

相关熵与循环相关熵信号处理研究进展

邱天爽*

(大连理工大学电子信息与电气工程学部 大连 116024)

摘要: 在无线电监测和目标定位等应用中, 接收信号经常会受到脉冲噪声和同频带干扰等复杂电磁环境的影响, 传统的基于2阶统计量的信号处理方法往往不能正常工作, 基于分数低阶统计量的信号处理方法也由于对信号噪声统计先验知识的依赖性而遇到困难。近年来提出并受到信号处理领域普遍关注的相关熵和循环相关熵信号处理理论与方法, 是解决复杂电磁环境下信号分析处理、参数估计、目标定位和其他应用问题的有效技术手段, 有力促进了非高斯、非平稳信号处理理论方法和应用的发展。该文系统地综述了相关熵和循环相关熵信号处理的基本理论和基本方法, 包括相关熵与循环相关熵的起源背景、定义概念、性质特点, 以及所包含的数学物理意义。该文还介绍了相关熵与循环相关熵信号处理在多个领域的应用问题, 希望对非高斯、非平稳统计信号处理的研究和应用有所裨益。

关键词: 信号处理; 相关熵; 循环相关熵; 非高斯; 非平稳

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)01-0105-14

DOI: [10.11999/JEIT190646](https://doi.org/10.11999/JEIT190646)

Development in Signal Processing Based on Correntropy and Cyclic Correntropy

QIU Tianshuang

(Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: In radio monitoring and target location applications, the received signals are often affected by complex electromagnetic environment, such as impulsive noise and cochannel interference. Traditional signal processing methods based on second-order statistics often fail to work properly. The signal processing methods based on fractional lower order statistics also encounter difficulties due to their dependence on prior knowledge of signals and noises. In recent years, the theory and method of correntropy and cyclic correntropy signal processing, which are widely concerned in the field of signal processing, are put forward. They are effective technical means to solve the problems of signal analysis and processing, parameter estimation, target location and other applications to complex electromagnetic environment. They promote greatly the development of the theory and application of non-Gaussian and non-stationary signal processing. This paper reviews systematically the basic theory and methods of correntropy and cyclic correntropy signal processing, including the background, definition, properties and characteristics of correntropy and cyclic correntropy, as well as their mathematical and physical meanings. This paper introduces also the applications of correntropy and cyclic correntropy signal processing to many fields, hoping to benefit the research and application of non-Gaussian and non-stationary statistical signal processing.

Key words: Signal processing; Correntropy; Cyclic correntropy; Non-Gaussian; Non-stationary

收稿日期: 2019-08-28; 改回日期: 2019-11-05; 网络出版: 2019-11-12

*通信作者: 邱天爽 qiutsh@dlut.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61671105, 61172108, 61139001, 81241059)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61671105, 61172108, 61139001, 81241059)

1 引言

在诸如无线电监测和目标定位等信号处理应用领域,接收到的有用信号经常会受到脉冲性噪声和同频带干扰的影响,简称为脉冲噪声与同频干扰并存环境。在这种复杂电磁环境中,传统的信号分析处理理论和方法会出现显著的性能退化,甚至不能正常工作^[1,2]。为此,必须研究在这种复杂电磁环境下能够有效工作的信号处理新理论与新方法。

从统计信号处理的角度来说,脉冲性噪声属于一类典型的非高斯随机过程,通常用Alpha稳定分布(Alpha-stable distribution)^[1]来描述或建模。这类噪声的特点是其不存在有限的2阶统计量,且其概率密度函数具有显著的厚拖尾。而无线电监测等通信信号处理中的大部分信号和同频带干扰,则可以归属于循环平稳随机过程,是一类典型的非平稳随机过程。因此,脉冲噪声与同频干扰并存的复杂电磁环境下的信号处理问题,可以归结为一类非高斯、非平稳随机信号分析与处理问题。

相关熵(correntropy)^[3-5]与循环相关熵(cyclic-correntropy)^[6,7]是近年来提出并得到迅速发展的信号处理新理论与新方法,对于解决上述脉冲噪声和同频干扰下的信号处理问题,具有重要的意义。所谓相关熵,实际上是一种广义的相关函数。它具有能够同时反映信号的时间结构和统计特性的优点,可看作是在再生核希尔伯特空间定义的相关函数。相关熵依据其核函数的调整与控制,对信号中的脉冲性噪声有很好的抑制作用。所谓循环相关熵,是针对具有循环平稳特性的通信信号而提出的一种新概念与新方法。它在相关熵的基础上,对于具有周期特性的相关熵函数,定义了循环相关熵的概念。循环相关熵保持了相关熵的特点,并借助其对于不同循环特性信号的区分特性,具有同时抑制脉冲噪声与同频干扰的能力。相关熵和循环相关熵由于其优越的性能,得到信号处理领域的高度重视和深入研究,并在信号检测、参数估计、目标定位、图像处理 and 自适应滤波等领域得到广泛的应用。在近十几年的发展历程中,美国佛罗里达大学Principe教授及团队的研究具有开创性和引领性的作用,国内西安交通大学陈霸东教授及团队做出了重要贡献。

本文拟系统介绍基于相关熵和循环相关熵信号处理理论方法的发展历程和研究现状,并给出了一些应用实例,旨在为读者提供一个该领域起源和发展的研究线索。

本文后续内容安排如下:第2节简要介绍了Alpha稳定分布和分数低阶统计量的基本概念与方法,第3节系统介绍了相关熵的概念与主要性质,

第4节介绍了循环相关熵的概念与性质,第5节给出了相关熵与循环相关熵在多个领域的应用情况,第6节为全文的结束语。

2 Alpha稳定分布的概念与分数低阶统计量

(1) Alpha稳定分布的概念

Alpha稳定分布是描述脉冲性噪声的强有力工具。由于这种分布是唯一一类满足广义中心极限定理^[1,2]的统计分布,因此成为统计信号处理中非高斯信号建模与分析的重要理论基础。Alpha稳定分布不存在统一的闭合的概率密度函数,通常用其特征函数的形式来表示,如式(1)所示

$$\phi(u) = \exp\{jau - \gamma|u|^\alpha[1 + j\beta\text{sgn}(u)\omega(u, \alpha)]\} \quad (1)$$

$$\text{其中, } \omega(u, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \lg |t|, & \alpha = 1 \end{cases}, \text{sgn}(\cdot) \text{为符号函数。}$$

由式(1)可知,Alpha稳定分布由 α, β, a 和 γ 共4个参数唯一确定。其中, $0 < \alpha \leq 2$ 称为特征指数,描述Alpha稳定分布的拖尾厚度, α 值越小,其脉冲性越强; $-1 \leq \beta \leq 1$ 为对称参数,表示该分布的对称程度; $-\infty < a < +\infty$ 为位置参数,决定分布的中心位置; $\gamma > 0$ 为分散系数,决定分布的离散程度,类似于高斯分布中的方差。

服从Alpha稳定分布的随机变量 X ,通常也使用 $X \sim S_\alpha(\gamma, \beta, a)$ 的形式来表示。Alpha稳定分布可以表示非常广泛的一类随机现象,若满足 $X \sim S_2(\gamma, 0, a)$,则 X 服从高斯分布,若满足 $X \sim S_1(\gamma, 0, a)$,则 X 服从柯西分布,若满足 $X \sim S_{1/2}(\gamma, -1, a)$,则 X 服从皮尔逊分布。

Alpha稳定分布具有一些重要的性质,其中,对于信号处理影响最大的性质为 p 阶矩性质,简述如下:

设Alpha稳定分布随机变量 $X \sim S_\alpha(\gamma, \beta, 0)$,且满足 $0 < \alpha < 2$ 。则有

$$E[|X|^p] \begin{cases} < \infty, & 0 < p < \alpha \\ = \infty, & p \geq \alpha \end{cases} \quad (2)$$

式(2)表明,对于 $\alpha < 2$ 的分数低阶Alpha稳定分布随机变量,其方差(或2阶矩)是不存在的。因此,基于方差或2阶统计量有限假设的信号处理方法(例如功率谱分析和最小均方等)将会显著退化,甚至会导致错误的结果。

(2) 分数低阶统计量

分数低阶统计量(Fractional Lower-Order Statistics, FLOS)是一类能够有效抑制脉冲性噪声的统计信号处理工具,它包含了多种不同的形式。

若满足 $0 < p < \alpha$ ，则式(2)所示的 $E[|X|^p]$ 是一种典型的FLOS，称为分数低阶矩(FLOM)。其它常用的FLOS还包括共变(covariation)^[8-10]和分数低阶相关(FLOC)^[11,12]，有时也称为分数低阶协方差等。式(3)和式(4)分别给出了随机变量 X 和 Y 的共变 $[X, Y]_\alpha$ 和分数低阶相关 $R_F(m)$ 的表达式

$$[X, Y]_\alpha = \frac{E[XY^{(p-1)}]}{E[|Y|^p]} \gamma_y, \quad 1 \leq p < \alpha \quad (3)$$

