

基于 Hermite 外推的多柱体时频域电磁散射计算¹

童创明 * ** 洪 伟 * 许 锋 *

*(东南大学毫米波国家重点实验室 南京 210096)

** (空军工程大学导弹学院 西安 710018)

摘 要 首先根据散射体在高斯脉冲平面波激励下感应电流的能量几乎全部集中在时间轴和频率轴上的有限范围内, 该文将时域响应展开为系数待定的连带 Hermite 级数的叠加, 并根据连带 Hermite 函数的傅里叶变换的自反性, 得到与时域响应形式类似的频域响应; 然后利用时域方法和频域方法分别计算散射体上感应电流的早时响应和低频信息; 最后经过时域和频域联合外推计算, 由早时响应和低频信息确定时域和频域响应的待定系数, 从而获得了整个时域和频域的完全响应. 该文用这种外推方法分析计算了多导体柱的电磁散射.

关键词 时域响应, 频域响应, 电磁散射, 外推法, Hermite 多项式

中图分类号 O441, TN011

1 引 言

在电磁散射问题的数值计算中, 一般总是在频域或时域独立地进行分析, 如果要得到对应域内的解, 往往需要借助傅里叶变换及其逆变换. 如果要分析电大尺寸的散射体的电磁响应, 往往要受到计算机的内存和运算速度等物理因素的限制.

在频域计算过程中, 如矩量法 (MOM)、有限元法 (FEM)、边界元法 (BEM) 等, 对于宽频带分析来说, 需要在照射电磁波频带内逐个频点重复求解矩阵方程, 从而花费了大量的计算时间, 特别是当频域响应变化迅速时, 则要求所取计算频点更密, 从而使计算时间成倍增长; 随着频率的升高, 矩阵的规模随之增大, 计算机内存和计算时间迅速增加^[1]. 尽管基于渐近波形估计 (AWE) 技术的外推计算, 就能获得给定频率点附近有限大范围内的频率信息, 并大大提高计算效率^[2,3], 若要获得更大频率范围内的频率响应, 则必须进行多频点展开计算, 但还是要受到带宽的限制且精度也不易得到保证.

在时域计算过程中, 如时域有限差分法 (FDTD)、时域有限元法 (FEMTD)、时间步进法 (Marching-On-in-Time method, MOT) 等, 矩阵方程的求解可以不求逆, 而按时间步进的方式逐步迭代求解, 但由于计算误差的累积, 可能会使晚时响应出现高频震荡似的不稳定性^[4]. 尽管基于 Prony 方法^[5] 和矩阵束方法 (Matrix pencil method)^[6] 由初始响应可以完成外推计算, 首先在实际中要区分早时响应和晚时响应是很困难的; 其次对于多柱体散射问题, 如电磁波假设从并排放置的两个柱体的连线方向照射, 要想进行准确的外推计算, 那么所需计算的初始响应信息中既要包含来自前一个散射体的响应还必须要包含后一个散射体的响应, 由于两个散射体具有一定的空间距离, 这样所需的计算时间步是很大的, 特别随着柱体间的间距的增大, 计算时间大大增加.

本文介绍的时域和频域联合外推求解柱体散射的方法, 能有效克服时域法和频域法单独求解或外推的缺点^[7,8]. 这种方法的目的不是考虑能够外推的数据范围有多大, 而是在于如何利用容易计算获得的频域低频响应信息和时域早时响应信息来联合外推同时得到整个时、频域响应. 该方法的基本思想是: 由傅里叶变换的特性知, 频域响应中的低频成分和高频成分主要决定其对应的时域响应中的晚时响应和早时响应^[5], 这样早时响应和低频响应就构成了信息互补, 即可由低频响应提供外推晚时响应所需的信息, 而由早时响应提供外推高频响应所需的信

¹ 2001-01-15 收到, 2001-05-29 定稿
国家杰出青年基金的资助项目 (69625102)

