

## 用快速哈达玛变换加速滤波反投影算法的滤波过程

乔志伟<sup>①②</sup> 韩 焱<sup>①②</sup> 魏学业<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(北京交通大学电子信息工程学院 北京 100044)

<sup>②</sup>(中北大学电子测试技术国防科技重点实验室 太原 030051)

**摘 要:** 为了加速滤波反投影算法的滤波过程, 提出了用快速哈达玛变换(FHT)实现线性卷积的快速算法。分析了哈达玛变换的特点和快速算法的时间复杂度, 设计了用 FHT 计算线性卷积的矩阵表达式, 并推导出了哈达玛域滤波器的增益矩阵的求解公式, 分析了该方法的加速原理及其适用条件。理论分析表明, 该方法比 FFT 线性卷积法快了一倍。仿真实验表明, 该方法在不影响图像重建精度的情况下, 相对于 FFT 线性卷积法, 将滤波过程的速度提高了近一倍。

**关键词:** 图像重建; 滤波反投影; 加速; 哈达玛变换; 卷积

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2010)09-2133-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2009.01635

## Accelerate the Filtering Process of Filtered Back Projection Algorithm Using Fast Hadamard Transform

Qiao Zhi-wei<sup>①②</sup> Han Yan<sup>①②</sup> Wei Xue-ye<sup>①</sup>

<sup>①</sup>(School of Electronics and Information Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

<sup>②</sup>(National Defense Key Lab of Science and Technology for Electronic Measurement Technology, North University of China, Taiyuan 030051, China)

**Abstract:** To speedup the filtering process of the Filtered Back Projection (FBP) algorithm, a fast linear convolution algorithm using Fast Hadamard Transform (FHT) is proposed. The characteristic of Hadamard transform and its time complexity is analyzed. The matrix expression of using FHT to calculate linear convolution is designed. The equation of the Hadamard filter gain matrix is deduced. The acceleration principle and applicable condition of the method are analyzed. Theoretical analysis demonstrates that the method is faster than the FFT-convolution method for one time. The simulation experiment demonstrates that the method can advanced the filtering speed for about one time compared to the FFT-convolution method in the condition of no impacting the reconstructed image's precision.

**Key words:** Image reconstruction; Filtered Back Projection (FBP); Acceleration; Hadamard Transform (HT); Convolution

### 1 引言

CT(Computed Tomography), 即计算机层析技术是当前最好的无损检测技术之一。工业 CT 算法主要分为解析法和迭代法两种, 而解析法占据比较优势的地位。在解析法图像重建中, 滤波反投影算法(FBP)是应用最为广泛的一种算法。它的主要优点是重建质量好、速度较快、空间分辨率高, 缺点是需要完备的投影数据<sup>[1]</sup>。当要重建的图像很大的时

候, FBP 算法的速度仍然是一个问题, 所以 FBP 算法的加速技术研究一直是该算法研究的热点之一。从算法的角度实现加速可以从两个方面实现, 一个方面是滤波过程的加速; 一个方面是反投影过程的加速。本文研究如何进一步加速滤波过程。滤波的过程是一个线性卷积的过程, 所以滤波过程的加速问题其实是线性卷积的快速实现问题<sup>[2]</sup>。

目前, 常用的长序列的线性卷积的加速主要有两种方法。一种方法是用 FFT(快速傅里叶变换)算法实现线性卷积; 另一种方法是用分段卷积而后重叠相加或重叠保留的方法实现线性卷积<sup>[3,4]</sup>。FFT 算法虽然速度较快, 但是需要将信号补零, 这就形成了一种冗余并影响了速度。如果信号的点数是一个

2009-12-23 收到, 2010-06-09 改回

国家自然科学基金(60602041, 60532080), 山西省自然科学基金(2007012003), 电子测试技术国防科技重点实验室基金项目(9140C1204040908)和山西省高校科技项目(20091020)资助课题