其中， X 和 Y 满足联合对称Alpha稳定分布，且 $1 < \alpha \leq 2$ ， γ_y 表示 Y 的分散系数。

$$R_F(m) = E[(x_1(n))^{(b_1)}(x_2(n+m))^{(b_2)}], \quad 0 \leq b_1 < \alpha/2, 0 \leq b_2 < \alpha/2, 0 < \alpha < 2 \quad (4)$$

可以看出，在共变和分数低阶相关中，式(5)所示的非线性变换算子，是各类FLOS抑制脉冲噪声的关键环节。其通过有效削弱信号中远离中值或均值的“野点”而抑制脉冲噪声对有用信号的破坏作用，并进而保证信号处理算法的正常有效工作。

$$z^{(p-1)} = |z|^{p-1} \text{sgn}(z) \quad (5)$$

尽管，FLOS能够有效抑制脉冲噪声的影响，能够保证信号处理算法的正常运行，但是，FLOS的有效性是建立在一定统计先验知识基础上的。根据信号中Alpha稳定分布噪声的特征指数 α 值来确定分数低阶统计量的阶数 p 或 b_1 和 b_2 值，是基于FLOS信号处理算法正常工作的前提。

(3) FLOS方法的局限性

在依据FLOS处理Alpha稳定分布信号时，由于分数低阶统计量的阶数 p 或 b_1 和 b_2 值需要被限制在 $p < \alpha$ 或 $0 \leq b_1 < \alpha/2$ ， $0 \leq b_2 < \alpha/2$ 范围内^[1,2]，因此 p 或 b_1 和 b_2 值的确定依赖于对信号噪声 α 值的先验知识或对其准确估计，在许多应用中，这种先验知识是难于获取的，且依据接收信号对 α 参数进行准确估计也并非易事，尤其是当信号噪声的 α 值为时变的情况^[13]。另外，由于非高斯的Alpha稳定分布不存在有限的2阶统计量，因此不能使用常规的相关函数来刻画信号之间的相似性。尽管可以使用共变和分数低阶相关(或分数低阶协方差)等来实现这种相似性描述，但是，在使用共变时，要求信号与噪声服从联合对称Alpha稳定分布^[1,2]，在许多实际应用中，这一要求并不一定能够满足^[14]。如果采用分数低阶相关，虽然可以克服共变的一些缺点，但是分数低阶相关的参数确定需要已知Alpha稳定分布的特征指数^[1,2,14,15]，并且分数低阶相关的性质与2阶相关还是有一定差异的，例如2阶相关矩阵具有正定性，而分数低阶相关矩阵则不具备这种性质。因此，就目前的研究水平来看，使用FLOS理论与

方法进行Alpha稳定分布条件下的信号处理，存在算法参数不易获得的局限性，并且缺乏统一的理论框架。

3 相关熵的概念与基本性质

相关熵的概念最初是由美国佛罗里达大学Principle教授团队^[3,16]于2006年首次提出的，随后，该团队及统计信号处理领域的众多学者又系统研究了相关熵的数学物理意义、性质和在多个方面的应用问题，构建了相关熵信号处理的理论框架。

(1) 相关熵的概念

在统计信号处理领域，通常使用随机过程的统计分布和时间结构来对其进行描述和分析。但是直到相关熵的概念提出之前，一直缺乏既能有效描述随机过程统计分布，又能刻画其时间结构的单一测度。文献^[16]基于核方法(kernel method)^[17,18]和信息理论学习(Information Theoretic Learning, ITL)^[19]技术，提出了相关熵的概念和方法，文献^[20]对相关熵做了进一步的补充和分析。

任意两个随机变量 X 和 Y 之间的互相关熵(Cross Correntropy, CC)定义为

$$V_\sigma(X, Y) = E[\kappa_\sigma(X - Y)] \quad (6)$$

式(6)可简称为相关熵。在实际应用中，由于难于获得 X 和 Y 联合概率密度函数，且通常只能获得有限长度的数据 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ ，则相关熵的样本估计为

$$\hat{V}_{N,\sigma}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \kappa_\sigma(x_i - y_i) \quad (7)$$

式(6)、式(7)中， $\kappa_\sigma(\cdot)$ 为核函数，其中 σ 称为核长。高斯核函数是最常采用的核函数为

$$\kappa_\sigma(x - x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{\|x - x_i\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

式(8)所示的高斯核函数满足Mercer条件^[17]，其诱导了一个从输入空间到无穷维再生核希尔伯特空间(RKHS) \mathbf{F} 的非线性映射 Φ 。这样，相关熵的定义可以进一步写为^[5]

$$\begin{aligned} V_X(t_1, t_2) &= E[\langle \Phi(X(t_1)), \Phi(X(t_2)) \rangle_{\mathbf{F}}] \\ &= E[\kappa_\sigma(X(t_1) - X(t_2))] \end{aligned} \quad (9)$$

由于式(9)只考虑了一个随机变量或随机过程 $X(t)$ ，故称为自相关熵(autocorrentropy)，也简称为相关熵。其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{F}}$ 表示在再生核希尔伯特空间 \mathbf{F} 上的内积。这样，相关熵可以将原象空间的一个非线性问题经过非线性映射为另一个空间的线性问题，并在该空间对线性问题进行求解。

从上面关于相关熵的定义可知，所谓相关熵，其实质是对两个随机变量(或随机信号)之差高斯变

换后的函数求取数学期望。与相关函数相比,相关熵提供了一种非常相似但更加广义化的信号相似性测度,因而又常称为广义相关函数。而与分数低阶统计量相比,相关熵可以提取误差 $Z = X - Y$ 的高阶矩信息^[5,16],如式(10)

$$V_{\sigma}(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \mathbb{E} \left[\frac{(X - Y)^{2n}}{\sigma^{2n}} \right] \quad (10)$$

由式(10)可知, $V_{\sigma}(X, Y)$ 携带相关函数 $R_{XY}(\cdot)$ 的信息,并且包含 $Z = X - Y$ 所有偶阶矩的信息^[16]。

对离散序列的相关熵 $V_{\sigma}(m)$ 求取离散时间傅里叶变换,可以得到相关熵谱密度函数(CSD)^[16]为 $P_V(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_{\sigma}(m) e^{-j\omega m}$,其保留了常规谱密度函数的许多性质。

(2) 相关熵的主要性质

Santamaria和Liu等诸多学者对相关熵的基本性质做了系统的研究^[2,5,16,20],现列出相关熵的主要性质如下(为了简便起见,省略相关熵符号 $V_{\sigma}(\cdot)$ 的下标,写为 $V(\cdot)$):

(a) 对称性: $V(X, Y) = V(Y, X)$ 。

(b) 有界性: $0 < V(X, Y) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ 。当且仅当 $X = Y$ 时, $V(X, Y)$ 取得最大值。

(c) 展开特性: $V(X, Y)$ 包含了随机变量 $Z = X - Y$ 的全部偶阶矩的信息。

(d) 核长问题: 假定 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ 是由 $f_{X,Y}(x, y)$ 抽取的i.i.d数据,若核长 $\sigma \rightarrow 0$,且 $N\sigma \rightarrow \infty$ 时,则由Parzen方法^[21]估计得到的 $\hat{f}_{X,Y;\sigma}(x, y)$ 逼近其真值 $f_{X,Y}(x, y)$,且有 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} V(X, Y) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, x) dx$ 。但是,在实际应用中,由于 N 不可能趋于无穷,且 $\sigma \rightarrow 0$ 会导致无意义的结果,故需要设置一个核长的下限。

(e) 无偏估计与渐进一致估计: 假定 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ 是由 $f_{X,Y}(x, y)$ 抽取的i.i.d数据,当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\hat{V}_N(X, Y)$ 是 $V(X, Y)$ 的无偏估计和均方意义上的一致估计,即满足 $\mathbb{E}[\hat{V}_N(X, Y)] = V(X, Y)$ 和 $\lim_{N \rightarrow \infty, \sigma \rightarrow 0} N\sigma \text{Var}[\hat{V}_N(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} (\kappa_1(u))^2 du$ 。

(f) 映射空间特性: 在所映射的特征空间,相关熵是该空间数据的2阶统计量,即满足 $V(X, Y) = \mathbb{E}\{\langle \Phi(X), \Phi(Y) \rangle\} = \text{Trace}(\mathbf{R}_{XY})$ 。其中, $\text{Trace}(\cdot)$ 表示求矩阵的迹, \mathbf{R}_{XY} 表示非线性映射的相关矩阵。

(g) 特征空间的不相关性: 若 X 和 Y 是统计独立的,则 $V(X, Y) = \langle \mathbb{E}[\Phi(X)], \mathbb{E}[\Phi(Y)] \rangle_{\mathbf{F}}$ 。这表

明, X 和 Y 之间的独立性可以利用相关熵的计算来进行评价。

(h) 标量非线性映射: 设 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 为一数据集。相关熵核函数诱导一个标量非线性映射 η ,将信号 $\{x_i\}_{i=1}^N$ 映射为 $\{\eta_x(i)\}_{i=1}^N$,同时保留某种意义上的相似性测量,即 $\mathbb{E}[\eta_x(i)\eta_x(i+t)] = V(i, i+t) = \mathbb{E}[\kappa(x(i) - x(i+t))], 0 \leq t \leq N-1$ 。

