})$ 的Hessian矩阵, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d(\mathbf{d}) = & 2\omega_1 \mathbf{R}_A + \frac{2\omega_2 \mathbf{R}_{cvx} - 2f_2(\mathbf{d}) \mathbf{R}_{vx}}{\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d}} \\ & - \frac{4\omega_2 (\mathbf{R}_{cvx} \mathbf{d} \mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} + \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d} \mathbf{d}^H \mathbf{R}_{cvx})}{(\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d})^2} \\ & + \frac{8f_2(\mathbf{d}) \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d} \mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx}}{(\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d})^2} \end{aligned} \quad (37)$$

针对式(33), 通过求解 $\partial f_\rho(\mathbf{h}^n, \mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}^n)/\partial \mathbf{d} = 0$, 可得

$$\nabla f_d(\mathbf{d}^n) + \mathbf{H}_d(\mathbf{d}^n)(\mathbf{d} - \mathbf{d}^n) + \rho \mathbf{d} - \rho \left(\mathbf{h}^n + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\lambda}^n \right) = 0 \quad (38)$$

求解式(38), 可得 $\mathbf{d}$ 的解为

$$\mathbf{d}^{n+1} = \boldsymbol{\Xi}^{-1} \boldsymbol{\zeta} \quad (39)$$

其中,

$$\boldsymbol{\Xi} = \mathbf{H}_d(\mathbf{d}^n) + \rho \mathbf{I} \quad (40)$$

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{H}_d(\mathbf{d}^n) \mathbf{d}^n + \rho \left(\mathbf{h}^n + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\lambda}^n \right) - \nabla f_d(\mathbf{d}^n) \quad (41)$$

(2) 更新 $\mathbf{h}$: 在固定 $\mathbf{d}^{n+1}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^n$ 时, 式(31)的最小化问题为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{h}} \quad & f_\rho(\mathbf{h}, \mathbf{d}^{n+1}, \boldsymbol{\lambda}^n) = \Re\{(\boldsymbol{\lambda}^n)^H (\mathbf{h} - \mathbf{d}^{n+1})\} \\ & + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{h} - \mathbf{d}^{n+1}\|_2^2, \\ \text{s.t.} \quad & \|\mathbf{h}\|_2^2 = M_t E_t \end{aligned} \quad (42)$$

于是, 式(42)的闭合解为

$$\mathbf{h}^{n+1} = \frac{\sqrt{M_t E_t} (\mathbf{d}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}/\rho)}{\|\mathbf{d}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}/\rho\|_2} \quad (43)$$

假设本文所提方法的外迭代和内迭代次数分别用 k 和 n 表示, 根据上面的推导, 则提出方法的具体步骤如下:

初始化: 外迭代 $k=0$, 初始化发射波束加权矩阵 $\mathbf{W}^k$;

步骤 1 利用 $\mathbf{W}^k$ 计算 $\mathbf{W}_1$ 和 $\mathbf{R}_{cje}$, 利用式(21)优化 $\mathbf{x}^{(k+1)}$;

步骤 2 利用 $\mathbf{x}^{k+1}$ 更新 $\mathbf{R}_{vx}$ 和 $\mathbf{R}_{cvx}$; 内迭代 $n=0$, 令 $\mathbf{d}^{k,0} = \text{vec}(\mathbf{W}^k)$, 利用如下步骤更新 $\mathbf{d}^{k+1}$:

步骤2-1: 利用式(35)和式(37)分别计算 $\nabla f_d(\mathbf{d})$ 和 $\mathbf{H}_d(\mathbf{d})$, 利用式(39)更新 $\mathbf{d}^{k,n+1}$;

步骤2-2: 利用式(43) 更新 $\mathbf{h}^{k,n+1}$;

步骤2-3: 利用式(32) 更新 $\boldsymbol{\lambda}^{k,n+1}$;

步骤2-4: 重复迭代步骤2-1~步骤2-3, 直到一定的迭代次数, 输出 $\mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^{k,n+1}$;

步骤 3 重复迭代步骤1和步骤2, 直到满足 $|\text{SINR}^{(k+1)} - \text{SINR}^{(k)}|/\text{SINR}^{(k)} < \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$.