通信作者: 乔志伟 673861958@qq.com

大素数,则需要补零的点数将很多,其速度优势将不再明显。沃尔什变换(Walsh Transform,WT)是正交变换的一种,其变换矩阵的元素取+1或者-1。信号的沃尔什变换只涉及到实数的加法和减法<sup>[5,6]</sup>,而傅里叶变换涉及到了复数的乘法和加法,并包含三角函数的计算,显然沃尔什变换是比傅里叶变换更快的一种正交变换。沃尔什变换依据沃尔什函数的序数的排序不同,形成了4种形式的变换: Paley序、反 Paley序(Hadamard序)、Walsh序和反 Walsh序<sup>[5]</sup>。基于 Hadamard 序的沃尔什变换又名哈达玛变换(Hadamard Transform, HT)。因为 HT 对应的 Hadamard 矩阵可以因式分解,所以哈达玛变换存在快速算法,本文将快速哈达玛变换简称为 FHT。既然利用 FFT 可以加速线性卷积,用更快的 FHT 则可以进一步加速卷积过程。将 FHT 用于 FBP 算法,可以加速 FBP 算法的滤波过程,进而提高图像重建的速度。

在本文中,‘\*’表示卷积,上角标‘-1’表示傅里叶变换和哈达玛变换的反变换或者相应的变换矩阵的逆,‘diag’表示对角矩阵。

## 2 滤波反投影算法的滤波过程的计算特性

FBP 算法是在傅里叶中心切片定理的基础上推导出来的。该定理认为:物体  $f(x,y)$  在角度  $\theta$  得到的平行投影的傅里叶变换,等于  $f(x,y)$  的 2 维傅里叶变换的一个切片<sup>[7]</sup>。投影示意图如图 1 所示。

显然,如果我们能得到足够多的各个角度的投影,对每个角度下的投影执行傅里叶变换,就可以得到物体傅里叶变换的各个切片,只要切片多到可以填满整个傅里叶空间,就相当于得到了物体的傅里叶变换,然后对它执行傅里叶反变换就得到了物体。这种方法被称为直接傅里叶重建<sup>[7]</sup>。用直接傅里叶重建法重建图像时,要进行从极坐标系到直角坐标系的转换,对于投影的傅里叶变换的离散采样而

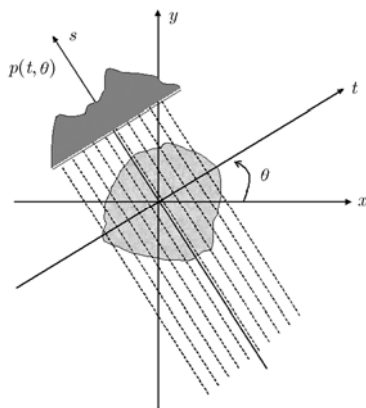


图1 平行束投影形成示意图

言,此变换必然需要插值,而二维频率域的插值会影响到整个图像,插值的误差传播到整个图像使图像精度大大下降,所以这种方法的使用受到了一定的限制。

在中心切片定理的基础上可以推导出滤波反投影算法的连续形式:

$$f(x,y) = \int_0^\pi g(t,\theta) d\theta, \quad t = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (1)$$

$$g(t,\theta) = p(t,\theta) * h(t) \quad (2)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| e^{j2\pi ft} df \quad (3)$$

$p(t,\theta)$  是某角度下投影,  $g(t,\theta)$  是被单位冲激响应为  $h(t)$  的滤波器滤波后的滤波投影。

物体  $f(x,y)$  在位置  $(x,y)$  的线性衰减系数就是在各个角度下通过该点的所有的滤波投影的累加(严格讲是对角度的定积分)。对投影进行滤波的滤波器是一个理想的斜变滤波器,由于它不满足绝对可积条件,所以物理不可实现。考虑到对投影采样的过程有低通滤波的作用,对该滤波器可以加窗,从而可以形成多种实用滤波器,使用最为广泛的是 RL 滤波器和 SL 滤波器。

