

时域流信号的多任务稀疏贝叶斯动态重构方法研究

董道广* 芮国胜 田文彪

(海军航空大学信号与信息处理山东省重点实验室 烟台 264001)

摘要: 为了解决多任务观测条件下时域流信号动态重构面临的块效应问题, 该文基于重叠正交变换(LOT)和稀疏贝叶斯学习的贪婪重构框架先后提出了一种流信号多任务稀疏贝叶斯学习算法及其鲁棒增强型的改进算法, 前者将LOT时域滑窗推广到多任务条件下, 通过贝叶斯概率建模将未知的噪声精度的估计任务从信号重构中解耦并省略, 后者进一步引入了重构不确定性的度量, 提高了算法的鲁棒性和抑制误差积累的能力。基于浮标实测数据的实验结果表明, 相比多任务重构领域代表性较强的时间多稀疏贝叶斯学习(TMSBL)和多任务压缩感知(MT-CS)算法, 本文算法在不同信噪比、观测数目和任务数目条件下具有显著更高的重构精度、成功率和效率。

关键词: 信号处理; 流信号; 多任务; 稀疏贝叶斯; 块效应

中图分类号: TN911.7; TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)07-1758-08

DOI: 10.11999/JEIT190558

Research on the Dynamic Sparse Bayesian Recovery of Multi-task Observed Streaming Signals in Time Domain

DONG Daoguang RUI Guosheng TIAN Wenbiao

(Signal and Information Processing Key Laboratory in Shandong,
Navy Aviation University, Yantai 264001, China)

Abstract: To eliminate the blocking effects in the dynamic recovery of the streaming signals observed from multiple tasks in time domain, a streaming multi-task sparse Bayesian learning based algorithm and its robust enhanced version are proposed in this paper, where the former extends Lapped Orthogonal Transform (LOT) sliding window in time domain to multi-task condition, and decouples the estimation of unknown noise accuracy from signal reconstruction by Bayesian probability modeling and omits it, the latter further introduces the measurement of reconstructed uncertainty, which improves the robustness of the algorithm and the ability to suppress the accumulation of errors. Experimental results based on measured meteorological data shows that the proposed algorithms have significantly higher reconstruction accuracy, success rate and running speed than the representative algorithms in the field of compressed sensing from multiple measurement vectors, namely, the Temporal Multiple Sparse Bayesian Learning (TMSBL) algorithm and the Multi-Task-Compressed Sensing (MT-CS) algorithm, under different conditions of Signal-to-Noise Ratios, number of observations and tasks.

Key words: Signal processing; Streaming signals; Multi-task; Sparse Bayesian; Blocking effects

1 引言

时域流信号^[1,2]的多任务观测是工程上常见的信号处理任务, 例如海洋气象监测^[3,4]经常需要通过多传感器组成的系统对某些气象要素进行长期观测、记录和传输。为了缓解系统的数据存储和传输压力, 有必要对时域流信号进行数据压缩。近年来多观测向量(Multiple Measurements Vectors,

MMV)模型压缩感知(Compressed Sensing, CS)^[5]为解决上述问题提供了启示。然而, 传统压缩感知在对时域流信号进行分块处理时会受到块效应干扰, 系统观测时延越短, 信号分块长度就越小, 块效应的负面影响就越突出。

稀疏贝叶斯学习(Sparse Bayesian Learning, SBL)^[6]是近年来MMV CS方法常用的算法框架。早前, 文献[7-10]提出一系列基于SBL的MMV CS算法, 但均采用同一感知矩阵, 不适用于任务间感知矩阵不同的情形。文献[11]基于SBL提出一种MT-CS算法, 可以处理感知矩阵不同的多任务情形。随后, SBL的研究重心转移到了对信号的块稀疏性、

收稿日期: 2019-07-25; 改回日期: 2020-03-26; 网络出版: 2020-04-24

*通信作者: 董道广 sikongyu@yeah.net

基金项目: 国家自然科学基金(41606117, 41476089, 61671016)

Foundation Items: The National Natural Science of China (41606117, 41476089, 61671016)