3.3 计算复杂度分析

本文所提方法的计算复杂度根据迭代次数线性增加。在每次外迭代中, 接收滤波器 $\mathbf{x}$ 的更新需要计算矩阵逆, 其复杂度为 $O(M_r^3 K^3)$ 。在内迭代中, 利用ADMM需要更新 $\{\mathbf{d}, \mathbf{h}, \boldsymbol{\lambda}\}$ 。更新 $\mathbf{d}$ 需要计算 $\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{\zeta}$ 和矩阵逆, 其复杂度分别为 $O(M_t^2 K^2)$, $O(M_t^2 K^2)$, $O(M_t^3 K^3)$ 。同样, 更新 $\mathbf{h}$ 需要的计算复杂度为 $O(M_t K)$ 。因此, 本文所提方法的总计算复杂度为 $O(2M_t^2 K^2 + M_t^3 K^3 + M_t K + M_r^3 K^3)$ 。

4 仿真实验

本节通过实验验证在存在杂波、干扰和噪声情况下所提方法的性能。假设频控阵MIMO雷达系统的发射天线和接收天线数分别为 $M_t = 8$ 和 $M_r = 8$, 其天线阵列按均匀线阵布置, 且收发天线间隔为半波长; 载频频率为 $f_0 = 1$ GHz, 频率增量为 $\Delta f = 3$ MHz; 每个天线上的发射能量为 $E_t = 1$; 仿真中 K 分别取6, 7和8。此外, 假设目标信号的空间位置为 $(50 \text{ m}, 10^\circ)$, 其功率为20 dB; 3个与发射信号相干的点杂波位于 $(50 \text{ m}, -50^\circ)$, $(25 \text{ m}, 10^\circ)$ 和 $(75 \text{ m}, 40^\circ)$, 且杂波功率均为30 dB; 干扰信号来自2个方向分别为 -30° 和 60° , 其功率均为35 dB; 高斯噪声的协方差为 $\sigma_e^2 = 0$ dB。

实验1 验证所提方法的收敛性能。图1和图2分别给出了在不同 K 值时, 所提方法的输出SINR随迭代次数和杂噪比的变化情况。由图1可知, 随着 K 的增加, 输出SINR的收敛性能更好, 且 $K=8$ 时的输出SINR要明显优于其它两种情况。由图2可知, 当 $K=8$ 时, 所提方法的输出SINR随杂噪比变化基本上恒定不变。为了进一步验证本文所提方法的输出SINR性能, 图3对比了在不同 K 值时, 所提方法的输出SINR随信噪比的变化情况。由图3可知, 当 K 值固定时所提方法的输出SINR随信噪比的增加而线性增加; 此外, 在相同信噪比情况下, 所提方法的输出SINR随 K 值增加而增大。总之, 由图1—图3可知, 随着 K 值增加, 所提方法的收敛速度会更快, 同时其目标检测性能也更好。

实验2 仿真对比所提方法的发射方向图。图4(a)和图4(b)分别对比了在角度维和距离维所提方法的发射方向图,其中发射方向图的定义如式(17)所示。由图4可知,不管在距离维还是角度维,所提方法的发射方向图在目标处50 m和10°都形成很深的零陷,且其零陷随着 K 值增加而加深。在 $K=8$ 时,所提方法在目标处形成的零陷在-110 dB左右。因此,所提方法通过设计发射波束能够在目标0维区域实现发射功率控制,从而也降低了雷达被截获的概率。

