

基于双马尔科夫链的势概率假设密度滤波

刘江义 王春平*

(陆军工程大学石家庄校区电子与光学工程系 石家庄 050003)

摘要: 针对已有的基于双马尔科夫链(PMC)模型的势概率假设密度(PMC-CPHD)滤波算法无法实现的问题, 将PMC-CPHD算法改进为多项式形式以便于算法的实现, 并给出了改进算法的高斯混合(GM)实现。实验结果表明给出的GM实现能够有效实现多目标跟踪, 并且比基于PMC模型的概率假设密度(PMC-PHD)算法的GM实现提高了目标个数估计的稳定性。

关键词: 双马尔科夫链; 势概率假设密度; 高斯混合

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)02-0492-06

DOI: 10.11999/JEIT180352

Cardinalized Probability Hypothesis Density Filter Based on Pairwise Markov Chains

LIU Jiangyi WANG Chunping

(Electronic and optical engineering Department, Shijiazhuang Campus of Army Engineering University, Shijiazhuang 050003, China)

Abstract: In view of the problem that the Cardinalized Probability Hypothesis Density (CPHD) probability hypothesis density filtering algorithm based on the Pairwise Markov Chains (PMC) model (PMC-CPHD) is not suitable for implementation, the PMC-CPHD algorithm is modified into a polynomial form to facilitate implementation, and the Gauss Mixture (GM) implementation of the improved algorithm is given. The experimental results show that the given GM implementation realizes multitarget tracking effectively, and improves the stability of the target number estimation compared with the GM implementation of the probability hypothesis density filtering algorithm based on the PMC model (PMC-PHD).

Key words: Pairwise Markov Chains (PMC); Cardinalized Probability Hypothesis Density (CPHD); Gauss Mixture (GM)

1 引言

随机有限集(RFS)理论已广泛应用于多目标跟踪领域, 不同于传统的基于数据关联的多目标跟踪, 基于RFS的多目标跟踪提供了一种无需数据关联的理论框架。目前应用比较广泛的基于RFS的多目标跟踪算法主要包括概率假设密度(PHD)滤波^[1]、势概率假设密度(CPHD)滤波^[2]、多目标伯努利(MeMBer)滤波^[3]、势平衡多伯努利(CBMeMBer)滤波^[4]、标签多伯努利(LMB)滤波^[5]和广义标签多伯努利(GLMB)滤波^[6]等。

大部分多目标跟踪滤波器包括经典PHD滤波器都是假设目标及其量测符合隐式马尔科夫链(HMC)模型, HMC模型假定给定目标的状态是马尔科夫链(MC); 然而, HMC模型中隐含的马尔科夫性和

独立性假定在很多实际应用中是无效的^[7]。为了放松HMC模型的独立性假定, 文献^[8]提出了双马尔科夫链(PMC)模型; 文献^[7]提出了目标及量测符合PMC模型的PHD滤波算法, 并且证明在放松独立性假设情况下, 提出的PMC-PHD滤波器的跟踪性能优于基于HMC模型的PHD(HMC-PHD)滤波器; 文献^[7]提出的PMC-PHD滤波器只考虑了目标状态的1阶信息, 忽略了其高阶信息, 导致目标个数估计不稳定, 针对这个问题, Mahler^[9]在PMC-PHD滤波算法的基础上传递目标的势分布函数, 提出了基于PMC模型的势概率假设密度(PMC-CPHD)滤波算法。

Mahler提出的PMC-CPHD算法中包含随机有限集合的微分运算, 不能直接进行高斯混合(GM)实现或序贯蒙特卡罗(SMC)实现, 本文首先简要介绍了PMC-PHD滤波器的原理, 在Mahler提出的PMC-CPHD算法的基础上进一步推导, 改进

为能够进行GM和SMC实现的多项式形式，并给出了改进算法的高斯混合(GM)实现，实验结果表明改进算法的GM实现能够有效实现多目标跟踪，并且相对于PMC-PHD算法的GM实现提高了目标个数估计的稳定性。

2 基于PMC模型的CPHD滤波

2.1 PMC模型

令 $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^m$ 为目标在 k 时刻的状态，其对应观测为 $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^q$ ，如果 $(\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{0:k})$ 的联合概率密度函数(pdf) $p(\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{0:k})$ 可以因式分解为式(1)，那么该系统在 $k \geq 0$ 时是一个PMC^[7]。

$$p(\mathbf{x}_{0:k}, \mathbf{y}_{0:k}) = p(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \prod_{i=1}^k p_{i|i-1}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i | \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_{i-1}) \quad (1)$$