时间相关性等内部结构^[12-15]的挖掘方面。近几年SBL的研究主要是在具体工程背景下的应用^[16-19], 缺少突破性的理论进展, 其关于流信号块效应消除方法研究的公开发表也比较缺乏, 直至最近文献^[20]基于SBL提出一种消除块效应的流信号压缩感知算法。该算法将SBL与重叠正交变换^[21](Lapped Orthogonal Transform, LOT)相结合, 通过建立时域滑窗实现信号的在线SBL重构。这是SBL在时域流信号处理领域的成功尝试, 但其应用条件是单任务观测情形, 多任务观测情形尚缺少有效研究。

为解决多任务条件下时域流信号的动态压缩重构问题, 本文基于LOT变换和SBL框架提出两种算法, 分别是流信号的多任务稀疏贝叶斯学习(Streaming Multi-Task Sparse Bayesian Learning, SMT-SBL)算法和流信号的多任务鲁棒稀疏贝叶斯学习(Streaming Multi-Task Robust Sparse Bayesian Learning, SMT-RSBL)算法。它们的共同特点是, 将文献^[20]的LOT滑窗机制推广到多任务条件下, 通过贝叶斯概率建模将噪声强度的估计从信号重构任务中解耦。所不同的是, SMT-RSBL算法利用前一滑窗的重构信息构造统计量, 将重构不确定性度量引入当前滑窗, 进一步抑制了先前的重构误差对当前滑窗的误差累积作用, 使算法的鲁棒性较SMT-SBL算法获得显著增强。本文利用基于实测气象数据获得的海上蒸发波导高度(Evaporation Duct Height, EDH)历史预测数据开展验证性实验, 结果表明相比多任务重构领域代表性较强的时间多稀疏贝叶斯学习(Temporal Multiple Sparse Bayesian Learning, TMSBL)^[10]和多任务压缩感知^[11](Multi-Task Compressed Sensing, MT-CS)算法, 本文算法在不同信噪比、观测数目和任务数目

条件下具有更高的重构精度, 更高的成功率和更快的运行速度。

2 流信号的多任务稀疏贝叶斯学习算法

假设任务数目为 L , 经过时域分块处理后, 信号及其在任意任务 l 下的LOT系数和压缩观测向量分别为 $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{w}_{t,l} \in \mathbb{R}^N$ 和 $\mathbf{y}_{t,l} \in \mathbb{R}^M$, 噪声向量为 $\mathbf{e}_{t,l} \in \mathbb{R}^M$, 下标 t 代表某个分块的时间段, 图1据此将文献^[20]中的LOT滑窗推广到多任务情形, 其中, $\mathbf{B}_l \in \mathbb{R}^{M \times 2N}$ 是基于高斯随机矩阵在LOT变换下的观测矩阵, 矩阵 $\mathbf{U}_l \in \mathbb{R}^{M(2d+2) \times N(2d+3)}$ 是 $2d+2$ 个 \mathbf{B}_l 有交叠地构成的滑窗意义上的等效观测矩阵, 图中将其分块处理成两个子矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}_l \in \mathbb{R}^{M(2d+2) \times N(d+1)}$ 和 $\bar{\mathbf{U}}_l \in \mathbb{R}^{M(2d+2) \times N(d+2)}$, 并定义 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} \triangleq [\mathbf{w}_{t-2d-1,l}^T, \mathbf{w}_{t-2d,l}^T, \dots, \mathbf{w}_{t+1,l}^T]^T$, $\bar{\mathbf{w}}_{t,l} = [\mathbf{w}_{t-2d-1,l}^T, \mathbf{w}_{t-2d,l}^T, \dots, \mathbf{w}_{t-d-1,l}^T]^T$, $\tilde{\mathbf{y}}_{t,l} = [\mathbf{y}_{t-2d-1,l}^T, \mathbf{y}_{t-2d,l}^T, \dots, \mathbf{y}_{t,l}^T]^T$ 和 $\tilde{\mathbf{e}}_{t,l} = [\mathbf{e}_{t-2d-1,l}^T, \mathbf{e}_{t-2d,l}^T, \dots, \mathbf{e}_{t,l}^T]^T$ 以及 $\tilde{\mathbf{W}}_t = [\tilde{\mathbf{w}}_{t,1}, \tilde{\mathbf{w}}_{t,2}, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_{t,L}]$, $\bar{\mathbf{W}}_t = [\bar{\mathbf{w}}_{t,1}, \bar{\mathbf{w}}_{t,2}, \dots, \bar{\mathbf{w}}_{t,L}]$, $\tilde{\mathbf{Y}}_t = [\tilde{\mathbf{y}}_{t,1}, \tilde{\mathbf{y}}_{t,2}, \dots, \tilde{\mathbf{y}}_{t,L}]$ 和 $\tilde{\mathbf{E}}_t = [\tilde{\mathbf{e}}_{t,1}, \tilde{\mathbf{e}}_{t,2}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{t,L}]$, 为了减小信号分块处理的时间延迟, 取 $d=1$, 观测方程为式(1)