FBP 算法的过程就是:首先在各个角度下测得相应的投影  $p(t,\theta)$ ;而后对每个投影用斜变滤波器滤波,形成滤波投影  $g(t,\theta)$ ;对于物体的每个点的线性衰减系数,用所有通过这个点的各个角度的滤波投影的值累加得到。显然,整个过程分为滤波和反投影两个步骤。本文要研究滤波过程的加速问题。

设探测器的宽度为  $d$ ,共有  $M$  个像元,这样在每个角度就可以得到一个长度为  $M$  的投影信号,可以看成是一个离散时间信号  $p(n)$ 。不失一般性同时为了论述方便,设  $M$  是一个奇数。

采用 S-L 滤波器做滤波器,则滤波器的单位脉冲响应为

$$h(n) = \frac{-2}{\pi^2 d^2 (4n^2 - 1)} \quad (4)$$

则滤波过程的离散实现公式为

$$g(n) = d \times p(n) * h(n) \quad (5)$$

设投影  $p(n)$  的取值范围为  $(-(M-1)/2, (M-1)/2)$ ,则滤波以后需要的是同范围的滤波投影  $g(n)$ ,而  $h(n)$  是一个无限长的单位脉冲响应,根据卷积的定义可知,斜变滤波器的长度应取为  $2M-1$ ,并且定义域关于 0 对称<sup>[8]</sup>。

如果直接利用线性卷积的公式计算,比较复杂,需要做  $M^2$  次实数乘法和  $M(M-1)$  次实数加法,当信号比较长的时候,花费的时间很多,必须根据滤波过程的特点设计新的加速算法。

### 3 快速哈达玛变换(FHT)及其时间复杂度分析

沃尔什变换是一种简单而又高速的正交变换, 本文将利用它的一种特殊形式哈达玛变换加速滤波的过程, 本节将分析 HT 的定义、特点和 FHT 的时间复杂度。

#### 3.1 定义

现有一个  $N$  点离散时间信号  $x(n)$ , 且  $N = 2^q$  ( $q$  为正整数), 则其哈达玛变换定义为

$$\mathbf{X}_H(\mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}(n)(-1)^{\sum_{i=0}^{q-1} b_i(n)b_i(k)}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6)$$

其反变换为

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_H(k)(-1)^{\sum_{i=0}^{q-1} b_i(n)b_i(k)}, n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7)$$

其中  $b_i(x)$  是非负整数的二进制形式的第  $i$  位, 如 5 的二进制形式是 101, 则  $b_0(5) = 1; b_1(5) = 0; b_2(5) = 1$ 。

可以将如上的定义写成矩阵的形式。设离散时间信号为一行向量  $\mathbf{x}(n) = [x(0), x(1), x(2), \dots, x(N-1)]$ ; 设该信号的哈达玛变换为  $\mathbf{X}_H(\mathbf{k}) = [X_H(0), X_H(1), X_H(2), \dots, X_H(N-1)]$ , 变换核矩阵(哈达玛矩阵)定义为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & \dots & h_{0,N-1} \\ h_{10} & h_{11} & \dots & h_{1,N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N-1,0} & h_{N-1,1} & \dots & h_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中  $h_{nk} = (-1)^{\sum_{i=0}^{q-1} b_i(n)b_i(k)}$ ,  $N = 2^q$ ,  $b_i(x)$  表示非负整数  $x$  的二进制形式的第  $i$  位, 则可以得到哈达玛变换及其反变换的矩阵形式为

$$\mathbf{X}_H(\mathbf{k}) = \mathbf{x}(n)\mathbf{H}, \quad \mathbf{x}(n) = \frac{1}{N} \mathbf{X}_H(\mathbf{k})\mathbf{H} \quad (9)$$