其中， $p(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ 是初始时刻的目标状态分布，并且式(2)可以成立^[10]：

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}) &\neq f(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \\ f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}) &\neq g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中， $f(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ 和 $g(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ 分别是目标马尔科夫转移密度函数和传感器似然函数。

一种典型的高斯线性PMC模型可以表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_k^1 & \mathbf{F}_k^2 \\ \mathbf{H}_k^1 & \mathbf{H}_k^2 \end{bmatrix}}_{B_k} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} \\ \mathbf{y}_{k-1} \end{bmatrix} + \mathbf{w}_k \quad (3)$$

其中， $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ 为独立零均值高斯噪声，独立于 $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \sim N(\cdot; \mathbf{m}_0; \mathbf{P}_0)$ ，且

$$E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T) = \Sigma_k = \begin{bmatrix} \Sigma_k^{11} & \Sigma_k^{21T} \\ \Sigma_k^{21} & \Sigma_k^{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

2.2 基于PMC模型的CPHD滤波算法改进

RFS方法将给定时刻 k 的目标及量测看做两个RFS： $X_k = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ， $Z_k = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m\}$ ，其中， n 和 m 是随机整数，表示时刻 k 的目标和量测个数，与给定状态 $\mathbf{x}_i$ 关联的观测用 $\mathbf{y}_i$ 表示。随机有限集 X 的PHD(或强度) $v(\mathbf{x})$ 是多目标密度 $p(X)$ 的1阶矩^[11]，可以通过计算组合对联合PHD $v_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，然后利用 $v_k(\mathbf{x}) = \int v_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ ($v_k(\cdot)$ 是一个 $\mathbf{x}$ 或者 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的函数) 得到随机有限集 X 的PHD $v_k(\mathbf{x})$ ^[7]。

为了描述方便，令 $C_i^l = \frac{l!}{i!(l-i)!}$ 表示二项式系数，

$P_j^n = \frac{n!}{(n-j)!}$ 表示排列系数， $\langle \dots, \dots \rangle$ 表示两个函数的内积， $\langle \alpha, \beta \rangle = \int \alpha(x) \beta(x) dx$ 或 $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha(l) \beta(l)$ ， $\sigma_j(Z)$ 表示有限实数集 Z 的

j 阶基本对称函数， $\sigma_j(Z) = \sum_{S \subseteq Z, |S|=j} \left(\prod_{\zeta \in S} \zeta \right)$ 。

PMC-CPHD算法迭代更新步骤如下：

(1) 时间预测：在 $k-1$ 时刻，假设PMC组合对 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的先验联合PHD为 $v_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ，组合对个数分布及其概率产生函数(PGF)分别为 $p_{k-1}(n_{k-1})$ 和 $G_{k-1}(x)$ ，空间分布函数为 $s_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = v_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \langle 1, v_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ ，令 $s_{k-1}[h] = \int h_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot s_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot d\mathbf{x} d\mathbf{y}$ 。

根据文献^[11]， $k-1$ 时刻的PMC组合对联合PHD的时间预测可表示为

$$\begin{aligned} v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= b_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \int p_{S,k} \\ &\quad \cdot f_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y} | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}) \\ &\quad \cdot v_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} d\mathbf{y}_{k-1} \end{aligned} \quad (5)$$

其中， $p_{S,k}$ 为组合对 $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ 的存活概率， $b_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示新生目标RFS在 k 时刻的PHD；组合对的时间预测势分布及其对应的PGF分别表示为

$$\begin{aligned} G_{k|k-1}(x) &= G_k^B(x) \cdot G_{k-1}(1 - s_{k-1}[p_{S,k}]) \\ &\quad + s_{k-1}[p_{S,k}] \cdot x \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} p_{k|k-1}(n) &= \sum_{l \geq 0} p_{k-1}(l) \sum_{i=0}^n p^B(n-i) \cdot C_i^l \\ &\quad \cdot s_{k-1}[p_{S,k}]^i \cdot (1 - s_{k-1}[p_{S,k}])^{l-i} \end{aligned} \quad (7)$$

其中， $p^B(n)$ 和 $G_k^B(x)$ 分别表示 k 时刻新生目标势分布及其PGF，利用 $s_{k-1}[p_{S,k}] = \langle p_{S,k}, v \rangle / \langle 1, v \rangle$ ，势分布式可以改写为

$$p_{k|k-1}(n) = \sum_{i=0}^n p^B(n-i) \Pi[v_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-1}), p_{S,k}] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Pi[v, p_{S,k}](i) &= \sum_{l=i}^{\infty} C_i^l \frac{\langle p_{S,k}, v \rangle^i \langle 1 - p_{S,k}, v \rangle^{l-i}}{\langle 1, v \rangle^l} \\ &\quad \cdot p_{k-1}(l) \end{aligned} \quad (9)$$