$$\tilde{\mathbf{y}}_{t,l} = \mathbf{U}_l \tilde{\mathbf{w}}_{t,l} + \tilde{\mathbf{e}}_{t,l}, l = 1, 2, \dots, L \quad (1)$$

系数 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$, 噪声 $\tilde{\mathbf{e}}_{t,l}$ 以及噪声精度 $\alpha_{0,l}$ 分别服从式(2)–式(4)的先验分布,

$$\begin{aligned} p(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}) &= \prod_{\tau=t-2d-1}^{t+1} N(\mathbf{w}_{\tau,l} | 0, \alpha_{0,l}^{-1} \mathbf{A}_{\tau}^{-1}) \\ &= \prod_{\tau=t-2d-1}^{t+1} \prod_{i=1}^N N(w_{\tau i,l} | 0, \alpha_{0,l}^{-1} \alpha_{\tau i}^{-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

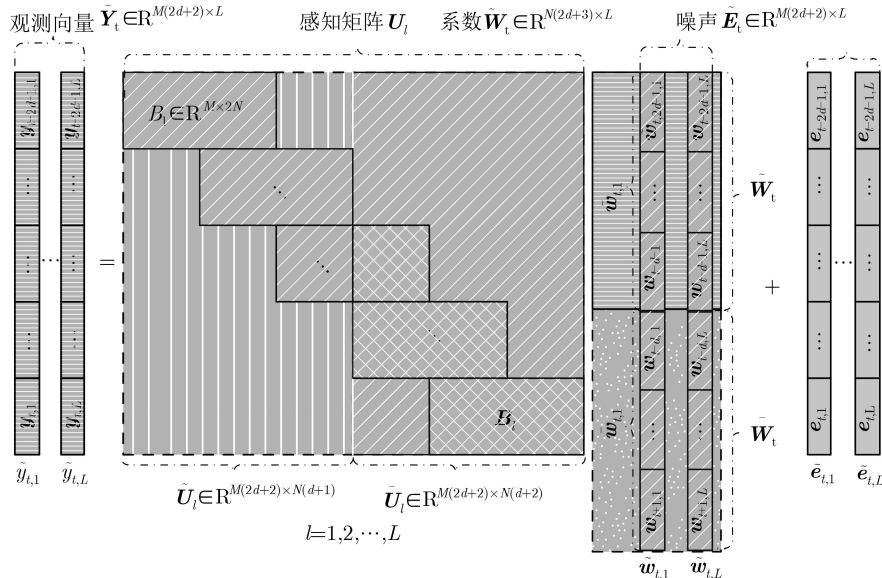


图1 时域流信号的多任务在线滑窗观测

$$p(\tilde{\mathbf{e}}_{t,l}) = N(\tilde{\mathbf{e}}_{t,l} | \mathbf{0}, \alpha_{0,l}^{-1} \mathbf{I}_{M(2d+2)}) \quad (3)$$

$$p(\alpha_{0,l}) = \text{Gamma}(\alpha_{0,l} | a_l, b_l) \quad (4)$$

其中, $a_l = 10^2 / \text{std}(\tilde{\mathbf{y}}_{t,l})$, $b_l = 1$, $\mathbf{w}_{\tau,1}, \mathbf{w}_{\tau,2}, \dots, \mathbf{w}_{\tau,L}$ 共享超参数 $\mathbf{A}_\tau = \text{diag}\{\boldsymbol{\alpha}_\tau\}$ ($\boldsymbol{\alpha}_\tau = [\alpha_{\tau 1}, \alpha_{\tau 2}, \dots, \alpha_{\tau N}]^T$), 使 $\mathbf{w}_{\tau,1}, \mathbf{w}_{\tau,2}, \dots, \mathbf{w}_{\tau,L}$ 支撑集相同。当前滑窗内观测数据的似然分布为