(3) 相关熵诱导距离与最大相关熵准则

给定样本空间的两个随机变量 X 和 Y ,则相关熵诱导距离测度(CIM)^[5]定义为

$$\text{CIM}(X, Y) = [\kappa(0) - V(X, Y)]^{1/2} \quad (11)$$

式(11)所表示的相关熵诱导距离测度也可以推广用于给定样本空间中两个矢量 $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ 和 $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ 的情况。

作为测度函数, CIM具有许多优良特性,例如非负性,即 $\text{CIM}(X, Y) \geq 0$;同一性,即若 $X = Y$,则有 $\text{CIM}(X, Y) = 0$;对称性,即 $\text{CIM}(X, Y) = \text{CIM}(Y, X)$;三角不等式,即 $\text{CIM}(X, Z) \leq \text{CIM}(X, Y) + \text{CIM}(Y, Z)$ 。

图1给出了2D空间中从点 X 到原点距离的等高线图。

由图1可以看出,当两点距离较近时, CIM的行为就像一个L2范数,称这个区域为欧氏区域;在欧氏区域之外, CIM的行为就像一个L1范数,称这个区域为过渡区域;随着两个点进一步远离,则 CIM的行为类似于L0范数,称这个区域为修正区域。

基于CIM距离测度,定义了最大相关熵准则(Maximum Correntropy Criterion, MCC)^[5],可以用作信号处理中滤波器设计的代价函数。设 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ 为一组观测数据,则最大相关熵准则表示为

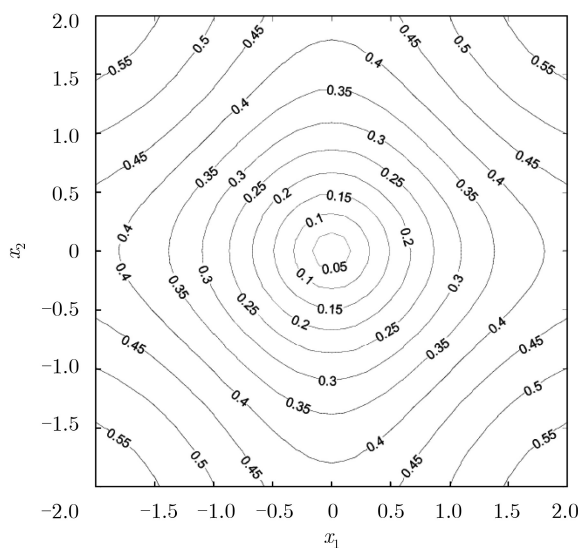


图1 2D空间CIM等高线图^[5]

$$\begin{aligned} \text{MCC}(e_i) &\triangleq \max \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \kappa(x_i - y_i) \right] \\ &= \max \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \kappa(z_i) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $e_i = x_i - y_i$ 表示误差信号。

可以证明, MCC与信号处理和参数估计中广泛使用的M估计^[2,2]密切相关。二者可以由 $\max_{\theta} \sum_{i=1}^N \kappa_{\sigma}(e_i) \Leftrightarrow \min_{\theta} \sum_{i=1}^N \rho(e_i)$ 相关联。式右边表示M估计, 其中的 $\rho(z) = \frac{1 - \exp(-e^2/2\sigma^2)}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, e 表示误差信号。

此外, MCC与信号处理中最广泛使用的最小均方(MSE)准则既有相似之处, 又有显著区别。一方面, 二者均可以用作某种优化准则, 都可以作为随机变量 X 和 Y 的相似性测度。但是另一方面, MSE是一种全局性2阶统计量函数, 更适用于高斯分布的情况。对于远离分布中心的误差样本, MSE具有显著的放大作用, 从而在误差分布非对称、非零中心及有异常值等情况不能实现最优。相比而言, MCC是一种局部性相似性测度, 对于测量噪声为非零均值、非高斯、离群值较大等情况(这些情况恰为Alpha稳定分布噪声的特点), 均具有很好的应用价值。此外, 最大相关熵准则具有很好的抑制脉冲噪声的作用^[5]。在Alpha稳定分布条件下, 相关熵诱导的相关函数具有正定对称性, 可以和普通相关一样定义功率谱^[5,23], 这也是相关熵比共变和分数低阶相关具有显著优势的主要特点。因此, 利用相关熵和MCC准则研究Alpha稳定分布信号处理具有非常诱人广阔的前景, 得到非高斯信号处理领域的广泛重视^[24-29]。

(4) 复相关熵与广义相关熵

前文所述的相关熵的概念与方法, 基本上属于实值范畴, 即没有考虑复值信号的情况。而实际上, 在通信技术等领域, 复值信号是经常存在的。

为了解决在复值信号条件下使用相关熵进行信号分析处理的问题, Guimaraes等人^[30]提出了复相关熵(Complex Correntropy, CC)的概念和最大复相关熵准则(MCCC), 将相关熵的概念和理论方法从实数域推广到复数域。

设 C_1 和 C_2 为两个复值随机变量, 则复相关熵定义为

$$V^C(C_1, C_2) = E[\kappa_{\sqrt{2}\sigma}^C(C_1 - C_2)] \quad (13)$$

其中, $\kappa_{\sqrt{2}\sigma}^C(C_1 - C_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(C_1 - C_2)(C_1 - C_2)^*}{2\sigma^2}\right)$

表示高斯核函数。MCCC准则定义为两个复随机变量 C_1 和 C_2 的复最大相关熵, 即 $J_{\text{MCCC}}(e) = \max[V^C(e)]$, 其中, e 表示两随机变量 C_1 和 C_2 之差。文献^[30]和文献^[31]分别采用复相关熵解决复值数据的系统辨识问题和分布式非圆信号的波达方向估计问题, 得到较好结果。

尽管相关熵和MCC准则在信号处理领域得到了越来越多的关注和应用, 但其默认的高斯核函数并不总是最好的选择。西安交通大学Chen教授等人^[32]提出了一种以广义高斯密度函数为核函数的广义相关熵和广义最大相关熵准则(GMCC), 并将其成功地运用于自适应滤波, 具有很好的稳定性, 可实现零发散概率。

广义相关熵定义为

$$V_{u,v}(X, Y) = E[G_{u,v}(X - Y)] \quad (14)$$

其中, 核函数 $G_{u,v}(\cdot)$ 是广义高斯概率密度函数, 定义为 $G_{u,v}(e) = \frac{u}{2v\Gamma(1/u)} \exp(-|e/v|^u)$ 。其中, $u > 0$ 为形状参数, $v > 0$ 为尺度或宽度参数, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数。分析和实验表明, 相比于相关熵, 广义相关熵通过参数的选择, 可以适应更为复杂的信号条件, 并得到更好的结果, 具有很强的通用性和灵活性^[32-35]。

4 循环相关熵

正如前文所述, 在诸如无线电监测和无线通信等领域, 往往会遇到非高斯脉冲噪声和同频带干扰并存的复杂电磁环境。相关熵方法可以有效地抑制非高斯脉冲噪声的影响, 但是对接收信号中的同频带干扰却无能为力。为了解决脉冲噪声和同频干扰并存下的信号提取、参数估计和目标定位等问题, 本文作者团队在总结提炼相关熵和循环统计量^[36-38]信号处理理论方法的基础上, 提出了循环相关熵(Cyclic CorrEntropy, CCE)^[6]的概念, 并深入研究了循环相关熵的基本理论和应用问题^[39-42]。

(1) 循环相关熵的定义

设 $x(t)$ 为满足2阶循环平稳(SOCS)^[43]特性的随机信号, 其相关函数是周期性函数, 写为 $R_x(t, \tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = R_x(t+T_0, \tau)$, 其中, T_0 表示相关函数 $R_x(\cdot)$ 的周期。对周期性 $R_x(\cdot)$ 求取傅里叶级数, 得到循环相关(CC)^[44]函数为

$$R_x^{\xi}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_x(t, \tau) e^{-j2\xi t} dt \quad (15)$$

其中, $\xi = m/T_0$ 为循环频率。对应于分数低阶统计量, 可以类似地得到分数低阶循环相关函数(FLOCC)^[45,46]为

$$R_x^{\xi, F}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_F(t, \tau) e^{-j2\xi t} dt \quad (16)$$

其中, $R_F(\cdot)$ 表示分数低阶相关函数。

对于满足SOCS的随机信号 $x(t)$, 其相关熵可以写为

$$V_x(t, \tau) = E[\kappa_\sigma(x(t) - x(t+\tau))] = V_x(t + T_0, \tau) \quad (17)$$

这样, $V_x(t, \tau)$ 可以写为傅里叶级数的形式, 即 $V_x(t, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_x^\xi(\tau) e^{j2\pi\xi t}$ 。由此, 循环相关熵函数(CCE)定义为^[6,39]

$$V_x^\xi(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} V_x(t, \tau) e^{-j2\xi t} dt \quad (18)$$

对循环相关熵求取傅里叶变换, 得到循环相关熵谱(CCES)函数为

$$S_x^\xi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} V_x^\xi(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (19)$$