实验3 仿真对比所提方法在目标和杂波位置的接收方向图。接收方向图定义为

$$RP(x, W) = \left| x^H \tilde{W} v(r, \theta) \right|^2 \quad (44)$$

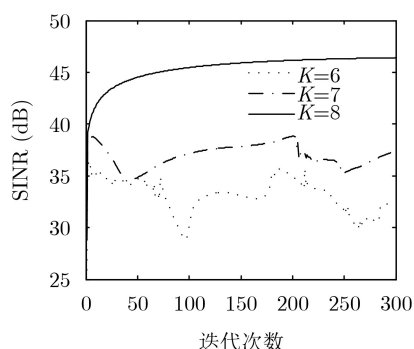


图1 在不同迭代次数时, SINR性能比较

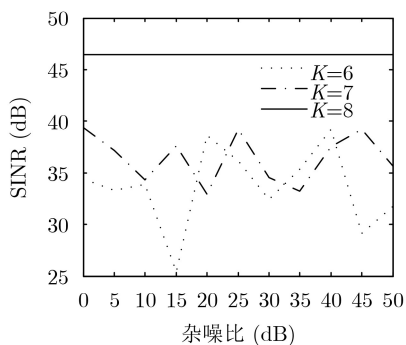


图2 在不同杂噪比时, SINR性能比较

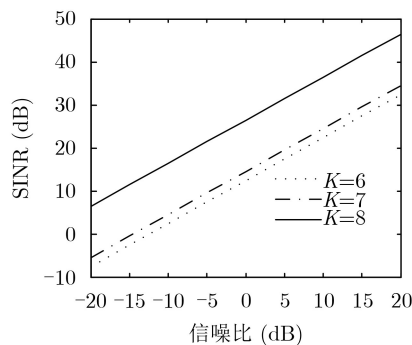
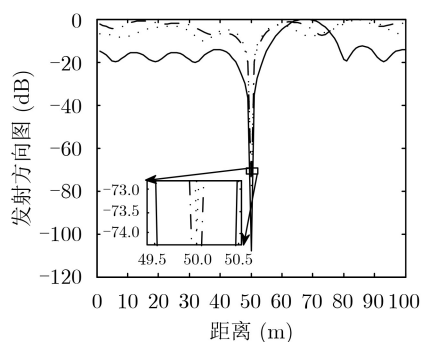
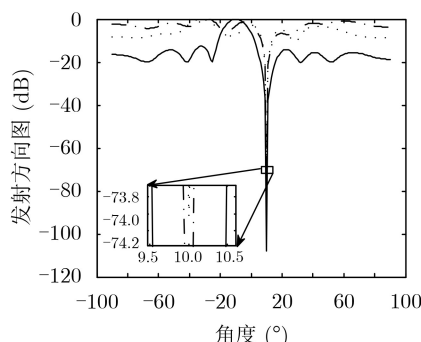


图3 在不同信噪比时, SINR性能比较



(a) 距离维发射方向图



(b) 角度维发射方向图

图4 发射方向图比较

首先,图5给出了所提方法在目标空间位置处的接收方向图。由图5(a)可知,在目标位置角度维的主瓣区域, $K=8$ 时的接收方向图比其它两种情况具有更好的能量聚焦。在杂波位置 -50° ,以及干扰方向 -30° 和 60° ,所提方法都形成了准确的零陷,其零陷在 -100 dB以下。由图5(b)可知,在距离维的主瓣区域,所提方法当 $K=8$ 时也能更好地在距离50 m能量聚焦,且在杂波位置25 m形成了准确的零陷。因此,由图5可知,不管在距离维还是角度维,所提方法的接收方向图在杂波和干扰信号处形成了准确的零陷,其都随着 K 增加而增加;所提方法在目标区域实现了准确的能量聚焦,这也表明了所提方法目标检测的性能。

其次,在杂波位置处接收方向图的比较如图6所示。图6(a)和图6(b)展示了所提方法分别在杂波25 m和75 m处角度维的接收方向图。从图6(a)和图6(b)可以看到,在杂波 10° 和 40° ,以及干扰 -30° 和 60° 处,所提方法都形成了至少 -70 dB以下的零陷。图6(c)展示了所提方法在 40° 处距离维的接收方向图。从图6(c)可以看到,在杂波75 m处,所提方法形成了至少 -50 dB以下的零陷,完全抑制了杂波。总之,所提方法通过设计发射波束,除了能够保证目标检测性能的同时,实现目标2维(距离-方位)区域上辐射能量控制外,也能够有效抑制杂波和干扰信号。