#### 3.2 哈达玛变换的特点

(1)实数变换 通常用到的信号一般都是实信号, 其哈达玛变换仍然是实数的序列, 这就避免了 FFT 所必需的复数运算。

(2)变换只涉及到加减法 从 Hadamard 矩阵的结构可以看出来, 该变换只涉及加法和减法, 这就避免了 FFT 所必需的乘法。

(3)反变换简单 该变换的正反变换只相差一个系数  $1/N$ , 这使得反变换可以借助正变换来计算。

(4)存在快速算法 因为 Hadamard 矩阵可以因式分解, 所以该变换存在蝶形快速方法。

### 3.3 FHT 变换的时间复杂度分析

分析 HT 的矩阵形式可以看到, 计算 HT 的一个点需要做  $(N-1)$  次加减法, 完成  $N$  点的 HT 共需要做  $N(N-1) \approx N^2$  次加法, 当离散时间信号的长度增加时, 其加法次数将以二次函数的方式增长, 必须寻找快速算法。

利用哈达玛矩阵可以因式分解的特点, 可以得到跟库利-图基 FFT 算法相似的蝶形快速运算结构, 显然, FHT 需要  $N \log_2 N$  次加减法运算, 这就使得其效率大大提高。如 32 点的信号做 HT, 用普通的方法需要做 992 次加减法; 而用 FHT 算法, 只需要做 160 次加减法。

### 4 用哈达玛变换实现线性卷积的矩阵表达及哈达玛域滤波器增益矩阵的求解

设有一个信号  $x(n)$ , 长度为  $N_1$  点, 经过一个滤波器(系统), 其单位脉冲响应为  $h(n)$ , 长度为  $N_2$  点, 两个信号的起点都是 0; 则该信号的响应  $y(n) = x(n) * h(n), n = 0, 1, 2, \dots, N_1 + N_2 - 2$ , 如果直接计算, 运算量太大, 考虑到用 DFT 可以间接实现线性卷积, 而 DFT 存在快速算法 FFT, 可以用 FFT 快速实现线性卷积。可以用图 2 表示。

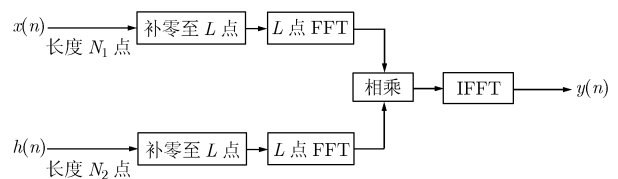


图 2 FFT 实现线性卷积示意图

在图 2 中,  $L \geq N_1 + N_2 - 1$ , 且  $L = 2^m$ ,  $m$  是自然数, 这种计算线性卷积的方法就是所谓的 FFT 卷积法, 现在的问题是在哈达玛域是否存在与傅里叶域类似的规律。

现有理论表明: 时域的卷积跟哈达玛域(也就是沃尔什域)的相乘没有对应关系, 这就必须采用一种间接的方法来寻找这种关系。鉴于傅里叶变换和哈达玛变换都可以写成矩阵的形式<sup>[9]</sup>, 而利用矩阵方程可以求解未知的矩阵, 下面从矩阵表达的角度讨论如何用哈达玛变换实现线性卷积。

设  $x(n)$  和  $h(n)$  都已经补零至  $L$  点, 图 2 的矩阵实现如图 3 所示。在图 3 中,  $\mathbf{X}$  是  $x(n)$  的行向量形式,  $\mathbf{Y}$  是  $y(n)$  的行向量形式,  $\mathbf{F}$  代表傅里叶变换核矩阵,  $\mathbf{F}^{-1}$  代表傅里叶反变换核矩阵, 而

$$\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}_f \longrightarrow \mathbf{F}^{-1} \longrightarrow \mathbf{Y}$$

图 3 DFT 实现线性卷积的矩阵形式

$$\mathbf{G}_f = \text{diag}(H_f(0), H_f(1), H_f(2), \dots, H_f(L-1)) \quad (10)$$

是滤波器  $h(n)$  的 DFT  $H_f(k)$  构成的一个对角矩阵。显然可以得到

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{F}\mathbf{G}_f\mathbf{F}^{-1} \quad (11)$$