与常规的相关熵相比, 循环相关熵通过利用信号的循环平稳特性, 构造了一个循环频率域, 即使同频带干扰与有用信号占有相同的时段和频段, 但由于循环频率特性的不同, 仍然可以进行区分。与常规的相关熵相比, 循环相关熵由于采用了核函数映射机制, 保留了相关熵对非高斯脉冲噪声的抑制能力, 因而更加适合非高斯脉冲噪声的环境。

(2) 循环相关熵的基本性质

(a) 循环相关熵的统计平均可以表示为时间平均的形式, 即

$$V_x^\xi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \kappa_\sigma[x(t) - x(t+\tau)] e^{-j2\xi t} dt = \langle \kappa_\sigma[x(t) - x(t+\tau)] e^{-j2\xi t} \rangle_t \quad (20)$$

其中, $\langle \cdot \rangle_t$ 表示时间平均。

(b) 在Alpha稳定分布条件下, 循环相关熵是收敛的。即 $0 < |V_x^\xi(\tau)| < (2\sqrt{\pi}\sigma)^{-M} F(\sigma, \gamma)$ 。其中, M 为信号的维数, $F(\sigma, \gamma) = \frac{\sigma}{\sqrt{\gamma^2 + \sigma^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\gamma^2 + \sigma^2}}{\gamma}\right) + \frac{1}{e} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)$ 。 $\operatorname{erf}(\cdot)$ 和 $\operatorname{erfc}(\cdot)$ 分别为误差函数和互补误差函数。

(c) 对于某些调制信号来说, 循环相关熵谱中循环频率的特定值, 对应于调制信号的载波频率。因此, 该性质可以用于估计信号的载波频率。

(d) 循环相关熵谱在频率域与循环频率域均具有某种对称性, 但不具备偶对称性。

(e) 循环相关熵谱具有0阶($\xi_0 = 0$)和2阶($\xi_1 = 2fc$)循环平稳特性。实际上, 0阶循环平稳特

性所表示的是平稳特性。若信号是非平稳的, 则不具备这个0阶循环平稳性。

(f) 循环相关熵谱具有偶数阶的循环平稳性。

(g) 核长的选择。文献[39]给出了核长选择的准则, 即 $\sigma_1 \approx \sqrt{\frac{\operatorname{Med}[x^2(t)] + \operatorname{Med}[x^2(t+\tau)]}{6}}$ 。式中, $\operatorname{Med}[\cdot]$ 表示取序列的中值。

循环相关熵与循环相关熵谱的定义和性质, 保证了基于循环相关熵的信号处理算法能够有效地抑制接收信号中的非高斯脉冲性噪声和同频带干扰的影响, 适合于复杂电磁环境下的信号检测、参数估计和目标定位等应用。

图2给出了循环相关熵谱与常规的循环相关谱及分数低阶循环相关谱的对比图。由图2可以明显看出, 在相同的信噪比条件下, 循环相关熵谱对噪声干扰具有更好的抑制作用, 图中与信号相关联的

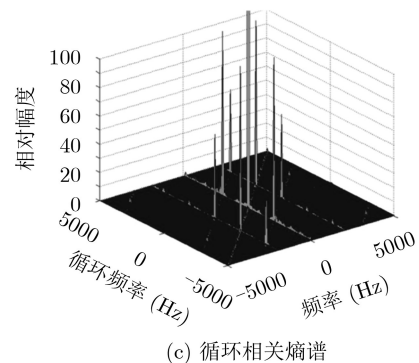
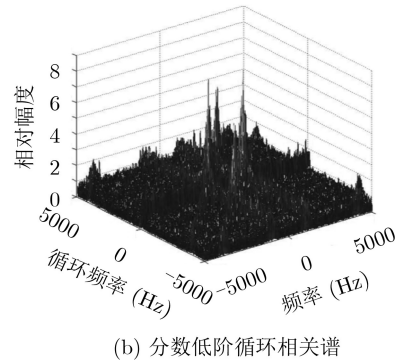
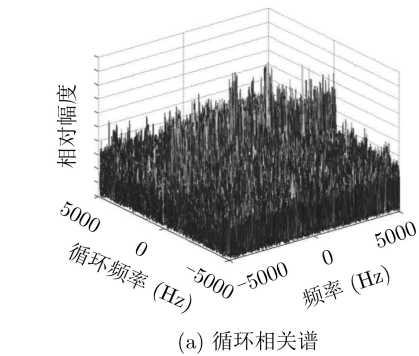


图2 循环相关熵谱与常规的循环相关谱及分数低阶循环相关谱的对比图^[6]

谱峰非常尖锐，这非常有利于信号的参数估计与信号提取。

5 相关熵与循环相关熵在信号处理中的应用

自从相关熵的概念和理论方法于2006年由Principe教授团队首次提出以来，文献中报道了大量基于相关熵进行信号处理的理论和应用研究成果。据作者不完全统计，关于相关熵的研究论文累计超过4000篇，其中仅2015年以来的4年就发表论文接近3000篇。可以认为，关于相关熵理论和应用的研究正在成为信号处理领域的前沿和热点问题之一。

(1) 局部相似性测度

统计信号处理中常用的相似性度量大多是基于2阶统计量的，例如均方误差和相关函数等。文献[3]基于信息理论学习的基本原理，把随机信号的相关函数推广到相关熵函数，从而构造了一种局部相似性测度。这种相似性测度通过对不同延迟下信号相似性进行定量刻画，从而能够量化随机过程的时间结构。另一方面，相关熵测度对于信号相似性的度量，不仅仅局限于2阶统计量，由于核函数的非线性特性，使得随机量所有偶阶矩都可参与相似性度量。此外，在Alpha稳定分布噪声等非高斯条件下，基于相关熵的信号处理算法会明显优于基于MSE的方法。这主要归结于相关熵对于信号中的异常值、非零均值和非高斯特性的不敏感特性。

(2) 非线性测试

非线性测试是非线性系统分析与建模领域不可或缺的重要步骤。由于常规的非线性测试过于复杂，往往不能对诸如李雅普诺夫指数或相关维之类的非线性参数进行准确估计，或者不能得到足够的非线性条件。文献[44]系统研究了相关熵的特性，通过求取基于相关熵谱的经验累积分布函数(ECDF)，可以有效排除两个信号序列具有高斯和线性性质的假设。相关熵作为一种基于核的相似性测度，由于其包含了数据集的统计特性和时间结构信息，具有保持非线性特性的能力，使得相关熵成为一种计算效率高、可靠性高的检测统计量，它不仅捕获了时间相关性，而且还捕获了时间序列的动态特性。是检测时间序列中非线性特性的有效方法。

(3) 脉冲噪声条件下的鲁棒检测器

信号检测是雷达和移动通信等领域重要的工作环节。最大似然假设检验是高斯和线性条件下理论上的最优检测方法。而在实际应用中，由于条件的限制，往往采用线性相关滤波器或匹配滤波器技术来进行信号检测。由于非高斯和非线性条件的普遍存在，对于理论上的最优检测和实际应用的匹配滤

波器均造成较大影响，人们普遍转向对于诸如核滤波器这类非线性滤波器和非2次型代价函数的研究[47,48]。针对非高斯非线性条件下的信号检测问题，Pokharel等人[20]提出了一种基于相关熵的信号检测方法，对于脉冲噪声具有较好的鲁棒性，且计算复杂度较低。

考虑2元假设检验问题，设接收信号矢量 \mathbf{r} 有两种可能：或者信号 \mathbf{s}_0 存在，即 $\mathbf{r}=\mathbf{s}_0+\mathbf{n}$ ；或者信号 \mathbf{s}_1 存在，即 $\mathbf{r}=\mathbf{s}_1+\mathbf{n}$ 。其中， \mathbf{n} 为接收噪声。构造基于相关熵的匹配滤波器为 $L_C(\mathbf{r})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\kappa(r_i,s_{1,i})-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\kappa(r_i,s_{0,i})$ 。通过检测接收信号矢量更接近 \mathbf{s}_0 还是 \mathbf{s}_1 ，可以判定接收信号矢量中究竟是包含 \mathbf{s}_0 ，还是包含 \mathbf{s}_1 。由于采用了相关熵函数，使得这种非线性匹配滤波器对于脉冲噪声具有很好的抵抗作用，因而具有很好的鲁棒性。

(4) 在信号滤波中的应用

滤波是信号处理中最重要概念与技术之一。简言之，信号滤波的目的是去除信号中的无用成分，而保留信号中的有用成分。经典的滤波技术，通常在频域上对信号的不同成分进行区分。而现代的统计最优滤波技术，则往往依据某种统计最优准则对信号的成分、参数或信号的整体进行估计或提取。可以这样说，有信号处理的地方，就会有信号滤波的存在。

维纳滤波器、卡尔曼滤波器和基于最小均方(LMS)准则的自适应滤波器是典型的统计最优滤波器。这些滤波器的共同特点，是在高斯假定下，基于某个2阶统计量构造代价函数或递推估计量的。正是由于这个原因，这类统计最优滤波器在非高斯条件下性能退化，不能实现最优滤波。

为了改善非高斯噪声条件下统计最优滤波器的性能，自2006年相关熵的概念和理论提出以来，人们进行了广泛的探索和研究，提出了许多基于相关熵的统计最优滤波器的改进方法，并取得了很好的应用效果。