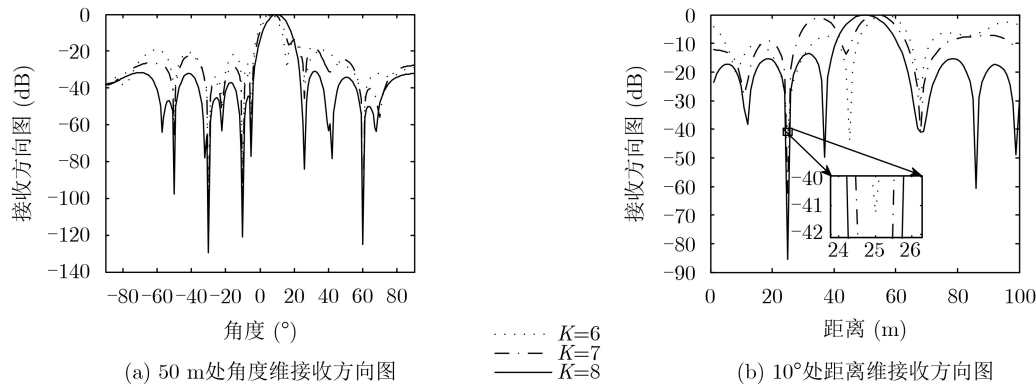


图5 接收方向图在目标处比较

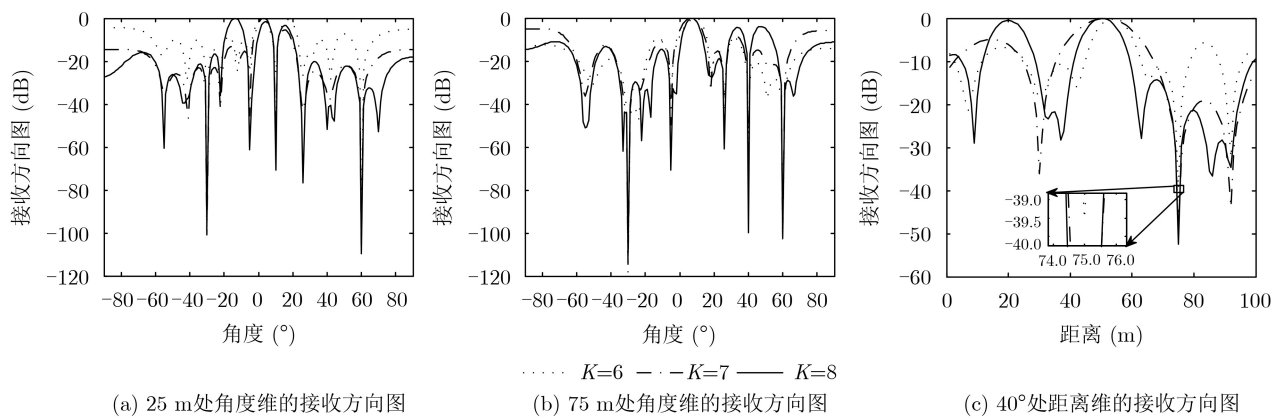


图6 接收方向图在杂波位置处比较

5 结论

针对相控阵雷达无法实现2维区域能量控制的问题,本文提出了基于ADMM的FDA-MIMO雷达低截获优化设计方法。本方法在保证目标参数估计性能的同时,通过联合设计发射波束和接收滤波器使FDA-MIMO雷达在目标区域上辐射的能量尽量小。针对该非凸优化问题,本文利用循环迭代方法将优化问题转化成两个子优化问题;接着基于ADMM消除等式约束,并通过最小化2阶2次近似优化获得发射波束的闭合解。理论和仿真显示,本文所提方法的发射方向图能在目标位置处形成110 dB左右的零陷;接收方向图能在目标处很好地能量聚焦,且在杂波和干扰位置处形成-50 dB以下的零陷。

参考文献

- [1] LAWRENCE D E. Low probability of intercept antenna array beamforming[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2010, 58(9): 2858–2865. doi: [10.1109/TAP.2010.2052573](https://doi.org/10.1109/TAP.2010.2052573).
- [2] FISHLER E, HAIMOVICH A, BLUM R S, et al. Spatial diversity in radars-models and detection performance[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(3): 823–838. doi: [10.1109/TSP.2005.862813](https://doi.org/10.1109/TSP.2005.862813).
- [3] LI Jian and STOICA P. MIMO radar with colocated antennas[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(5): 106–114. doi: [10.1109/MSP.2007.904812](https://doi.org/10.1109/MSP.2007.904812).
- [4] GONG Pengcheng, WANG Wenqin, and WAN Xianrong. Adaptive weight matrix design and parameter estimation via sparse modeling for MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2017, 139: 1–11. doi: [10.1016/j.sigpro.2017.03.028](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2017.03.028).
- [5] 廖雯雯, 程婷, 何子述. MIMO雷达射频隐身性能优化的目标跟踪算法[J]. *航空学报*, 2014, 35(4): 1134–1141. doi: [10.7527/S1000-6893.2013.0368](https://doi.org/10.7527/S1000-6893.2013.0368).
- [6] 杨少委, 程婷, 何子述. MIMO雷达搜索模式下的射频隐身算法[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(5): 1017–1022. doi: [10.3724/SP.J.1146.2013.00994](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2013.00994).
- [7] 赵宜楠, 亓玉佩, 赵占锋, 等. 分布式MIMO雷达的低截获特性分析[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2014, 46(1): 59–63. doi: [10.11918/j.issn.0367-6234.2014.01.011](https://doi.org/10.11918/j.issn.0367-6234.2014.01.011).