类比地，我们构造一个哈达玛域的用 HT 实现线性卷积的方框图<sup>[10]</sup>，见图 4。在图 4 中， $\mathbf{X}$  是  $x(n)$  的行向量形式， $\mathbf{Y}$  是  $y(n)$  的行向量形式， $\mathbf{H}$  代表哈达玛变换核矩阵(Hadamard 矩阵)， $\mathbf{H}^{-1}$  代表哈达玛反变换核矩阵，而  $\mathbf{G}_w$  是哈达玛域的滤波器的增益矩阵，这是未知的。

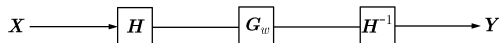


图 4 HT 实现线性卷积的矩阵形式

由图 4 可知，

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{H}\mathbf{G}_w\mathbf{H}^{-1} \quad (12)$$

由式(11)和式(12)可知， $\mathbf{F}\mathbf{G}_f\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{H}\mathbf{G}_w\mathbf{H}^{-1}$ ，从而

$$\mathbf{G}_w = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{G}_f\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H} \quad (13)$$

又根据哈达玛矩阵的特点  $\mathbf{H}^{-1} = (1/N)\mathbf{H}$ ，所以，式(13)可以写成

$$\mathbf{G}_w = (1/N)\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{G}_f\mathbf{F}^{-1}\mathbf{H} \quad (14)$$

显然，可以通过求解傅里叶域的滤波器增益矩阵，求得哈达玛域的增益矩阵，从而实现在哈达玛域的线性卷积，即哈达玛域的滤波。因为哈达玛变换有快速算法，所以在哈达玛域完成滤波可以提高线性卷积的速度。其滤波框图如图 5 所示。

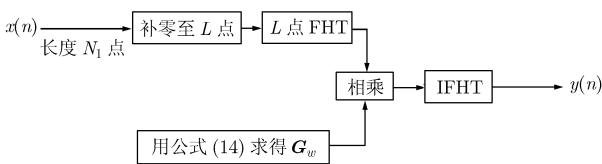


图 5 FHT 实现线性卷积的示意图

### 5 用 FHT 实现线性卷积的加速原理及适用性分析

为了可以定量分析用 FHT 实现线性卷积的时间复杂度，特在第 4 节的基础上做出如下假设：

- (1)  $L = N_1 + N_2 - 1 = 2^m$ 。
- (2) 一次乘法相当于 4 次加法。
- (3) 一次减法等价于一次加法。
- (4) 将  $N_1$  和  $N_2$  都近似为  $L/2$ 。

#### 5.1 直接利用线性卷积公式计算的计算量

线性卷积的公式为  $y(n) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x(m)h(n-m)$ ，

共有  $N_1N_2 = L^2/4$  次乘法和  $(L^2 + 2L)/8$  次加法，这样就总共折合  $(9L^2 + 2L)/8$  次加法。(如上是根据卷积的竖式乘法运算法归纳出来的，限于篇幅，不赘述)。显然其时间复杂度为  $O(L^2)$ 。

#### 5.2 FFT 实现线性卷积的计算量

(1) 计算  $x(n)$  的 FFT 需要复数乘法  $(L/2)\log_2 L$  次，复数加法  $L\log_2 L$  次，折合  $11L\log_2 L$  次实数加法。

(2) 计算  $h(n)$  的 FFT，折合  $11L\log_2 L$  次实数加法。

(3) 计算  $Y(k) = X(k)H(k)$ ， $L$  次复数乘法，折合  $18L$  次实数加法。

(4) 计算 IFFT，得到  $y(n)$ ，折合  $11L\log_2 L$  次加法。

总的加法计算量为  $33L\log_2 L + 18L$ 。其复杂度为  $O(L\log_2 L)$ 。

#### 5.3 FHT 实现线性卷积的计算量

(1) 计算  $L$  点的  $x(n)$  的 FHT，需要  $L\log_2 L$  次加法。

(2) 用公式(14)计算  $\mathbf{G}_w$ ，共  $20L^3$  次加法。

(3) 计算  $X_h(k) \times \mathbf{G}_w$ ，共  $5L^2$  次加法。

(4) 计算 IFHT，需要  $L\log_2 L$  次加法。

总的运算量为  $20L^3 + 5L^2 + 2L\log_2 L$  次加法。显然其复杂度为  $O(L^3)$ ，用这种方法不但比 FFT 运算量大，甚至比直接计算还要耗费时间。可以看出，第(2)步和第(3)步非常浪费时间，如果能解决这两个问题，就可以实现加速。