Singh等人[24]利用相关熵作为代价函数来最小化期望信号与自适应滤波器输出之间的误差，并将其应用于系统辨识和噪声抵消，表明了这种代价函数具有经典LMS算法的计算简单性，并且具有很好的鲁棒性。

Jeonga等人[49]利用相关熵对经典的最小平均相关能量(MACE)滤波器进行了非线性扩展，建立了由相关熵诱导的再生核希尔伯特空间中的MACE滤波方程。由于特征空间与输入空间之间的非线性关系，这种基于相关熵的MACE能够在保持移不变特性的同时，有效地提高MACE的性能。在合成孔径

雷达等应用的结果表明,该方法具有较好的抗畸变能力,在泛化和噪声抑制能力上均优于线性MACE。

近年来,由于具有通用非线性逼近特性和在再生核希尔伯特空间上线性与凸性等优良特性,核自适应滤波器受到学术界广泛的重视。针对核最小均方(KLMS)算法在非高斯、非线性条件下的性能退化的问题,Zhao等人^[50]基于最大相关熵准则,提出了一种核最大相关熵自适应滤波算法。该算法结合了KLMS和MCC准则的优点,性能优于KLMS和基于MCC的常规线性滤波器。

西安交通大学陈霸东教授团队在相关熵与最大相关熵准则的研究与探索中取得显著成果。Chen等人^[51]研究了最大相关熵准则下的贝叶斯估计问题,表明最大相关熵(MCC)估计本质上是一个平滑最大后验(MAP)概率估计。在一定条件下,当相关熵中的核长大于某个值时,MCC估计在平滑后验分布的严格凹区域中会有唯一的最优解。Chen等人^[52]还研究了最大相关熵准则下自适应滤波的稳态均方误差(EMSE)问题,得到了稳态超量均方误差(EMSE)的精确值。Wu等人^[53]提出了一种鲁棒性的自适应滤波器,称为核递归最大相关熵(KRMC),适用于非线性和非高斯信号处理。Peng等人^[28]在MCC中复合了一个线性约束,提出了一种约束最大相关熵(CMCC)自适应滤波器,具有计算复杂度较低,在强尾脉冲噪声下明显优于由MSE约束的自适应算法。Chen和Liu等人^[54-56]分别基于相关熵准则对经典的卡尔曼滤波器和无迹卡尔曼滤波器进行了改造,提出了最大相关熵卡尔曼滤波器、状态约束最大相关熵卡尔曼滤波器和最大相关熵无迹卡尔曼滤波器。这些经过相关熵改进后的卡尔曼滤波器,显著提高了卡尔曼滤波器对于非高斯脉冲噪声的鲁棒性,具有很好的性能。Liu等人^[57]把最大相关熵无迹卡尔曼滤波器应用于空间通信网络的相对状态估计,对重尾非高斯噪声具有很强的鲁棒性。

(5) 无线定位中的波达方向估计

波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计是阵列信号处理中的基本问题之一,广泛应用于雷达、声呐以及无线通信等领域^[58]。针对复杂电磁环境下非高斯脉冲噪声和同频干扰对DOA估计算法的影响,本文作者团队提出了一系列基于相关熵和循环相关熵的DOA估计与波束形成新方法^[59-64],得到较好的结果。

其中,Zhang等人^[60]依据相关熵方法,构建了“相关熵的相关(CRCO)”统计量,提出了基于CRCO-MUSIC的DOA估计算法,其波达方向估计结果优于已有的基于分数低阶统计(FLOS)的MUSIC算法,适合于非高斯Alpha稳定分布噪声环境下使

用。Wang等人^[61-63]构建了新的广义相关熵,在最大相关熵准则下求解相关熵的优化问题来估计信号子空间,提出了基于最小广义相关熵准则的DOA估计方法和脉冲噪声下基于稀疏表示的韧性DOA估计新方法,得到较好结果。Jin等人^[42]基于最大相关熵准则,提出了一种能够抵抗循环频率误差(CEF)的波束形成算法,在同频干扰、低快拍数、低信噪比和大范围CFE环境下具有良好的自适应波束形成效果。

(6) 在时间延迟估计中的应用

时间延迟(Time Delay Estimation, TDE)估计^[64,65]又称为到达时差(Time-Difference Of Arrival, TDOA)估计^[66],是依据接收的同源信号来确定不同接收器之间由于传播距离不同而引起的时间延迟,通常用于目标定位,在雷达、声呐和无线电监测等领域得到广泛应用。

经典的TDE方法大多是基于2阶统计量的,例如相关法或自适应滤波法等,这类方法简单易行,且具有较好的估计精度。但是,在非高斯Alpha稳定分布噪声和同频干扰等复杂电磁环境下,这类算法性能显著退化。针对这一问题,提出了基于相关熵和循环相关熵的TDE估计方法^[25,27,67-70],具有很好的抑制非高斯脉冲噪声的能力。特别是基于循环相关熵的TDE估计方法,可以在非高斯脉冲噪声和同频带干扰并存的复杂电磁环境中具有较好的鲁棒性。

(7) 在图像处理中的应用

相关熵的理论和方法在图像处理领域也得到广泛的重视和应用。He等人^[71]提出了一个稀疏相关熵框架,用于计算人脸识别中的鲁棒稀疏表示。该方法在处理人脸识别中有遮挡和数据损坏问题方面具有很好的鲁棒性和效率。Wang等人^[26]在解决图像分割问题时,提出了一种基于局部相关熵K均值聚类的水平集图像分割方法。通过对合成图像和真实图像的大量实验,表明该方法在噪声敏感度和分割精度方面都有很好的性能。文献^[72]提出了一种基于相关熵的水平集方法,用于对医学图像进行分割和偏移场校正。通过对合成图像和真实医学图像的大量实验,表明该方法在分割效率和准确性上都有显著的提高。联合稀疏表示(JSR)是一种常用的高光谱图像分类技术。针对JSR对异常值敏感的问题,Peng等人^[73]提出了基于相关熵的鲁棒JSR模型,用基于相关熵的测度代替传统的欧氏距离,性能超越了经典的JSR模型。

(8) 在医学信号分析处理中的应用

随着经济与社会的发展,医学与健康问题越来越

越成为人们关注的焦点。由于医学信号与影像问题中有不少非线性、非平稳和非高斯方面的问题,因此相关熵理论与方法在医学信号分析处理中也得到重视和应用。

针对慢性心力衰竭患者周期性或非周期性呼吸与健康人群呼吸流量信号的特征分类问题, Garde等人^[23]基于相关熵原理,提出了一种基于相关熵谱密度的呼吸参数提取与分类方法。在对冠心病患者进性周期或非周期分类时,准确率为88.9%。当将慢性心力衰竭患者与健康受试者进行区分时,准确率为95.2%。将非周期呼吸患者与健康受试者进行区分时,准确率为94.4%。

研究并确定脑电图(EEG)信号与信源之间的关系,对于理解神经系统的功能和作用具有重要意义。为了评价各电极EEG信号之间的相互依赖性, Hassan等人^[74]提出了一种基于相关熵谱密度的非线性连通指数,用于检测EEG信号的非线性以及线性耦合。该方法对噪声具有较强的鲁棒性,对耦合强度的突变具有较高的灵敏度。

将电极记录导管贴在胸腔内某一部位后记录到的心脏电活动,称为胸腔内心电图。胸腔内心电图是对体表心电图的补充,可对复杂的心电传导机制有进一步的信息描述。传统的心腔内电图显性频率分析方法,以确定激活率高的心脏部位作为消融靶点。但是,这种方法往往会丢弃频谱中的谐波结构或频谱包络等相关信息,不能提供复杂房颤(AF)信号的完整特征。Pérez等人^[75]用相关熵函数来估计心房颤动信号的基频,并把相关熵与傅里叶组织分析(FOA)相结合,不仅可以表征FA信号的周期性,而且可以通过用多个分量建模来研究更复杂的信号。

(9) 循环相关熵在通信和机械领域的应用

在天文、机械、雷达、声呐、通信与电力等自然科学和工程技术领域,存在许多循环平稳现象以及由此而引起的循环平稳随机信号。Napolitano^[38,76]于2016年在Signal Processing上连续发表2篇综述性论文,系统评述了近10年来循环平稳随机信号分析处理领域的研究进展。指出,在严重的噪声和干扰环境中,基于循环平稳性的信号处理技术明显优于经典的平稳信号处理技术。

针对循环平稳信号的特点和常规循环统计量的弱点,近年来发展起来的循环相关熵^[6,7,39]理论和方法受到学术界重视,并在许多领域得到应用^[6,40-42,69,77]。

在机械工业和其他相关领域中,对于各种设备中的滚动轴承进行故障诊断,是防止意外事故发生,提高工业效率的必要手段。尽管信号的频谱峰

度(kurtosis)已成为一种检测轴承故障的有效技术手段,但是在非高斯脉冲噪声下,其性能显著退化。Zhao等人^[77]提出一种基于循环相关熵(CCE)及循环相关熵谱(CCES)的故障诊断方法。通过对模拟信号和真实信号的实验分析,表明基于CCE及CCES的故障诊断方法,在抑制脉冲噪声干扰的能力方面,明显优于另外一种强大的频带选择方法。