(2) 状态更新：预测空间分布函数为 $s_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \langle 1, v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ ，PMC组合对的预测个数为 $N_{k|k-1} = \int v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}$ ，令 $s[h] = \int h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot s_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}$ 。

根据文献^[11]，状态更新的PMC组合对联合PHD可以表示为

$$v_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L_{Z_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} L_{Z_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (1 - p_{D,k}) \cdot \overset{\text{ND}}{L}_{Z_k} + \sum_{j=1}^{m_k} \frac{p_{D,k} \cdot \delta_{z_j}(\mathbf{y})}{c_k(\mathbf{z}_j)} \\ &\quad \cdot \overset{\text{D}}{L}_{Z_k}(\mathbf{z}_j) \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $p_{D,k}$ 为组合对 $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ 被检测得到的概率, $\delta_{z_i}(\mathbf{y})$ 为集中于 $\mathbf{z}_i$ 位置的Dirac delta函数,

$$L_{Z_k}^{\text{ND}} = \frac{1}{N_{k|k-1}} \cdot \frac{\sum_{i=0}^m (m_k - i)! \cdot p^\kappa(m_k - i) \cdot \sigma_i(Z_k) \cdot G_{k|k-1}^{(i+1)}(s[1 - p_{D,k}])}{\sum_{l=0}^m (m_k - l)! \cdot p^\kappa(m_k - l) \cdot \sigma_l(Z_k) \cdot G_{k|k-1}^{(l)}(s[1 - p_{D,k}])} \quad (12)$$

$$L_{Z_k}^{\text{D}}(\mathbf{z}_j) = \frac{1}{N_{k|k-1}} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (m - i - 1)! \cdot p^\kappa(m - i - 1) \cdot \sigma_i(Z_k - \{\mathbf{z}_j\}) \cdot G_{k|k-1}^{(i+1)}(s[1 - p_{D,k}])}{\sum_{l=0}^m (m - l)! \cdot p^\kappa(m - l) \cdot \sigma_l(Z_k) \cdot G_{k|k-1}^{(l)}(s[1 - p_{D,k}])} \quad (13)$$

$$\sigma_i(Z_k) = \sigma_{m,i} \left(\frac{\hat{\tau}_k(\mathbf{z}_1)}{c_k(\mathbf{z}_1)}, \frac{\hat{\tau}_k(\mathbf{z}_2)}{c_k(\mathbf{z}_2)}, \dots, \frac{\hat{\tau}_k(\mathbf{z}_m)}{c_k(\mathbf{z}_m)} \right) \quad (14)$$

其中, $c_k(\mathbf{z}) = \langle 1, \kappa_k(\mathbf{z}) \rangle / \kappa_k(\mathbf{z})$ 为 k 时刻的噪声空间分布的概率密度, $\kappa_k(\mathbf{z})$ 为噪声RFS在 k 时刻的PHD.

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_k(\mathbf{z}) &= \int p_{D,k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \cdot s_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{\langle p_{D,k} \cdot \delta_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}), v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle}{\langle 1, v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle} \end{aligned} \quad (15)$$

根据文献[12]中对经典CPHD算法在物理空间意义上的解释, $G^{(i)}(\mathbf{y}) = \sum_{n=i}^{\infty} P_i^n \cdot p(n) y^{n-i}$, 以

$$\gamma_k^u[v, Z](n) = \sum_{j=0}^{\min\{m,n\}} (m-j)! \cdot p^\kappa(m-j) \cdot P_{j+u}^n \cdot \frac{\langle 1 - p_{D,k}, v_{k|k-1} \rangle^{n-(j+u)}}{\langle 1, v_{k|k-1} \rangle^{n-j}} \cdot \sigma_j(Z_k) \quad (18)$$

最后, 状态更新的势分布及其PGF分别为

$$G_k(x) = \frac{\sum_{j=0}^m x^j (m-j)! \cdot p^\kappa(m-j) \cdot G_{k|k-1}^{(j)}(x \cdot s[1 - p_{D,k}]) \cdot \sigma_j(Z_k)}{\sum_{i=0}^m (m-i)! \cdot p^\kappa(m-i) \cdot G_{k|k-1}^{(i)}(s[1 - p_{D,k}]) \cdot \sigma_i(Z_k)} \quad (19)$$

$$p_k(n) = \frac{\sum_{j=0}^{\min\{m,n\}} (m-j)! \cdot p^\kappa(m-j) \cdot P_j^n \cdot s[1 - p_{D,k}]^{n-j} \cdot \sigma_j(Z_k) \cdot p_{k|k-1}(n_k)}{\sum_{l=0}^m (m-l)! \cdot p^\kappa(m-l) \cdot G_{k|k-1}^{(l)}(s[1 - p_{D,k}]) \cdot \sigma_l(Z_k)} \quad (20)$$