假设要求很多输入信号通过特定的数字滤波器后的各自的响应。因为滤波器都是一样的，所以可以将  $\mathbf{G}_w$  事先计算出来，而后滤波时就无需每次都计算了，以此避免此复杂运算。

文献已经证明，哈达玛域滤波器增益矩阵  $\mathbf{G}_w$  是一个分块对角矩阵，并且是一个稀疏矩阵<sup>[9]</sup>，这样计算  $X_h(k) \cdot \mathbf{G}_w$  的时候，就没有必要按照向量乘矩阵的复杂度去计算了。通过统计分析，其计算量大约为  $3L\log_2 L$  次乘法和  $3L\log_2 L$  次加法。折合  $15L\log_2 L$  次加法。

解决了如上两个问题之后，FHT 的总运算量为  $17L\log_2 L$ 。显然复杂度降低为  $O(L\log_2 L)$ ，而且与 FFT 实现线性卷积相比，运算量降低了大约一半。

需要特别注意的是，FHT 实现快速线性卷积的使用是有条件的：(1)有很多信号要被同一个滤波器滤波，从而可以事先计算增益滤波器。(2)利用  $\mathbf{G}_w$  的分块对角结构和稀疏特性，优化  $X_h(k) \times \mathbf{G}_w$  的计算。而我们要进行的 FBP 算法的滤波过程恰好符合条件(1)，所以可以将这种方法应用到图像重建中。

### 6 数值实验及结果讨论

采用滤波反投影算法对 1 个由 4 个细圆柱插到 1 个粗圆柱的模型的某断层进行重建。探测器像元共 101 个, 宽度为 0.1 cm; 采集 180° 的投影, 角度间隔为 1°; 对投影滤波采用 SL 滤波器; 反投影时用线性插值方法插值; 重建出的图像是以旋转中心为图像中心的 101×101 的图像, 图像的像素对应于实际物体的大小是 0.1 cm×0.1 cm。表 1 为模型的参数说明。图 6 为模型的某断层零角度采样示意图。

表 1 模型的参数说明

圆柱名称	半径(cm)	线性衰减系数 (cm <sup>-1</sup> )	圆心坐标位置
大圆柱	4	0.8	(0, 0)
小圆柱 1	1	0.4	(-2, 2)
小圆柱 2	1	0.6	(2, 2)
小圆柱 3	0.5	0.1	(0, -2)
小圆柱 4	0.8	0.2	(0, 0)

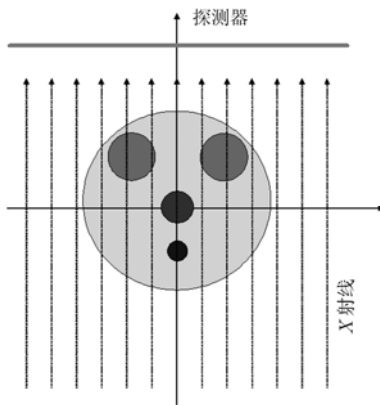


图 6 模型的某断层零角度采样示意图

PC 机的 CPU 的晶振频率为 1.7 GHz, 开发工具使用 MATLAB6.5, 程序运行时, 关闭了除杀毒软件和必要的监控软件以外的所有其他程序。

表 2 给出了直接卷积、使用 FFT 卷积和使用 FHT 卷积 3 种方法的滤波时间对比。表 3 给出了 3 种不同滤波方法对应的重建图像的精度比较, 其中 dd 和 rr 分别是归一化均方距离误差判据和归一化平均绝对距离判据<sup>[7]</sup>。图 7 给出了模型原图和 3 种方法重建出来的图像。