在无线电监测和通信技术领域,信号调制方式的自动分类识别(AMC)是对信号进行进一步分析处理的重要环节。但是,由于调制信号种类繁多,且受到各类接收噪声和同频带干扰的影响,设计在复杂电磁环境下可靠有效工作的AMC算法与系统,仍然是一项具有重要意义的任务。针对上述问题, Ma等人^[40]提出了一种基于循环相关熵谱(CCES)的AMC方法。该方法对待分类识别信号求取CCES,并根据CCES提取不同周期频率的多个切片作为AMC的原始特征,再经由主成分分析对这些切片进一步优化,采用神经网络(或深度学习)作为分类器进行分类判别。蒙特卡罗仿真结果表明,基于循环相关熵谱的AMC算法具有很好的抵抗脉冲噪声和干扰的能力,尤其在低广义信噪比条件下性能优越。

非高斯、非平稳信号处理是统计信号处理领域的前沿与热点研究问题。鉴于循环相关熵谱具有特定的对称性和稀疏性,使得由压缩感知所得到的压缩谱可以用于非高斯、非平稳信号处理问题。为了在非高斯、非平稳条件下更好地完成信号参数估计的工作, Liu等人^[41]提出了一种利用压缩循环相关熵谱来估计信号循环频率的新方法,可以有效地利用稀疏重构中的快速贪婪算法,提高了循环频率估计的准确性和效率,具有计算速度快、存储成本低的优点。

(10) 在其它领域中的应用

天文学中的所谓变星(variable star),是指亮度与电磁辐射不稳定、经常变化、并且伴随着其它物理变化的恒星。而变化呈周期性的变星,叫做周期变星,通常可分为长期变星和短期变星两种。光曲线(light curves)是反映恒星亮度随时间变化的时间序列,其特点是噪声强,且采样不均匀。传统的估计变星周期的方法是时隙相关法(slotted correlation)、周期图法和方差分析法,但是由于非高斯噪声的影响,这些方法性能不够理想。为了更准确地估计周期变星的周期, Huijse等人^[78]提出了一种基于时隙相关熵的方法,即使用时隙滞后直接从不规则采样时间序列估计相关熵,并进一步地采用一种新的信息论度量方法来识别相关熵谱密度的

峰值。采用这种基于时隙相关熵的方法对多组光曲线时间序列进行周期估计,结果显示,对于来自MACHO的200组数据的正确率为74%,远优于传统时隙相关法50%的正确率。对于来自造父变星(Cepheid variable star)和天琴座RR型变星(RR Lyrae type variable stars)的400组数据的正确率达到97%。

风力发电是世界上使用最广泛的可再生能源之一,风速预测则是风力发电领域研究的重要方向之一。经典的短期风速预测的方法包括自回归滑动平均、支持向量机回归和人工神经网络等。极限学习机(Extreme Learning Machine, ELM)使基于神经网络的学习具有快速的训练速度和良好的生成性能,而在深度学习中开发的堆叠极限学习机(SELM)则将一个较大的神经网络分割成若干个连续计算的较小的神经网络,实现较小的存储占用。由于天气、温度、海拔等诸多不确定因素的影响,风能往往是不稳定的。这些随机波动会引起数据产生误差。针对上述不确定性问题, Luo等人^[33]依据相关熵所具有的非线性测度特点,在SELM框架中加入广义相关熵函数,提出一种基于广义相关熵的风速预报方法。通过对多阶秒级和多阶分钟级风速预报实验,验证了基于广义相关熵方法的优越性。与现有传统和最新模型相比,基于广义相关熵和SELM方法的预测精度更高,时间消耗更少。

电量消耗预测(Forecasting of Electricity Consumption, FoEC)是近年来电力市场十分关注的重要问题。如何科学准确地预测和评估电量消耗,是该领域研究的关键课题之一。针对电量消耗预测中尚存在的问题,文献^[79]依据最大相关熵准则改进最小二乘支持向量机(LSSVM)模型,以相关熵函数作为局部相似性评价准则,提出了一种电量消耗预测新方法,数据分析实验表明,这种以最大相关熵准则改进的预测方法,比常规的LSSVM具有更好的预测特性,对电力企业制定购电计划和用户定价具有参考意义。

6 结束语

本文对近十几年来基于相关熵和循环相关熵信号处理理论与应用技术的研究进展进行了较为系统的综述。介绍了相关熵和循环相关熵的起源背景、定义概念、性质特点,以及所包含的数学物理意义。相关熵是一种广义的相关函数,它可以将数据空间的非线性问题通过非线性变换,映射为再生核希尔伯特空间的线性问题求解,是一种既能有效描述随机过程统计分布,又能刻画其时间结构的单一测度,同时亦是一种局部化的相似性测度,对于

远离分布中心的异常值具有很好的抑制作用,非常适合Alpha稳定分布条件下的信号处理、参数估计与目标定位等应用。循环相关熵则在相关熵的基础上融入了循环统计量的理论与方法,具有同时抑制脉冲噪声和同频带干扰的作用。相关熵和循环相关熵在非高斯、非平稳信号处理中具有广泛的应用价值,并具有进一步深入研究的空间。

参考文献

- [1] SHAO M and NIKIAS C L. Signal processing with fractional lower order moments: Stable processes and their applications[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1993, 81(7): 986–1010. doi: [10.1109/5.231338](https://doi.org/10.1109/5.231338).
- [2] NIKIAS C L and SHAO M. *Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications*[M]. New York: Wiley, 1995: 1–3.
- [3] LIU Weifeng, POKHAREL P P, and PRINCIPE J C. Correntropy: A localized similarity measure[C]. 2006 IEEE International Joint Conference on Neural Network Proceedings, Vancouver, Canada, 2006: 4919–4924.
- [4] GUNDUZ A and PRINCIPE J C. Correntropy as a novel measure for nonlinearity tests[J]. *Signal Processing*, 2009, 89(1): 14–23. doi: [10.1016/j.sigpro.2008.07.005](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2008.07.005).
- [5] LIU Weifeng, POKHAREL P P, and PRINCIPE J C. Correntropy: Properties and applications in non-Gaussian signal processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(11): 5286–5298. doi: [10.1109/TSP.2007.896065](https://doi.org/10.1109/TSP.2007.896065).
- [6] LUAN Shengyang, QIU Tianshuang, ZHU Yongjie, et al. Cyclic correntropy and its spectrum in frequency estimation in the presence of impulsive noise[J]. *Signal Processing*, 2016, 1204: 503–508.
- [7] FONTES A I R, REGO J B A, DE M MARTINS A, et al. Cyclostationary correntropy: Definition and applications[J]. *Expert Systems with Applications*, 2017, 69: 110–117. doi: [10.1016/j.eswa.2016.10.029](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2016.10.029).
- [8] MILLER G. Properties of certain symmetric stable distributions[J]. *Journal of Multivariate Analysis*, 1978, 8(3): 346–360. doi: [10.1016/0047-259X\(78\)90058-1](https://doi.org/10.1016/0047-259X(78)90058-1).
- [9] CAMBANIS S and MILLER G. Linear problems in p-th order and stable processes[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1981, 41(1): 43–69. doi: [10.1137/0141005](https://doi.org/10.1137/0141005).
- [10] 郭莹, 邱天爽. 基于分数低阶统计量的盲多用户检测算法[J]. *电子学报*, 2007, 35(9): 1670–1674. doi: [10.3321/j.issn:0372-2112.2007.09.011](https://doi.org/10.3321/j.issn:0372-2112.2007.09.011).
GUO Ying and QIU Tianshuang. Blind multiuser detector based on FLOS in impulse noise environment[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2007, 35(9): 1670–1674. doi: [10.3321/j.issn:0372-2112.2007.09.011](https://doi.org/10.3321/j.issn:0372-2112.2007.09.011).
- [11] MA Xinyu and NIKIAS C L. Joint estimation of time delay