息, 这样在时域和频域响应的外推过程中并不需要其它任何附加信息, 因为所需要的外推的部分响应已经存在于对应域的已知信息中, 现在的问题就归结到采取一定的数学手段从低频响应和早时响应中分别相应地提取出晚时响应和高频响应。因此, 时域和频域联立求解并外推的步骤是: 首先利用频域法, 如 MOM, 结合 AWE 技术求得频域的低频响应, 并利用时域法, 如 MOT, 获得时域的早时响应, 然后根据早时响应和低频响应的信息来联合外推求得频域的高频响应和时域的晚时响应, 从而同时获得完整的时域响应和频域响应。由于基于 AWE 技术的 MOM 法求解低频响应以及 MOT 法求解早时响应都是十分有效的, 并不需要太多的计算量, 因而整个外推分析过程是非常方便的。

在有限带宽的脉冲信号激励下, 散射体上感应电流的能量几乎全部集中在时间轴或频率轴上的有限范围内, 因而最佳选择是用能量相对集中的基函数来同时表示时域响应和频域信息, 例如可选用连带 Hermite 函数作为电磁响应的展开基函数, 因为该函数及其傅里叶变换所具有的自反性能非常方便地同时用于响应的时域和频域分析^[9]。

2 数学公式

2.1 基函数及函数展开

Hermite 多项式 $H_n(t)$ 定义如下^[9]:

$$\left. \begin{aligned} H_0(t) &= 1 \\ H_1(t) &= 2t \\ H_n(t) &= 2tH_{n-1}(t) - 2(n-1)H_{n-2}(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中下标 $n \geq 2$ 。连带 Hermite 函数 $h_n(t, l)$ 表示如下:

$$h_n(t, l) = h_n\left(\frac{t}{l}\right) / \sqrt{l} \quad (2a)$$

$$h_n(t) = \frac{H_n(t)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-t^2/2} \quad (2b)$$

式中下标 $n \geq 0$ 。 l 称为尺度因子。几个低次 Hermite 函数 $h_n(t)$ 的波形如图 1 所示。

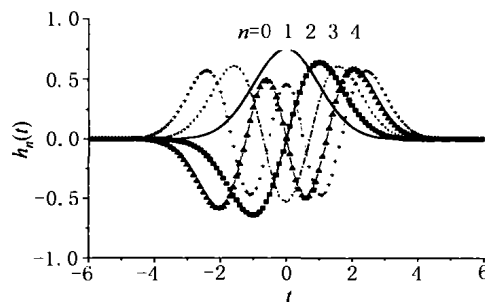


图 1 连带 Hermite 函数 $h_n(t)$ 的波形 (0-4 阶)

由图 1 知, 当选择连带 Hermite 函数 $h_n(t, l)$ 作为展开函数的基函数时, 应选取合适的尺度因子 l 使展开函数的定义域限定在 $(-6, 6)$ 的范围内。由于连带 Hermite 函数 $h_n(t, l)$ 对于 $t = 0$ 两边的图形具有对称性, 因而要展开具有因果关系的信号 $i(t)$ (即当 $t < 0$ 时 $i(t) = 0$), 应选取

一个合适的时延 t_0 ，使展开信号与基函数的定义域匹配，或使基函数中心与信号中心一致，这样才能使基函数的项数为最少。

$$i(t) = \sum_{n=0}^N a_n h_n(t - t_0, l_t) \quad (3)$$

式中 N 为展开基的项数， l_t 为时域尺度因子， a_n 为待定系数。对上式作傅里叶变换且利用 Hermite 函数的自反性^[6]，可确定响应的谱为

$$I(f) = \sum_{n=0}^N a_n k_n(f, t_0) h_n(f, l_f) \quad (4)$$

式中 $l_f = 1/(2\pi l_t)$ 为频域尺度因子。其中

$$k_n(f, t_0) = (-j)^n e^{-j2\pi f t_0} \quad (5)$$

2.2 矩阵方程

在电磁散射问题分析中，(3) 式和 (4) 式表示的傅里叶变换对构成了散射体上感应电流的时域响应和频域响应，其中待定系数 a_n 由早时响应和低频响应确定。将电流响应的能量相对集中的时间区和频率区分别离散为： $t_m = m\Delta t (m = 1, 2, \dots, M_t)$ ， $f_m = m\Delta f (m = 1, 2, \dots, M_f)$ ，其中 Δt 和 Δf 分别为时间间隔和频率间隔。取早时响应区 $m \leq N_t$ 和低频响应区 $m \leq N_f$ ，这样 (3) 式和 (4) 式可离散为

$$i(t_m) = \sum_{n=0}^N a_n h_n(t_m - t_0, l_t), \quad (m = 1, 2, \dots, N_t) \quad (6a)$$

$$I(f_m) = \sum_{n=0}^N a_n k_n(f_m, t_0) h_n(f_m, l_f), \quad (m = 1, 2, \dots, N_f) \quad (6b)$$