可以看出, 势分布式(20)中的分母与 $L_{Z_k}^{\text{ND}}$ 以及 $L_{Z_k}^{\text{D}}(\mathbf{z}_j)$ 式中的分母形式相似, 利用 $s[1 - p_{D,k}] = \langle 1 - p_{D,k}, v_{k|k-1} \rangle / \langle 1, v_{k|k-1} \rangle$ 可以将式(20)改写为

$$p_k(n) = \frac{\gamma_k^0[v_{k|k-1}, Z_k](n) \cdot p_{k|k-1}(n)}{\langle \gamma_k^0[v_{k|k-1}, Z_k], p_{k|k-1} \rangle} \quad (21)$$

基于PMC的CPHD算法的预测和更新迭代公式经过改进后变成多项式形式, 易于下一步的实现及应用。

3 基于PMC的CPHD滤波器的GM实现

线性高斯模型在多目标滤波中广泛应用, 这部分重点研究线性高斯PMC模型式(3)和式(4),

及当 $n < i$ 时, $P_i^n = 0$ 。利用 $s[1 - p_{D,k}] = \langle 1 - p_{D,k}, v_{k|k-1} \rangle / \langle 1, v_{k|k-1} \rangle$, $N_{k|k-1} = \langle 1, v_{k|k-1} \rangle$, 可以将式(12)和式(13)改写为

$$L_{Z_k}^{\text{ND}} = \frac{\langle \gamma_k^1[v_{k|k-1}, Z_k], p_{k|k-1} \rangle}{\langle \gamma_k^0[v_{k|k-1}, Z_k], p_{k|k-1} \rangle} \quad (16)$$

$$L_{Z_k}^{\text{D}}(\mathbf{z}_j) = \frac{\langle \gamma_k^1[v_{k|k-1}, Z_k - \{\mathbf{z}_j\}], p_{k|k-1} \rangle}{\langle \gamma_k^0[v_{k|k-1}, Z_k], p_{k|k-1} \rangle} \quad (17)$$

其中,

PMC-CPHD算法的GM实现如下:

(1)预测步骤: 假设 $k-1$ 时刻多目标状态的强度函数 $v_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和目标的势分布概率密度函数 $p_{k-1}(n)$ 已知, 并且存活概率 $p_{S,k}$ 和检测概率 $p_{D,k}$ 独立于状态 $\mathbf{x}$, 组合对 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的时间预测势分布可以简化为

$$p_{k|k-1}(n) = \sum_{i=0}^n p^B(n-i) \sum_{l=i}^{\infty} C_i^l p_{S,k}^l (1 - p_{S,k})^{l-i} \cdot p_{k-1}(l) \quad (22)$$

其中, 假设假定新生强度 $b_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是一个GM:

$$b_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{J_{b_k}} w_{b_k}^{(i)} \mathcal{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{m}_{b_k}^{(i)}; \mathbf{P}_{b_k}^{(i)}) \quad (23)$$

假定时刻 $k-1$, PHD $v_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示为

$$v_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = v_{k-1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + v_{k-1}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (24)$$

$$v_{k-1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}^1} w_{k-1}^{1,(i)} \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{m}_{k-1}^{1,(i)}; \mathbf{P}_{k-1}^{1,(i)}) \quad (25)$$

$$v_{k-1}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}^2} w_{k-1}^{2,(i)} \mathbf{N}(\mathbf{x}; \mathbf{m}_{k-1}^{2,(i)}; \mathbf{P}_{k-1}^{2,(i)}) \delta_{\mathbf{z}^{(i)}}(\mathbf{y}) \quad (26)$$

其中, $\mathbf{z}^{(i)}$ 属于给定集合 $Z = \{\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots, \mathbf{z}^{(J_{k-1}^2)}\}$, 其中可能包含重复元素。将式(24), 式(25)和式(26)代入式(5), 那么组合对 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的PHD $v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是一个GM:

$$v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = v_{k|k-1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + v_{k|k-1}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (27)$$

$$v_{k|k-1}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}^1} w_{k|k-1}^{1,(i)} \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{m}_{k|k-1}^{1,(i)}; \mathbf{P}_{k|k-1}^{1,(i)}) \quad (28)$$

$$v_{k|k-1}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{J_{k-1}^2} w_{k|k-1}^{2,(i)} \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{m}_{k|k-1}^{2,(i)}; \mathbf{P}_{k|k-1}^{2,(i)}) \quad (29)$$