表 2 3 种方法的速度比较

卷积方法	用公式法直接卷积	用 FFT 实现线性卷积	用 FHT 实现线性卷积
时间(s)	12.875	0.063	0.0296

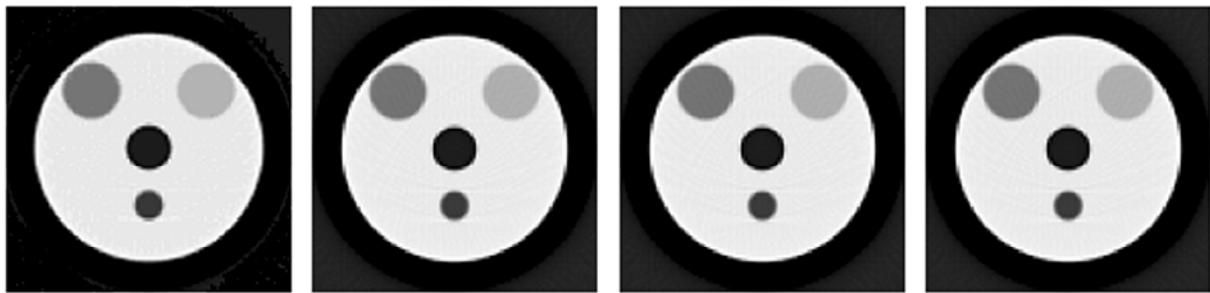
表 3 3 种方法重建出的图像的误差判据的比较

误差判据	用公式法直接卷积	用 FFT 实现线性卷积	用 FHT 实现线性卷积
dd	0.033624	0.033624	0.033624
rr	0.100646	0.100646	0.100646

设重建图像的大小  $N \times N$ ,  $t_{uv}$  表示模型图像的第  $u$  行和第  $v$  列的线性衰减系数,  $r_{uv}$  表示重建图像的第  $u$  行和第  $v$  列的线性衰减系数,  $\bar{t}$  表示模型的平均衰减系数, 则 dd 和 rr 定义如式(15)。

$$dd = \left[ \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{uv} - r_{uv})^2}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{uv} - \bar{t})^2} \right]^{1/2}, \quad rr = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{uv} - r_{uv}|}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{uv}|} \quad (15)$$

从表 2 可以看出, 用线性卷积的公式直接计算花费的时间非常长, 用了将近 13 s 的时间。在重建过程中, 投影信号共有 180 个, 每个投影信号共 101 个点, 滤波器长度为 201 个点, 共进行了  $180 \times 101 \times 101 = 1836180$  次乘法, 所以耗费的时间很长。用 FFT 算法, 大大减少了运算量, 花费的时间仅仅为 0.063 s; 而本文的方法, 因为采用了快速哈达玛变换, 进一步加速, 耗时仅仅为 0.0296 s, 比用 FFT 滤波快了大约一倍的时间。这个结果跟理论分析基



(a) 模型原图 (b) 直接卷积法滤波的 CT 图像 (c) 用 FFT 卷积法滤波的 CT 图像 (d) 用 FHT 卷积法滤波的 CT 图像

图 7 3 种滤波方法重建出来的 CT 图像对比

本是一致的。

从表 3 中的误差判据看出, 采用 3 种方法重建出来的图像的精度在误差保留小数点后 6 位的情况下是一样的。可以认为采用 FHT 来实现哈达玛域的滤波不会影响重建图像的精度。

从图 7 可以看出, 3 种方法重建出来的图像基本是一样的, 用肉眼分辨不出来, 这也直观地说明了 3 种方法只是影响滤波过程的速度, 而不会对重建图像的精度产生影响。