联立 (6a) 式和 (6b) 式得矩阵方程：

$$[h_{mn}][a_n] = [v_m] \quad (7)$$

式中 $[a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$ (T 表示转置) 为待求系数向量，矩阵 $[h_{mn}]$ 、向量 $[v_m]$ 的元素为

$$h_{mn} = \begin{cases} h_n(t_m - t_0, l_t), & (1 \leq m \leq N_t) \\ k_n(f_{m-N_t}, t_0) h_n(f_{m-N_t}, l_f), & (N_t + 1 \leq m \leq N_t + N_f) \end{cases} \quad (8a)$$

$$v_m = \begin{cases} i(t_m), & (1 \leq m \leq N_t) \\ I(f_{m-N_t}), & (N_t + 1 \leq m \leq N_t + N_f) \end{cases} \quad (8b)$$

式中早时响应采样 $i(t_m)$ ， $1 \leq m \leq N_t$ 和低频响应采样 $I(f_m)$ ， $1 \leq m \leq N_f$ 要采用时域法和频域法预先得到。由于矩阵 $[h_{mn}]$ 的条件数较差，矩阵方程 (7) 式的求解需采用奇异值分解 (SVD)。

归纳本文方法如下：

步骤 1 分别用时域方法和频域方法求得早时响应和低频响应，一般地，所应计算的早时响应和低频响应信息要占整个时域响应和频域响应的 50%–60% 左右。假设考虑间距为 d 的两

个物体的散射问题, 照射波首先到达位置近的散射体, 然后经过 $t = d/c$ (c 为光速) 的时间再到达位置远的散射体, 考虑到散射体之间的反射, 散射体上某点的感应电流应为直射波和反射波的叠加, 这样相邻脉冲间的间隔由散射体之间的间距确定, 即 $\Delta t = 2d/c$, 由此可近似判断响应脉冲的有效持续时间以及响应的频谱宽度;

步骤 2 将时、频响应按连带 Hermite 函数展开, 并依据一定的原则选定、频尺度因子。值得指出的是, 尺度因子的选择是至关重要的, 它们决定了时、频域响应的能量分别在时间轴和频率轴上的分布范围, 它们的选取一般应使其时、频域响应的能量在按时域尺度因子归一的时间轴上和按频域尺度因子归一的频率轴上的分布范围近似相等;

步骤 3 在早时响应和低频响应区内离散上述时、频响应的连带 Hermite 函数展开式, 得到关于展开系数的矩阵方程。该矩阵方程的规模取决于 Hermite 展开项数的多少, 展开项数主要影响外推区电磁响应的性态, 选择过大会使外推区内响应产生振荡, 选择过少会使外推区响应幅度太小, 因此开始计算时项数应取得较大些, 然后根据一定的门限值, 即当时、频域展开的系数相对最大系数小于该门限时进行截断;

步骤 4 一般地, 展开系数的矩阵方程的性态较差, 矩阵的条件数会非常大, 一般的矩阵求解方法往往稳定性很差, 需要采用奇异值分解 (SVD) 技术加以克服。若解收敛, 则说明所选早时响应和低频响应的信息足够以及展开项数合适, 否则需要选择更多的早时响应和低频响应的信息, 或重新选定项数, 再由矩阵方程重新计算展开系数;

步骤 5 根据 Hermite 展开系数和渐近表达式求出时域和频域的完全电磁响应。

3 数值结果

本文以多导体柱的电磁散射为例来验证上述时频域联合外推法。高斯型 TE 照射波磁场为

$$H^i(\rho, t) = a_z \frac{H_0}{\sqrt{\pi x \sigma}} e^{-\gamma^2} \quad (9a)$$

$$\gamma = \frac{ct - ct_0 + \hat{a}_k \cdot r \rho}{c\sigma} \quad (9b)$$

式中 $H_0 = 1$, $\sigma = 1\text{LM}$ (LM, 即电磁波在自由空间中传播一米所需的时间), $t_0 = 6\text{LM}$, c 是电磁波传播速度, $\hat{a}_k = -\hat{x}$ 为入射波方向。激励信号的频谱为

$$H^i(f) = \frac{H_0}{c} e^{-(\pi f \sigma)^2 - j(\omega t_0 - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho})} \quad (10)$$