其中,

$$w_{k|k-1}^{j,(i)} = p_{s,k} w_{k-1}^{j,(i)}, j = \{1, 2\} \quad (30)$$

$$\mathbf{m}_{k|k-1}^{1,(i)} = \mathbf{B}_k \mathbf{m}_{k-1}^{1,(i)}, \mathbf{m}_{k|k-1}^{2,(i)} = \mathbf{B}_k \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{k-1}^{2,(i)} \\ \mathbf{z}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k-1}^{1,(i)} &= \Sigma_k + \mathbf{B}_k \mathbf{P}_{k-1}^{1,(i)} \mathbf{B}_k^T, \mathbf{P}_{k|k-1}^{2,(i)} \\ &= \Sigma_k + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k^1 \\ \mathbf{H}_k^1 \end{bmatrix} \mathbf{P}_{k-1}^{2,(i)} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k^{1T} & \mathbf{H}_k^{1T} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

对式(27)中的高斯分量进行重新排序, 并令 $J_{k|k-1} = J_{k|k-1}^1 + J_{k|k-1}^2 + J_{\gamma_k}$, $v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 可重新表示为

$$v_{k|k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{J_{k|k-1}} w_{k|k-1}^{(i)} \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{m}_{k|k-1}^{(i)}; \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)}) \quad (33)$$

$$\mathbf{m}_{k|k-1}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{k|k-1}^{x,(i)} \\ \mathbf{m}_{k|k-1}^{y,(i)} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{k|k-1}^{x,(i)} & \mathbf{P}_{k|k-1}^{xy,(i)} \\ \mathbf{P}_{k|k-1}^{xy,(i)T} & \mathbf{P}_{k|k-1}^{y,(i)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

(2) 更新步骤: 组合对 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 势分布的更新过程可以表示为

$$p_k(n) = \frac{\psi_k^0[\mathbf{w}_{k|k-1}, Z_k](n) \cdot p_{k|k-1}(n)}{\langle \psi_k^0[\mathbf{w}_{k|k-1}, Z_k], p_{k|k-1} \rangle} \quad (35)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Psi_k^u[\mathbf{w}, Z](n) &= \sum_{j=0}^{\min\{m,n\}} (m-j)! \cdot p^k(m-j) \\ &\cdot P_j^n \cdot \frac{(1-p_{D,k})^{n-(j+u)}}{\langle 1, \mathbf{w} \rangle^u} \\ &\cdot \sigma_j(\Lambda_k(\mathbf{w}, Z)) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\Lambda_k(\mathbf{w}, Z) = \left\{ \frac{p_{D,k} \mathbf{w}^T \mathbf{q}_k(\mathbf{z})}{c_k(\mathbf{z})} : \mathbf{z} \in Z \right\},$$

$$\mathbf{w}_{k|k-1} = \left[w_{k|k-1}^{(1)}, w_{k|k-1}^{(2)}, \dots, w_{k|k-1}^{(J_{k|k-1})} \right]^T \quad (37)$$

$$\mathbf{q}_k(\mathbf{z}) = \left[q_k^{(1)}(\mathbf{z}), q_k^{(2)}(\mathbf{z}), \dots, q_k^{(J_{k|k-1})}(\mathbf{z}) \right],$$

$$q_k^{(i)}(\mathbf{z}) = \mathbf{N}(\mathbf{z}; \mathbf{m}_{k|k-1}^{y,(i)}; \mathbf{P}_{k|k-1}^{y,(i)}) \quad (38)$$

将式(33)代入式(10), 组合对 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的PHD $v_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的更新过程表示为

$$v_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = v_k^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + v_k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (39)$$

$$v_k^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{J_{k|k-1}} w_k^{1,(i)} \mathbf{N}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{m}_{k|k-1}^{(i)}; \mathbf{P}_{k|k-1}^{(i)}) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} v_k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{\mathbf{z} \in Z_k} \sum_{i=1}^{J_{k|k-1}} w_k^{2,(i)}(\mathbf{z}) \mathbf{N}(\mathbf{x}; \\ &\mathbf{m}_k^{2,(i)}(\mathbf{z}); \mathbf{P}_k^{2,(i)}) \delta_{\mathbf{z}}(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (41)$$