## 7 结束语

本文提出了一种用快速哈达玛变换对滤波反投影算法的滤波过程加速的方法。通过引入 FHT, 使得滤波过程较通常采用的 FFT 滤波法速度提高了约 1 倍。需要注意的是, 本方法要求事先计算出滤波器增益矩阵, 并且要利用该增益矩阵的分块对角结构减少向量与该矩阵相乘时的运算量。本方法适用于所有的解析法图像重建的滤波过程。虽然本文是以 FBP 算法的加速问题为研究对象, 但是这种方法同样可以用到反投影滤波(BPF)算法、直接傅里叶域重建算法以及 3 维重建的 FDK 算法中。下一步要研究的工作是哈达玛变换直接实现线性卷积的方法。

## 参 考 文 献

- [1] 乔志伟, 魏学业, 韩焱. 解析法图像重建中的插值技术研究[J]. 计算机工程与设计, 2009, 30(9): 2213-2216.  
Qiao Zhi-wei, Wei Xue-ye and Han Yan. Study on interpolation technology in image reconstruction based on analytic method[J]. *Computer Engineering and Design*, 2009, 30(9): 2213-2216.
- [2] 种稚萌, 朱世华, 吕刚明. 多径信道下的异步分布式线性卷积空时编码[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(6): 1415-1419.  
Zhong Zhi-meng, Zhu Shi-hua, and Lü Gang-ming. Asynchronous distributed linear convolutional space-time code under multipath channels[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2009, 31(6): 1415-1419.
- [3] 虞湘宾, 毕光国. 长序列信号快速相关及卷积的算法研究[J]. 电路与系统学报, 2001, 6(4): 78-82.  
Yu Xiang-bin and Bi Guang-guo. Algorithms of long sequence fast correlation and convolution[J]. *Journal of Circuits and Systems*, 2001, 6(4): 78-82.
- [4] 吕新华, 武斌. 基于圆周卷积的长序列小波变换快速实现[J]. 信号处理, 2006, 26(2): 903-905.  
Lü Xin-hua and Wu Bin. Fast implementation of long sequence wavelet transform based on cyclic convolution[J]. *Signal Processing*, 2006, 26(2): 903-905.
- [5] 黄晓萍, 桑恩方, 乔钢. H 序沃尔什变换及其在水声扩频通信中的应用[J]. 声学技术, 2007, 26(3): 477-482.  
Huang Xiao-ping, Sang En-fang, and Qiao Gang. Fast H-order Walsh transform and its applications in underwater acoustic spread-spectrum communication[J]. *Technical Acoustics*, 2007, 26(3): 477-482.
- [6] 李何明, 张大兴. 一种基于 Hadamard 变换的快速盲水印算法[J]. 杭州电子科技大学学报, 2009, 29(1): 67-70.  
Li He-ming and Zhang Da-xing. A blind fast image watermarking method based on Hadamard transform[J]. *Journal of Hangzhou Dianzi University*, 2009, 29(1): 67-70.
- [7] 张朝宗, 郭志平, 张朋. 工业 CT 技术和原理[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 第 8 章.  
Zhang Chao-zong, Guo Zhi-ping, and Zhang Peng. *Industrial CT Technology and Principle*[M]. Beijing: Science Press, 2009, Chapter 8.
- [8] 王召巴. 基于面阵 CCD 相机的高能 X 射线工业 CT 技术研究[D]. [博士学位论文], 南京理工大学, 2002.  
Wang Zhao-ba. Study on high energy X-ray industrial CT technology based on area-CCD[D]. [Ph.D. dissertation], Nanjing University of Technology, 2002.
- [9] Zarowski C and Yunik M. Spectral filtering using the fast walsh transform[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1985, 33(4): 1246-1252.
- [10] Thomas G and Govindan V K. Computationally efficient filtered-backprojection algorithm for tomographic image reconstruction using walsh transform[J]. *Journal of Visual Communication & Image Representation*, 2006, 17(3): 581-588.

乔志伟: 男, 1977 年生, 博士生, 副教授, 研究方向为信息的获取、重建、处理和识别技术。

韩焱: 男, 1957 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为信息的获取、重建、处理和识别技术。

魏学业: 男, 1963 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为数字信号处理和智能测控技术。