- and frequency delay in impulsive noise using fractional lower order statistics[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1996, 44(11): 2669–2687. doi: [10.1109/78.542175](https://doi.org/10.1109/78.542175).
- [12] 邱天爽, 王宏禹, 孙永梅. 一种基于分数低阶协方差的自适应EP潜伏期变化检测方法[J]. *电子学报*, 2004, 32(1): 91–95. doi: [10.3321/j.issn:0372-2112.2004.01.022](https://doi.org/10.3321/j.issn:0372-2112.2004.01.022).
QIU Tianshuang, WANG Hongyu, and SUN Yongmei. A fractional lower-order covariance based adaptive latency change detection for evoked potentials[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(1): 91–95. doi: [10.3321/j.issn:0372-2112.2004.01.022](https://doi.org/10.3321/j.issn:0372-2112.2004.01.022).
- [13] KONG Xuan and QIU Tianshuang. Adaptive estimation of latency change in evoked potentials by direct least mean p-norm time-delay estimation[J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1999, 46(8): 994–1003. doi: [10.1109/10.775410](https://doi.org/10.1109/10.775410).
- [14] LIU T H and MENDEL J M. A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(8): 1605–1613. doi: [10.1109/78.934131](https://doi.org/10.1109/78.934131).
- [15] GEORGIU P G, TSAKALIDES P, and KYRIAKAKIS C. Alpha-stable modeling of noise and robust time-delay estimation in the presence of impulsive noise[J]. *IEEE Transactions on Multimedia*, 1999, 1(3): 291–301. doi: [10.1109/6046.784467](https://doi.org/10.1109/6046.784467).
- [16] SANTAMARIA I, POKHAREL P P, and PRINCIPE J C. Generalized correlation function: Definition, properties, and application to blind equalization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(6): 2187–2197. doi: [10.1109/TSP.2006.872524](https://doi.org/10.1109/TSP.2006.872524).
- [17] VAPNIK V N. *The Nature of Statistical Learning Theory*[M]. New York: Springer Verlag, 1995: 2-4.
- [18] BACH F R and JORDAN M I. Kernel independent component analysis[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2002, 3: 1–48.
- [19] PRINCIPE J C. *Information Theoretic Learning: Renyi's Entropy and Kernel Perspectives*[M]. New York: Wiley, 1988: 1.
- [20] POKHAREL P P, LIU Weifeng, and PRINCIPE J C. A low complexity robust detector in impulsive noise[J]. *Signal Processing*, 2009, 89(10): 1902–1909. doi: [10.1016/j.sigpro.2009.03.027](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2009.03.027).
- [21] PARZEN E. On estimation of a probability density function and mode[J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1962, 33(3): 1065–1076. doi: [10.1214/aoms/1177704472](https://doi.org/10.1214/aoms/1177704472).
- [22] HUBER P J. *Robust Statistics*[M]. New York: Wiley, 1981: 1–2.
- [23] GARDE A, SÖRNMO L, JANÉ R, *et al.* Correntropy-based spectral characterization of respiratory patterns in patients with chronic heart failure[J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2010, 57(8): 1964–1972. doi: [10.1109/TBME.2010.2044176](https://doi.org/10.1109/TBME.2010.2044176).
- [24] SINGH A and PRINCIPE J C. Using correntropy as a cost function in linear adaptive filters[C]. 2009 International Joint Conference on Neural Networks, Atlanta, USA, 2009: 2950–2955.
- [25] 宋爱民, 邱天爽, 佟祉谏. 对称稳定分布的相关熵及其在时间延迟估计上的应用[J]. *电子与信息学报*, 2011, 33(2): 494–498. SONG Aimin, QIU Tianshuang, and TONG Zhijian. Correntropy of the symmetric stable distribution and its application to the time delay estimation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2011, 33(2): 494–498.
- [26] WANG Lingfeng and PAN Chunhong. Robust level set image segmentation via a local correntropy-based K-means clustering[J]. *Pattern Recognition*, 2014, 47(5): 1917–1925. doi: [10.1016/j.patcog.2013.11.014](https://doi.org/10.1016/j.patcog.2013.11.014).
- [27] JIN Fangxiao and QIU Tianshuang. Adaptive time delay estimation based on the maximum correntropy criterion[J]. *Digital Signal Processing*, 2019, 88: 23–32. doi: [10.1016/j.dsp.2019.01.014](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2019.01.014).
- [28] PENG Siyuan, CHEN Badong, SUN Lei, *et al.* Constrained maximum correntropy adaptive filtering[J]. *Signal Processing*, 2017, 140: 116–126. doi: [10.1016/j.sigpro.2017.05.009](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2017.05.009).
- [29] LI Yingsong, JIANG Zhengxiong, SHI Wanlu, *et al.* Blocked maximum correntropy criterion algorithm for cluster-sparse system identifications[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, 66(11): 1915–1919. doi: [10.1109/TCSII.2019.2891654](https://doi.org/10.1109/TCSII.2019.2891654).
- [30] GUIMARÃES J P F, FONTES A I R, REGO J B A, *et al.* Complex correntropy: Probabilistic interpretation and application to complex-valued data[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(1): 42–45. doi: [10.1109/LSP.2016.2634534](https://doi.org/10.1109/LSP.2016.2634534).
- [31] 朝乐蒙, 邱天爽, 李景春, 等. 广义复相关熵与相干分布式非圆信号DOA估计[J]. *信号处理*, 2019, 35(5): 795–801. CHAO Lemeng, QIU Tianshuang, LI Jingchun, *et al.* Generalized complex correntropy and DOA estimation for coherently distributed noncircular sources[J]. *Journal of Signal Processing*, 2019, 35(5): 795–801.
- [32] CHEN Badong, XING Lei, ZHAO Haiquan, *et al.* Generalized correntropy for robust adaptive filtering[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(13): 3376–3387. doi: [10.1109/TSP.2016.2539127](https://doi.org/10.1109/TSP.2016.2539127).

- [33] LUO Xiong, SUN Jiankun, WANG Long, *et al.* Short-term wind speed forecasting via stacked extreme learning machine with generalized correntropy[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 14(11): 4963–4971. doi: [10.1109/TII.2018.2854549](https://doi.org/10.1109/TII.2018.2854549).
- [34] ZHAO Ji and ZHANG Hongbin. Kernel recursive generalized maximum correntropy[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(12): 1832–1836. doi: [10.1109/LSP.2017.2761886](https://doi.org/10.1109/LSP.2017.2761886).
- [35] CHEN Liangjun, QU Hua, and ZHAO Jihong. Generalized correntropy based deep learning in presence of non-Gaussian noises[J]. *Neurocomputing*, 2018, 278: 41–50. doi: [10.1016/j.neucom.2017.06.080](https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.06.080).
- [36] GIANNAKIS G B and ZHOU GUOTONG. Harmonics in multiplicative and additive noise: Parameter estimation using cyclic statistics[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1995, 43(9): 2217–2221. doi: [10.1109/78.414790](https://doi.org/10.1109/78.414790).
- [37] GHOGHO M, SWAMI A, and GAREL B. Performance analysis of cyclic statistics for the estimation of harmonics in multiplicative and additive noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(12): 3235–3249. doi: [10.1109/78.806069](https://doi.org/10.1109/78.806069).
- [38] NAPOLITANO A. Cyclostationarity: New trends and applications[J]. *Signal Processing*, 2016, 120: 385–408. doi: [10.1016/j.sigpro.2015.09.011](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.09.011).
- [39] LIU Tao, QIU Tianshuang, and LUAN Shengyang. Cyclic Correntropy: Foundations and theories[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 34659–34669. doi: [10.1109/ACCESS.2018.2847346](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2847346).
- [40] MA Jitong and QIU Tianshuang. Automatic modulation classification using cyclic correntropy spectrum in impulsive noise[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2019, 8(2): 440–443. doi: [10.1109/LWC.2018.2875001](https://doi.org/10.1109/LWC.2018.2875001).
- [41] LIU Tao, QIU Tianshuang, and LUAN Shengyang. Cyclic frequency estimation by compressed cyclic correntropy spectrum in impulsive noise[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(6): 888–892. doi: [10.1109/LSP.2019.2910928](https://doi.org/10.1109/LSP.2019.2910928).
- [42] JIN Fangxiao, QIU Tianshuang, and LIU Tao. Robust cyclic beamforming against cycle frequency error in Gaussian and impulsive noise environments[J]. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2019, 99: 153–160. doi: [10.1016/j.aeue.2018.11.035](https://doi.org/10.1016/j.aeue.2018.11.035).
- [43] GARDNER W A. The spectral correlation theory of cyclostationary time-series[J]. *Signal Processing*, 1986, 11(1): 13–36. doi: [10.1016/0165-1684\(86\)90092-7](https://doi.org/10.1016/0165-1684(86)90092-7).
- [44] GARDNER W A, NAPOLITANO A, and PAURA L. Cyclostationarity: Half a century of research[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(4): 639–697. doi: [10.1016/j.sigpro.2005.06.016](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2005.06.016).
- [45] 郭莹, 邱天爽, 张艳丽, 等. 脉冲噪声环境下基于分数低阶循环相关的自适应时延估计方法[J]. *通信学报*, 2007, 28(3): 8–14. doi: [10.3321/j.issn:1000-436X.2007.03.002](https://doi.org/10.3321/j.issn:1000-436X.2007.03.002).
- GUO Ying, QIU Tianshuang, ZHANG Yanli, *et al.* Novel adaptive time delay estimation method based on the fractional lower order cyclic correlation in impulsive noise environment[J]. *Journal on Communications*, 2007, 28(3): 8–14. doi: [10.3321/j.issn:1000-436X.2007.03.002](https://doi.org/10.3321/j.issn:1000-436X.2007.03.002).
- [46] LIU Yang, QIU Tianshuang, and SHENG Hu. Time-difference-of-arrival estimation algorithms for cyclostationary signals in impulsive noise[J]. *Signal Processing*, 2012, 92(9): 2238–2247. doi: [10.1016/j.sigpro.2012.02.016](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.02.016).
- [47] KWON H and NASRABADI N M. Hyperspectral target detection using kernel matched subspace detector[C]. 2004 International Conference on Image Processing (ICIP), Singapore, 2004: 3327–3330.
- [48] ERDOGMUS D, AGRAWAL R, and PRINCIPE J C. A mutual information extension to the matched filter[J]. *Signal Processing*, 2005, 85(5): 927–935. doi: [10.1016/j.sigpro.2004.11.018](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2004.11.018).
- [49] JEONG K H, LIU Weifeng, HAN S, *et al.* The correntropy MACE filter[J]. *Pattern Recognition*, 2009, 42(5): 871–885. doi: [10.1016/j.patcog.2008.09.023](https://doi.org/10.1016/j.patcog.2008.09.023).
- [50] ZHAO Songlin, CHEN Badong, and PRINCIPE J C. Kernel adaptive filtering with maximum correntropy criterion[C]. 2011 International Joint Conference on Neural Networks, San Jose, USA, 2011: 2012–2017.
- [51] CHEN Badong and PRINCIPE J C. Maximum correntropy estimation is a smoothed MAP estimation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(8): 491–494. doi: [10.1109/LSP.2012.2204435](https://doi.org/10.1109/LSP.2012.2204435).
- [52] CHEN Badong, XING Lei, LIANG Junli, *et al.* Steady-state mean-square error analysis for adaptive filtering under the maximum correntropy criterion[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(7): 880–884. doi: [10.1109/LSP.2014.2319308](https://doi.org/10.1109/LSP.2014.2319308).
- [53] WU Zongze, SHI Jiahao, ZHANG Xie, *et al.* Kernel recursive maximum correntropy[J]. *Signal Processing*, 2015, 117: 11–16. doi: [10.1016/j.sigpro.2015.04.024](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.04.024).
- [54] CHEN Badong, LIU Xi, ZHAO Haiquan, *et al.* Maximum correntropy Kalman filter[J]. *Automatica*, 2017, 76: 70–77. doi: [10.1016/j.automatica.2016.10.004](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.10.004).
- [55] LIU Xi, CHEN Badong, ZHAO Haiquan, *et al.* Maximum correntropy Kalman filter with state constraints[J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 25846–25853. doi: [10.1109/ACCESS.2017.2769965](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2017.2769965).