考虑二维的理想金属导体柱组成的多柱体: “直导带 + 直导带”、“半圆弧导带 + 直导带”。设导带均无厚度。将导带截面置于 xoy 平面且对称于 x 轴放置, 一根直导带的中心置于坐标原点 o , 另一根直导带或半圆弧导带的圆心置于 $x = -d$ 处, 纵轴为 y 。如图 2 所示。

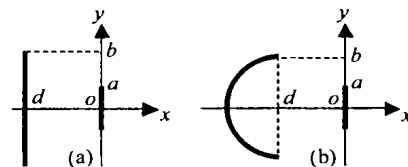


图 2 多导体柱结构及其坐标
(a) “直导带 + 直导带” (b) “半圆弧导带 + 直导带”

在计算过程中，时、频域方法对导体截面进行相同格式的剖分离散。计算的电磁响应是短直导带中点的时频域感应电流。如图 3- 图 6 所示，图中时间单位为 LM 光束，长度为 m，感应电流为 A/m，感应电流的频谱为 ns·A/m，频率为 GHz。本文中，时域响应由 MOT 法获得，低频响应由 MOM+AWE 获得。Hermite 外推区在图中“竖虚线”右段，左段为初始响应或低频响应区，“★”表示修正 Hermite 函数展开 (3) 式中的时延 t_0 。

在所有计算实例中，频域步长 $\Delta f=1\text{MHz}$ ，时域步长 $\Delta t=0.29296875\text{LM}$ 。计算的电磁响应的时域范围是 0-150LM(图中仅表示了 0-30LM，其余部分几乎为零)、频域范围是 0-0.512GHz(图中仅表示了 0-0.4GHz，其余部分几乎为零)。低频响应范围为 0-0.15GHz、早时响应范围 0-5.859375LM。电磁响应的时域-带宽积(定义为时域范围与频域范围的乘积)均由 2.34375(早时区与低频区的乘积)外推到 256(整个响应时域区与频域区的乘积)。计算结果表明：当散射体之间的间距 d 较小时，如例 1、例 2，相邻脉冲出现混叠为一个脉冲，这样就不能将两根导带从时域波形上区分开来；当散射体之间的间距 d 较大时，如例 3、例 4，相邻脉冲间隔较大，这样很容易能将两根导带从时域波形上区分开来。

例 1 “直导带 + 直导带”导体柱： $a=0.25\text{m}$ ， $b=2a$ ， $d=2a$ ，短带被均匀地离散为 10 段，长带被均匀地离散为 20 段。Hermite 展开参数为： $N=18$ ， $t_0=20\text{ns}$ ， $l_t=1\text{LM}$ 。

例 2 “半圆弧导带 + 直导带”导体柱： $a=0.25\text{m}$ ， $b=2a$ ， $d=2a$ ，短带被均匀地离散为 10 段，长带被均匀地离散为 20 段。Hermite 展开参数为： $N=20$ ， $t_0=20\text{ns}$ ， $l_t=1\text{LM}$ 。

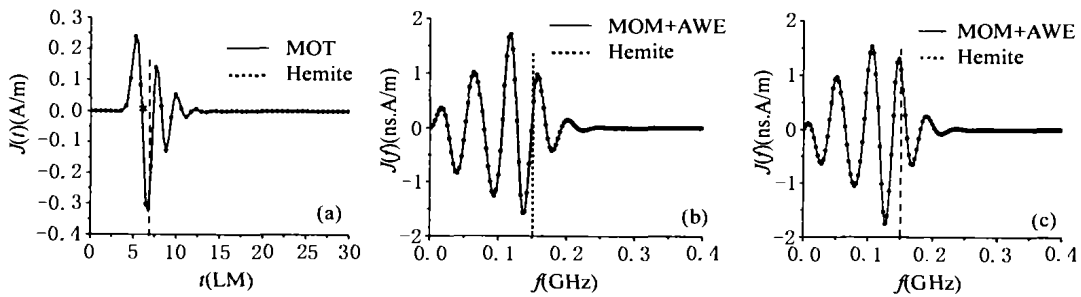


图 3 “直导带 + 直导带”导体柱感应电流的时、频响应 ($d=2a$)
(a) 时域响应 (b) 频域响应 (实部) (c) 频域响应 (虚部)