$$p(\tilde{\mathbf{Y}}_t | \tilde{\mathbf{W}}_t, \{\alpha_{0,l}\}_{l=1}^L) = \prod_{l=1}^L N(\tilde{\mathbf{y}}_{t,l} | \mathbf{U}_l \tilde{\mathbf{w}}_{t,l}, \alpha_{0,l}^{-1} \mathbf{I}_{M(2d+2)}) \quad (5)$$

定义滑窗超参数 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t \triangleq [\boldsymbol{\alpha}_{t-2d-1}^T, \boldsymbol{\alpha}_{t-2d}^T, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{t+1}^T]^T$, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t \triangleq [\boldsymbol{\alpha}_{t-2d-1}^T, \boldsymbol{\alpha}_{t-2d}^T, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{t-d-1}^T]^T$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t \triangleq [\boldsymbol{\alpha}_{t-d}^T, \boldsymbol{\alpha}_{t-d+1}^T, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{t+1}^T]^T$, 以及它们各自对角形式的矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_t = \text{diag}\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t\}$, $\tilde{\mathbf{A}}_t = \text{diag}\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t\}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}_t = \text{diag}\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t\}$, 结合式(1)–式(5)式可以计算出系数 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}(\forall l)$ 的后验分布 $p(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{y}}_{t,l}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t, \alpha_{0,l})$ 是一个均值 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 和方差 $\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 分别如式(6)和式(7)所示的高斯分布, $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 是 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 的估计结果, $\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 的对角线元素则度量了估计的不确定性, 从式(6)–式(7)可见通过本文的概率建模, 噪声精度 $\alpha_{0,l}$ 被以因子的形式从方差 $\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 中分解出来, 并且不参与对均值 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 的计算。将 $\alpha_{0,l}$ 从 $p(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{y}}_{t,l}, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_t, \alpha_{0,l})$ 中边缘积分, 获得 t 分布形式的 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 的边缘后验分布, 其均值 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 与式(6)相同, 形状矩阵 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 恰是在式(7)方差 $\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 基础上将因子 $\alpha_{0,l}^{-1}$ 去掉, 如式(8)。这相对文献[20]是一个突破, 因为省略了对噪声精度的估计, 而在文献[10]中, 噪声精度是无法在线估计的, 必须假设提前已知, 使其在噪声强度未知条件下的适用性大受局限。

$$\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}} = (\mathbf{U}_l^T \mathbf{U}_l + \tilde{\mathbf{A}}_t)^{-1} \mathbf{U}_l^T \tilde{\mathbf{y}}_{t,l} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}} = \alpha_{0,l}^{-1} (\mathbf{U}_l^T \mathbf{U}_l + \tilde{\mathbf{A}}_t)^{-1} \quad (7)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}} = (\mathbf{U}_l^T \mathbf{U}_l + \tilde{\mathbf{A}}_t)^{-1} \quad (8)$$

将观测方程改写为式(9), $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 维持先前的估计结果不变, 只利用当前滑窗的观测信号 $\tilde{\mathbf{Y}}_t$ 对 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 进行重构。令 $\tilde{\mathbf{y}}_{t,l} = \tilde{\mathbf{y}}_{t,l} - \tilde{\mathbf{U}}_l \tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$, 并从式(2)中截取 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 的先验分布, 便可与式(6)–式(8)相似地, 获得 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 的后验估计量 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$, 分别为式(11)–式(13)。那么问题就简化为基于式(10)的等效观测方程重构 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$, 本文利用 Tipping 的 FMLM (Fast Marginal Likelihood Maximization)^[6] 算法框架完成这个任务, 相应的算法即引言中提到的 SMT-SBL 算法。