- [56] LIU Xi, CHEN Badong, XU Bin, *et al.* Maximum correntropy unscented filter[J]. *International Journal of Systems Science*, 2017, 48(8): 1607–1615. doi: [10.1080/00207721.2016.1277407](https://doi.org/10.1080/00207721.2016.1277407).
- [57] LIU Xi, QU Hua, ZHAO Jihong, *et al.* Maximum correntropy unscented Kalman filter for spacecraft relative state estimation[J]. *Sensors*, 2016, 16(9): 1530. doi: [10.3390/s16091530](https://doi.org/10.3390/s16091530).
- [58] KRIM H and VIBERG M. Two decades of array signal processing research: The parametric approach[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, 13(4): 67–94. doi: [10.1109/79.526899](https://doi.org/10.1109/79.526899).
- [59] YOU Guohong, QIU Tianshuang, and YANG Jiao. A novel DOA estimation algorithm of cyclostationary signal based on UCA in impulsive noise[J]. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2013, 67(6): 491–499. doi: [10.1016/j.aeue.2012.11.006](https://doi.org/10.1016/j.aeue.2012.11.006).
- [60] ZHANG Jingfeng, QIU Tianshuang, SONG Aimin, *et al.* A novel correntropy based DOA estimation algorithm in impulsive noise environments[J]. *Signal Processing*, 2014, 104: 346–357. doi: [10.1016/j.sigpro.2014.04.033](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2014.04.033).
- [61] 王鹏, 邱天爽, 任福全, 等. 对称稳定分布噪声下基于广义相关熵的DOA估计新方法[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(8): 2007–2013.
- WANG Peng, QIU Tianshuang, REN Fuquan, *et al.* A novel generalized correntropy based method for direction of arrival estimation in symmetric alpha stable noise environments[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(8): 2007–2013.
- [62] WANG Peng, QIU Tianshuang, REN Fuquan, *et al.* A robust DOA estimator based on the correntropy in alpha-stable noise environments[J]. *Digital Signal Processing*, 2017, 60: 242–251. doi: [10.1016/j.dsp.2016.10.002](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2016.10.002).
- [63] 王鹏, 邱天爽, 金芳晓, 等. 脉冲噪声下基于稀疏表示的韧性DOA估计方法[J]. *电子学报*, 2018, 46(7): 1537–1544. doi: [10.3969/j.issn.0372-2112.2018.07.001](https://doi.org/10.3969/j.issn.0372-2112.2018.07.001).
- WANG Peng, QIU Tianshuang, JIN Fangxiao, *et al.* A robust DOA estimation method based on sparse representation for impulsive noise environments[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2018, 46(7): 1537–1544. doi: [10.3969/j.issn.0372-2112.2018.07.001](https://doi.org/10.3969/j.issn.0372-2112.2018.07.001).
- [64] KNAPP C and CARTER G C. The generalized correlation method for estimation of time delay[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1976, 24(4): 320–327. doi: [10.1109/TASSP.1976.1162830](https://doi.org/10.1109/TASSP.1976.1162830).
- [65] CARTER G C. Time delay estimation for passive sonar signal processing[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1981, 29(3): 463–470. doi: [10.1109/TASSP.1981.1163560](https://doi.org/10.1109/TASSP.1981.1163560).
- [66] WANG Gang and HO K C. Convex relaxation methods for unified near-field and far-field TDOA-based localization[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2019, 18(4): 2346–2360. doi: [10.1109/TWC.2019.2903037](https://doi.org/10.1109/TWC.2019.2903037).
- [67] YU Ling, QIU Tianshuang, and LUAN Shengyang. Fractional time delay estimation algorithm based on the maximum correntropy criterion and the Lagrange FDF[J]. *Signal Processing*, 2015, 111: 222–229. doi: [10.1016/j.sigpro.2014.12.018](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2014.12.018).
- [68] LUO Yuanzhe, SUN Guolu, ZHANG Xiaotong, *et al.* Adaptive time-delay estimation based on normalized maximum correntropy criterion for near-field electromagnetic ranging[J]. *Computers & Electrical Engineering*, 2018, 67: 404–414.
- [69] CHEN Xing, QIU Tianshuang, LIU Cheng, *et al.* TDOA estimation algorithm based on generalized cyclic correntropy in impulsive noise and cochannel interference[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2018, 101-A(10): 1625–1630.
- [70] LI Sen, LIN Bin, DING Yabo, *et al.* Signal-selective time difference of arrival estimation based on generalized cyclic correntropy in impulsive noise environments[C]. *The 13th International Conference on Wireless Algorithms, Systems, and Applications*, Tianjin, China, 2018: 274–283.
- [71] HE Ran, ZHENG Weishi, and HU Baogang. Maximum correntropy criterion for robust face recognition[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2011, 33(8): 1561–1576. doi: [10.1109/TPAMI.2010.220](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2010.220).
- [72] ZHOU Sanping, WANG Jinjun, ZHANG Mengmeng, *et al.* Correntropy-based level set method for medical image segmentation and bias correction[J]. *Neurocomputing*, 2017, 234: 216–229. doi: [10.1016/j.neucom.2017.01.013](https://doi.org/10.1016/j.neucom.2017.01.013).
- [73] PENG Jiangtao and DU Qian. Robust joint sparse representation based on maximum correntropy criterion for hyperspectral image classification[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2017, 55(12): 7152–7164. doi: [10.1109/TGRS.2017.2743110](https://doi.org/10.1109/TGRS.2017.2743110).
- [74] HASSAN M, TERRIEN J, MARQUE C, *et al.* Comparison between approximate entropy, correntropy and time reversibility: Application to uterine electromyogram signals[J]. *Medical Engineering & Physics*, 2011, 33(8): 980–986.
- [75] BARQUERO-PÉREZ O, SÖRNMO L, GOYA-ESTEBAN R, *et al.* Fundamental frequency estimation in atrial fibrillation signals using correntropy and Fourier organization analysis[C]. *The 3rd International Workshop*

- on Cognitive Information Processing (CIP), Baiona, Spain, 2012: 1–6.
- [76] NAPOLITANO A. Cyclostationarity: Limits and generalizations[J]. *Signal Processing*, 2016, 120: 323–347. doi: [10.1016/j.sigpro.2015.09.013](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.09.013).
- [77] ZHAO Xuejun, QIN Yong, HE Changbo, *et al.* Rolling element bearing fault diagnosis under impulsive noise environment based on cyclic correntropy spectrum[J]. *Entropy*, 2019, 21(1): 50. doi: [10.3390/e21010050](https://doi.org/10.3390/e21010050).
- [78] HUIJSE P, ESTEVEZ P A, ZEGERS P, *et al.* Period estimation in astronomical time series using slotted correntropy[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2011, 18(6): 371–374. doi: [10.1109/LSP.2011.2141987](https://doi.org/10.1109/LSP.2011.2141987).
- [79] DUAN Jiandong, QIU Xinyu, MA Wentao, *et al.* Electricity consumption forecasting scheme via improved LSSVM with maximum correntropy criterion[J]. *Entropy*, 2018, 20(2): 112. doi: [10.3390/e20020112](https://doi.org/10.3390/e20020112).
- 邱天爽: 男, 1954年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非高斯、非平稳统计信号处理.