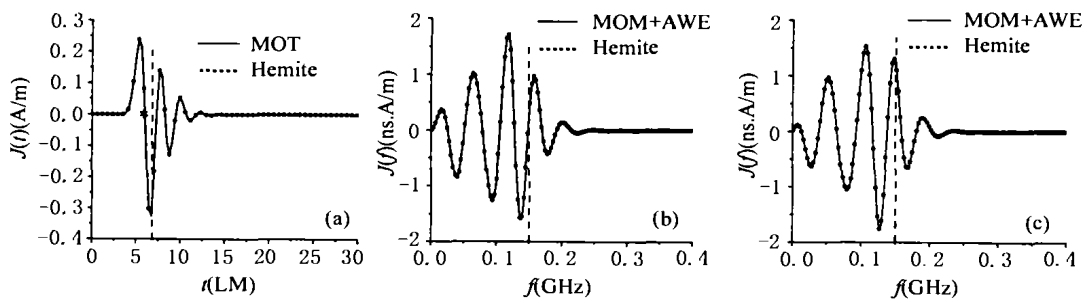
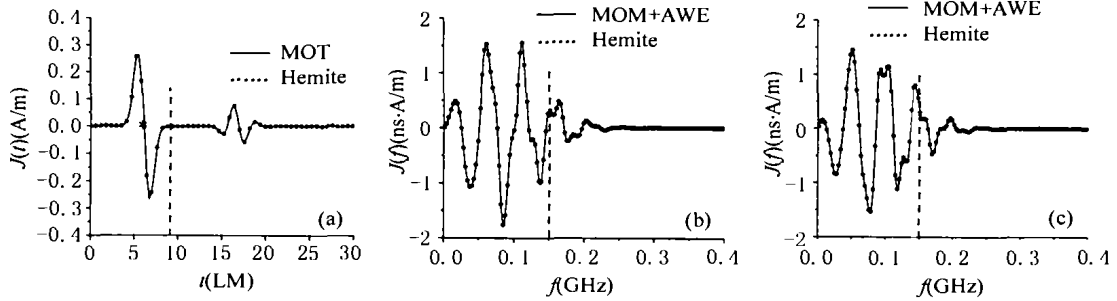
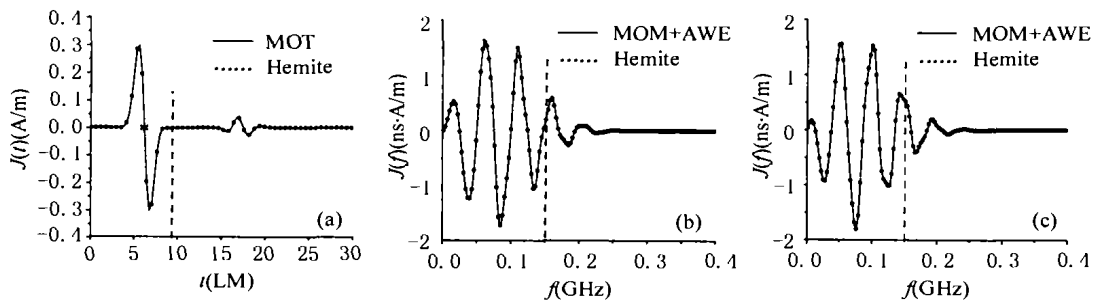


图 4 “半圆弧导带 + 直导带”导体柱感应电流的时、频响应 ($d=2a$)
(a) 时域响应 (b) 频域响应 (实部) (c) 频域响应 (虚部)

图5 “直导带 + 直导带”导体柱感应电流的时、频响应 ($d = 2a$)

(a) 时域响应 (b) 频域响应(实部) (c) 频域响应(虚部)

图6 “半圆弧导带 + 直导带”导体柱感应电流的时、频响应 ($d = 2a$)

(a) 时域响应 (b) 频域响应(实部) (c) 频域响应(虚部)

例3 “直导带 + 直导带”导体柱: 其它结构参数同例1, 只是 $d = 20a$. Hermite 展开参数为: $N=52, t_0=20\text{ns}, l_t=2.44\text{LM}$.