$$w_k^{1,(i)} = \frac{\langle \Psi_k^1[\mathbf{w}_{k|k-1}, Z_k], p_{k|k-1} \rangle}{\langle \Psi_k^0[\mathbf{w}_{k|k-1}, Z_k], p_{k|k-1} \rangle} (1 - p_{D,k}) w_{k|k-1}^{(i)} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} w_k^{2,(i)}(\mathbf{z}) &= \frac{p_{D,k} w_{k|k-1}^{(i)}(\mathbf{z})}{c_k(\mathbf{z})} \\ &\cdot \frac{\langle \Psi_k^1[\mathbf{v}_{k|k-1}, Z_k - \{\mathbf{z}_j\}], p_{k|k-1} \rangle}{\langle \Psi_k^0[\mathbf{v}_{k|k-1}, Z_k], p_{k|k-1} \rangle} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\mathbf{m}_k^{2,(i)}(\mathbf{z}) = \mathbf{m}_{k|k-1}^{x,(i)} + \mathbf{K}_k^{(i)}(\mathbf{z} - \mathbf{m}_{k|k-1}^{y,(i)}) \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{2,(i)} &= \mathbf{P}_{k|k-1}^{x,(i)} - \mathbf{K}_k^{(i)} \mathbf{P}_{k|k-1}^{xy,(i)T}, \\ \mathbf{K}_k^{(i)} &= \mathbf{P}_{k|k-1}^{xy,(i)} (\mathbf{P}_{k|k-1}^{y,(i)})^{-1} \end{aligned} \quad (45)$$

将式(41)的高斯混合项进行重新排列, 令 $J_k^2 = J_{k|k-1} \times |Z_k|$, $|Z_k|$ 表示集合 Z_k 的基数, $v_k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 可以重新表示为

$$v_k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{J_k^2} w_k^{2,(i)} \mathbf{N}(\mathbf{x}; \mathbf{m}_k^{2,(i)}; \mathbf{P}_k^{2,(i)}) \delta_{\mathbf{z}^{(i)}}(\mathbf{y}) \quad (46)$$

因此, 组合对的PHD $v_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和 $v_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的形式相同。

(3) 裁剪与合并: PMC-CPHD算法的更新步骤中高斯混合项个数指数型增长, 需要减少混合项的数目。裁剪技术众所周知^[13-15]: 删除权重 $w_k^{1,(i)}$ 和 $w_k^{2,(i)}$ 小于给定门限值 T_p 的混合项, 并且可以通过分别保留 $v_k^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 和 $v_k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 中权重最大的 $J_{\max}^1$ 和 $J_{\max}^2$ 个项来限制其高斯项数目。

缩减混合项个数的一种常用的方法是合并相近的

项, 对于给定门限 T_m , 如果 $v_k^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的高斯量 (i) 和 (j) (维度为 $m+p$) 满足式(47)则将两个高斯量合并:

$$\left(\mathbf{m}_k^{1,(i)} - \mathbf{m}_k^{1,(j)} \right)^T \left(\mathbf{P}_k^{1,(i)} \right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{m}_k^{1,(i)} - \mathbf{m}_k^{1,(j)} \right) \leq T_m \quad (47)$$

最后, 如果 $v_k^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 的高斯量 (i) 和 (j) (维度为 m) $\mathbf{m}_k^{2,(i)}$, $\mathbf{m}_k^{2,(j)}$ 和 $\mathbf{P}_k^{2,(i)}$ 的满足式(47), 并且 $\mathbf{z}^{(i)} = \mathbf{z}^{(j)}$, 则这两个高斯量合并。

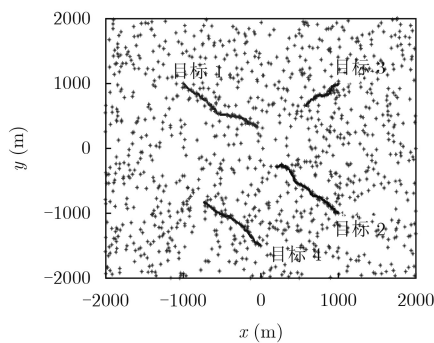
执行了裁剪及合并步骤以后就可以提取状态: 根据势分布 $p_k(n)$ 得到目标的估计个数 N'_k , 权重最大的 N'_k 个高斯量将被认为是目标, 目标状态为高斯量的均值。

4 实验仿真

实验仿真采用线性高斯PMC模型式(3)和式(4), 令

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_k^1 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_k^1 &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_k^2 &= \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_k^2 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_k^{11} &= \begin{bmatrix} 51 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 51 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \\ \Sigma_k^{21} &= \begin{bmatrix} 93 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 93 & 1 \end{bmatrix} \\ \Sigma_k^{22} &= \begin{bmatrix} 199 & 0 \\ 0 & 199 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$