- ZHAO Yi'nan, QI Yupei, ZHAO Zhanfeng, *et al.* Analysis of LPI performance for distributed MIMO radar systems[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2014, 46(1): 59–63. doi: [10.11918/j.issn.0367-6234.2014.01.011](https://doi.org/10.11918/j.issn.0367-6234.2014.01.011).
- [8] SHI Chenguang, WANG Fei, SELLATHURAI M, *et al.* Low probability of intercept-based distributed MIMO radar waveform design against barrage jamming in signal-dependent clutter and coloured noise[J]. *IET Signal Processing*, 2019, 13(4): 415–423. doi: [10.1049/iet-spr.2018.5212](https://doi.org/10.1049/iet-spr.2018.5212).
- [9] ANTONIK P, WICKS M C, GRIFFITHS H D, *et al.* Frequency diverse array radars[C]. The 2006 IEEE Conference on Radar, Verona, USA, 2006: 215–217. doi: [10.1109/RADAR.2006.1631800](https://doi.org/10.1109/RADAR.2006.1631800).
- [10] WANG Wenqin. Frequency diverse array antenna: New opportunities[J]. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 2015, 57(2): 145–152. doi: [10.1109/MAP.2015.2414692](https://doi.org/10.1109/MAP.2015.2414692).
- [11] 巩朋成, 刘刚, 黄禾, 等. 频控阵MIMO雷达中基于稀疏迭代的多维信息联合估计方法[J]. 雷达学报, 2018, 7(2): 194–201. doi: [10.12000/JR16121](https://doi.org/10.12000/JR16121).
GONG Pengcheng, LIU Gang, HUANG He, *et al.* Multidimensional parameter estimation method based on sparse iteration in FDA-MIMO radar[J]. *Journal of Radars*, 2018, 7(2): 194–201. doi: [10.12000/JR16121](https://doi.org/10.12000/JR16121).
- [12] XU Jingwei, LIAO Guisheng, ZHANG Yuhong, *et al.* An adaptive range-angle-doppler processing approach for FDA-MIMO radar using three-dimensional localization[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2017, 11(2): 309–320. doi: [10.1109/JSTSP.2016.2615269](https://doi.org/10.1109/JSTSP.2016.2615269).
- [13] GONG Pengcheng, WANG Wenqin, LI Fengcong, *et al.* Sparsity-aware transmit beamspace design for FDA-MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2018, 144: 99–103. doi: [10.1016/j.sigpro.2017.10.008](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2017.10.008).
- [14] BOYD S, PARIKH N, CHU E, *et al.* Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 2011, 3(1): 1–122. doi: [10.1561/22000000016](https://doi.org/10.1561/22000000016).
- [15] SHEN Kaiming and YU Wei. Fractional programming for communication systems-part I: Power control and beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(10): 2616–2630. doi: [10.1109/TSP.2018.2812733](https://doi.org/10.1109/TSP.2018.2812733).
- [16] SOLTANALIAN M, HU Heng, and STOICA P. Single-stage transmit beamforming design for MIMO radar[J]. *Signal Processing*, 2014, 102: 132–138. doi: [10.1016/j.sigpro.2014.03.013](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2014.03.013).
- [17] HORN R A and JOHNSON C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990: 30–39.
- [18] CHENG Ziyang, HAN Chunlin, LIAO Bin, *et al.* Communication-aware waveform design for MIMO radar with good transmit beampattern[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(21): 5549–5562. doi: [10.1109/TSP.2018.2868042](https://doi.org/10.1109/TSP.2018.2868042).
- 巩朋成: 男, 1982年生, 副教授, 研究方向为频率分集阵列雷达、MIMO雷达信号处理.
- 王兆彬: 女, 1996年生, 硕士生, 研究方向为MIMO雷达信号处理.
- 谭海明: 男, 1990年生, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理和语音信号处理.
- 王文钦: 男, 1979年生, 教授, 研究方向为现代信号处理及其应用研究.

责任编辑: 余 蓉