例4 “半圆弧导带 + 直导带”导体柱: 其它结构参数同例2, 只是 $d = 2a$. Hermite 展开参数为: $N=42, t_0=20\text{ns}, l_t=2.09\text{LM}$.

4 结束语

本文利用连带 Hermite 级数展开完成了二维多导体柱在高斯脉冲平面波激励下的感应电流时域和频域响应的外推计算. 所考虑的多柱体包括“直导带 + 直导带”、“半圆弧导带 + 直导带”. 计算结果表明, 利用低频响应和早时响应的 Hermite 展开的外推结果与频域方法 MOM+AWE、时域方法 MOT 的数值解几乎完全一致, 并且同时获得了时域和频域响应, 从而证明了该外推方法的有效性.

参 考 文 献

- [1] R. F. Harrington 著, 计算电磁场的矩量法, 王尔杰等译, 北京, 国防工业出版社, 1981, 49-72.
- [2] C. J. Reddy, M. D. Deshpande, *et al.*, Fast RCS computation over a frequency band using method of moments in conjunction with asymptotic waveform evaluation technique, IEEE Trans. on AP, 1998, 46(8), 1229-1233.

- [3] C. M. Tong, J. Liang, W. Hong, A fast frequency sweeping method for RCS computation based on AWE technique, 2000 China-Japan Joint Meeting on Microwaves, Nanjing, China. 234–237.
- [4] S. M. Rao, Time Domain Electromagnetics, San Diego, USA, Academic Press, 1999, 131–150.
- [5] 彭仲秋, 瞬变电磁场, 北京, 高等教育出版社, 1989, 1–11.
- [6] R. S. Adve, T. K. Sarkar, Q. M. Pereira-Filho, S. M. Rao, Extrapolation of time-domain responses from three dimensional conducting objects utilizing the matrix pencil techniques, IEEE Trans. on AP, 1997, 45(1), 147–156.
- [7] R. S. Adve, T. K. Sarkar, Simultaneous time- and frequency-domain extrapolation, IEEE Trans. on AP, 1998, 46(4), 484–493.
- [8] M. M. Rao, T. K. Sarkar, T. Anjali, R. S. Adve, Simultaneous extrapolation in time and frequency domains using Hermite expansion, IEEE Trans. on AP, 1999, 47(6), 1108–1115.
- [9] H. J. Weaver 著, 离散和连续傅里叶分析理论, 王中德, 张辉译, 北京, 北京邮电学院出版社, 1991, 216–219.

CALCULATION OF ELECTROMAGNETIC SCATTERING OF MULTI-CYLINDERS IN TIME AND FREQUENCY DOMAINS BASED ON HERMITE EXTRAPOLATION

Tong Chuangming* ** Hong Wei* Xu Feng*

*(State Key Lab of Millimeter Waves, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**(Missile Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710018, China)

Abstract The time-domain response of the induced currents on a scattering object irradiated by a plane wave with a Gaussian pulse in time is expanded as an associate Hermite series in this paper. Using the isomorphism of the associate Hermite function and its Fourier transform, the frequency-domain information can be obtained similarly to the time-domain expansion. According to the corresponding relation between time-domain analysis and frequency-domain analysis, and using the early-time response and the low-frequency information of the induced currents, the non-known coefficients in the expansion series can be decided. The entire responses of the induced currents on the scattering object in both time and frequency domains can be obtained at one time by simultaneous extrapolation computation using both the early-time response and the low-frequency information of the induced currents. Electromagnetic scattering of multi-cylinders are calculated and analyzed based on this extrapolation methodology in this paper.

Key words Time responses, Frequency responses, Electromagnetic scattering, Extrapolation, Hermite polynomials

童创明: 男, 1964年生, 博士后, 副教授, 从事雷达系统、雷达对抗、计算电磁学等方面的科研和教学工作。
洪伟: 男, 1962年生, 教授, 博士后合作导师, 长江学者, 从事通讯、计算电磁学等方面的科研和教学工作。
许峰: 男, 1964年生, 博士生, 从事计算电磁学研究。