(a) 仿真场景

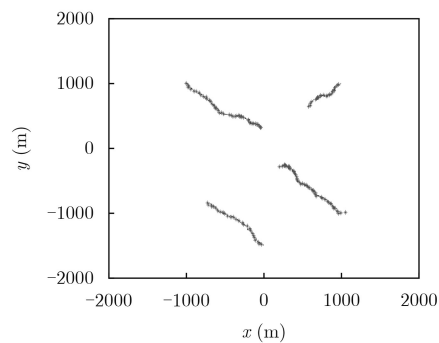
仿真场景中共出现4个目标: 目标1和2出现在 $k=1$ 时刻, 目标3和4出现在 $k=20$ 时刻。我们在笛卡尔坐标系下跟踪目标的位置和速度, $\mathbf{x}_k = [p_{x,k}, \dot{p}_{x,k}, p_{y,k}, \dot{p}_{y,k}]^T$ 。

在区域 $V = [-2000, 2000] \times [-2000, 2000]$ 内均匀地产生均值为20的杂波量测。另外, 令 $p_{S,k} = 0.98$, $p_{D,k} = 0.9$, 裁剪与合并门限分别为 $T_p = 10^{-5}$ 和 $T_m = 5$ m, GM实现的最大高斯分量数为 $J_{\max}^1 = J_{\max}^2 = 50$ 。仿真场景及PMC-CPHD算法的GM实现的跟踪结果如图1所示, 实验结果表明提出的PMC-CPHD算法的GM实现能够有效实现多目标跟踪; 仿真实验过程中, PMC-CPHD算法的GM实现的单次迭代时间约为100 ms, 对于实时性要求不太高的多目标跟踪系统, PMC-CPHD算法的GM实现的效率基本能够满足要求。

在相同场景下, 将PMC-CPHD算法的GM实现与文献[7]中的PMC-PHD算法的GM实现进行对比, 两种算法采用相同的参数, 两种算法的目标个数估计及估计方差如图2所示, 可以看出, PMC-CPHD算法的GM实现相比于PMC-PHD算法的GM实现的目标个数估计更加准确, 并且目标个数估计的稳定性更好。

5 结论

本文首先简要介绍了PMC模型以及基于PMC模型的PHD滤波器; 然后根据CPHD算法在物理空间意义上的经典解释, 对已有的PMC-CPHD算法进一步推导, 将算法中的随机有限集合的微分运算改为多项式形式以便算法的实现, 并给出了改进算法的GM实现; 利用基于线性高斯PMC模型的场景对给出的PMC-CPHD算法的GM实现进行验证, 实验结果表明PMC-CPHD算法的GM实现能够有效实现多目标跟踪, 相比于HMC-CPHD算法的GM实现能够更准确估计目标个数, 并且目标个数估计的稳定性更好。



(b) 跟踪结果

图1 仿真场景及跟踪结果

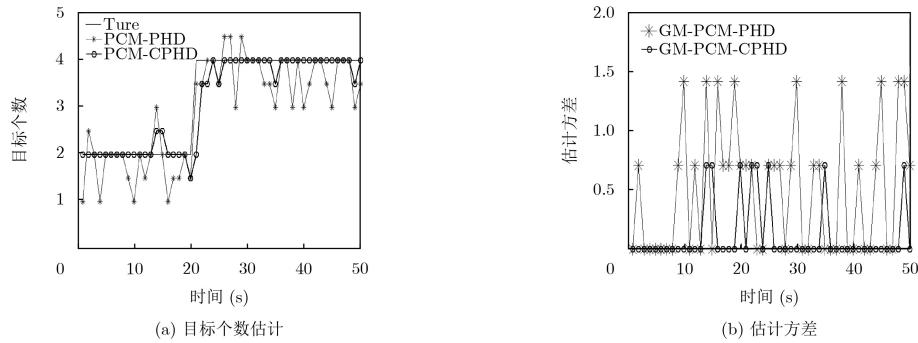


图2 目标个数估计及估计方差

参 考 文 献

- [1] GAO Yiyue, JIANG Defu, and LIU Ming. Particle-gating SMC-PHD filter[J]. *Signal Processing*, 2017, 130: 64–73. doi: [10.1016/j.sigpro.2016.06.017](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2016.06.017).
- [2] 杨丹, 姬红兵, 张永权. 未知杂波条件下样本校正的势估计概率假设密度滤波算法[J]. *电子与信息学报*, 2018, 40(4): 912–919. doi: [10.11999/JEIT170666](https://doi.org/10.11999/JEIT170666).
YANG Dan, JI Hongbing, and ZHANG Yongquan. A cardinalized probability hypothesis density filter with unknown clutter estimation using corrected sample set[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(4): 912–919. doi: [10.11999/JEIT170666](https://doi.org/10.11999/JEIT170666).
- [3] 袁常顺, 王俊, 孙进平, 等. 一种幅度信息辅助多伯努利滤波算法[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(2): 464–471. doi: [10.11999/JEIT150683](https://doi.org/10.11999/JEIT150683).
YUAN Changshun, WANG Jun, SUN Jinping, et al. A multi-bernoulli filtering algorithm using amplitude information[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(2): 464–471. doi: [10.11999/JEIT150683](https://doi.org/10.11999/JEIT150683).
- [4] 陈辉, 韩崇昭. Rao-Blackwellized粒子势均衡多目标多伯努利滤波[J]. *控制理论与应用*, 2016, 33(2): 146–153. doi: [10.7641/CTA.2016.50588](https://doi.org/10.7641/CTA.2016.50588).
CHEN Hui and HAN Chongzhao. Rao-Blackwellized particle cardinality balanced multi-target multi-bernoulli filter[J]. *Control Theory & Applications*, 2016, 33(2): 146–153. doi: [10.7641/CTA.2016.50588](https://doi.org/10.7641/CTA.2016.50588).
- [5] QIU Hao, HUANG Gaoming, and GAO Jun. Variational bayesian labeled multi-bernoulli filter with unknown sensor noise statistics[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2016, 29(5): 1378–1384. doi: [10.1016/j.cja.2016.05.002](https://doi.org/10.1016/j.cja.2016.05.002).
- [6] 朱书军, 刘伟峰, 崔海龙. 基于广义标签多伯努利滤波的可分辨目标跟踪算法[J]. *自动化学报*, 2017, 43(12): 2178–2189. doi: [10.16383/j.aas.2017.c160334](https://doi.org/10.16383/j.aas.2017.c160334).
ZHU Shujun, LIU Weifeng, and CUI Hailong. Multiple resolvable groups tracking using the GLMB filter[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2017, 43(12): 2178–2189. doi: [10.16383/j.aas.2017.c160334](https://doi.org/10.16383/j.aas.2017.c160334).
- [7] PETETIN Y and DESBOUVRIES F. Bayesian multi-object filtering for pairwise Markovchains[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(18): 4481–4490. doi: [10.1109/TSP.2013.2271751](https://doi.org/10.1109/TSP.2013.2271751).
- [8] PIECZYNSKI W. Pairwise Markov chains[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2003, 25(5): 634–639. doi: [10.1109/TPAMI.2003.1195998](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2003.1195998).
- [9] MAHLER R. Tracking targets with pairwise-Markov dynamics[C]. *International Conference on Information Fusion*, Washington, DC, USA, 2015: 280–286.
- [10] MAHLER R. On multitarget pairwise-Markov models[J]. *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers(SPIE)*, 2015, 9474, 94740D: 1–12. doi: [10.1117/12.2177192](https://doi.org/10.1117/12.2177192).
- [11] MAHLER R. Multitarget bayes filtering via first-order multitarget moments[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, 39(4): 1152–1178. doi: [10.1109/TAES.2003.1261119](https://doi.org/10.1109/TAES.2003.1261119).
- [12] ERDINC O, WILLETT P, and BARSHALOM Y. A physical-space approach for the probability hypothesis density and cardinalized probability hypothesis density filters[C]. *Proceedings of the SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets*, Orlando, USA, 2006, 6236, 623619: 1–12. doi: [10.1117/12.673194](https://doi.org/10.1117/12.673194).
- [13] NIE Yongfang and ZHANG Tao. An improved merging algorithm for the gaussian mixture probability hypothesis density filter[C]. *Chinese Control and Decision Conference*, Chongqing, China, 2017: 5687–5691. doi: [10.1109/CCDC.2017.7978180](https://doi.org/10.1109/CCDC.2017.7978180).
- [14] DONG Peng, JING Zhongliang, GONG Deren, et al. Maneuvering multi-target tracking based on variable structure multiple model GMCPHD filter[J]. *Signal Processing*, 2017, 141: 158–167. doi: [10.1016/j.sigpro.2017.06.004](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2017.06.004).
- [15] YANG Jinlong, LI Peng, YANG Le, et al. An improved ET-GM-PHD filter for multiple closely-spaced extended target tracking[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2017, 15(1): 468–472. doi: [10.1007/s12555-015-0193-x](https://doi.org/10.1007/s12555-015-0193-x).

刘江义：男，1988年生，博士生，研究方向为多目标跟踪、信息融合等。

王春平：男，1965年生，教授，研究方向为图像处理、目标跟踪等。