$$\tilde{\mathbf{y}}_{t,l} = \tilde{\mathbf{U}}_l \tilde{\mathbf{w}}_{t,l} + \tilde{\mathbf{U}}_l \tilde{\mathbf{w}}_{t,l} + \tilde{\mathbf{e}}_{t,l}, l = 1, 2, \dots, L \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{t,l} = \tilde{\mathbf{U}}_l \tilde{\mathbf{w}}_{t,l} + \tilde{\mathbf{e}}_{t,l}, l = 1, 2, \dots, L \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}} = (\tilde{\mathbf{U}}_l^T \tilde{\mathbf{U}}_l + \tilde{\mathbf{A}}_t)^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_l^T \tilde{\mathbf{y}}_{t,l} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}} = \alpha_{0,l}^{-1} (\tilde{\mathbf{U}}_l^T \tilde{\mathbf{U}}_l + \tilde{\mathbf{A}}_t)^{-1} \quad (12)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{t,l}^{\tilde{\mathbf{w}}} = (\tilde{\mathbf{U}}_l^T \tilde{\mathbf{U}}_l + \tilde{\mathbf{A}}_t)^{-1} \quad (13)$$

3 算法鲁棒性的提升策略

事实上, $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 的重构误差会对 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 产生误差累积, 本文在 SMT-SBL 算法的基础上进一步改进, 将反映 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 的重构不确定性的两个统计量, 条件均值 $E(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t,l})$ 和条件方差 $V(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t,l})$, 引入当前滑窗。由于当前滑窗的 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 尚未重构, 这两个统计量都无法直接计算。然而, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{t-1}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{t-1}$ 已分别在之前时刻获得估计, 由 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{t-1} = [\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{t-1}^T, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{t-1}^T]^T$ 和式(6)–式(8)可以计算 $\tilde{\mathbf{w}}_{t-1,l}$ 的后验分布, 定义 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} \triangleq [\mathbf{w}_{t-d,l}^T, \mathbf{w}_{t-d+1,l}^T, \dots, \mathbf{w}_{t,l}^T]^T$ 和 $\mathbf{w}'_{t,l} \triangleq [\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}^T, \tilde{\mathbf{w}}_{t,l}^T]^T$, 则 $\mathbf{w}'_{t,l}$ 是 $\tilde{\mathbf{w}}_{t-1,l}$ 的子向量, 其高斯后验分布的均值 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\mathbf{w}'}$ 和方差 $\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\mathbf{w}'}$ 分别是 $\boldsymbol{\mu}_{t-1,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 去掉前 N 个元素后的子向量和 $\boldsymbol{\Sigma}_{t-1,l}^{\tilde{\mathbf{w}}}$ 右下角的 $N(2d+2)$ 阶子矩阵。将 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\mathbf{w}'}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\mathbf{w}'}$ 按照 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 和 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 的长度, 分块处理成式(14)所示的向量和矩阵形式, 其中, $\boldsymbol{\mu}_{a,l}^t \in \mathbb{R}^{N(d+1)}$ 和 $\boldsymbol{\mu}_{b,l}^t \in \mathbb{R}^{N(d+2)}$ 是 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\mathbf{w}'}$ 的分块向量, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{aa,l}^t \in \mathbb{R}^{N(d+1) \times N(d+1)}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{bb,l}^t \in \mathbb{R}^{N(d+2) \times N(d+2)}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ab,l}^t \in \mathbb{R}^{N(d+1) \times N(d+2)}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ba,l}^t \in \mathbb{R}^{N(d+2) \times N(d+1)}$ 是 $\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\mathbf{w}'}$ 约去 $\alpha_{0,l}^{-1}$ 后的子矩阵。从式(14)可得 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 关于 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 的高斯条件分布, 均值 $E(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t,l})$ 和方差 $V(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t,l})$ 分别为式(15)和式(16)所示。本文用式(17)近似 $E(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t,l})$ 和 $V(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t,l})$, 与文献[20]将 $E(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t,l})$ 和 $V(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t,l})$ 分别近似为 $E(\tilde{\mathbf{w}}_{t-1,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t-1,l})$ 和 $V(\tilde{\mathbf{w}}_{t-1,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t-1,l})$ 的策略相比这更合理。由式(14)可以从式(9)观测方程推导出 $\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}$ 关于 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 的高斯似然分布, 如式(18)所示, 其中均值 $\boldsymbol{\eta}_{t,l}$ 和方差 $\boldsymbol{\Omega}_{t,l}$ 分别为式(19)和式(20)所示,

$$\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\mathbf{w}'} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{a,l}^t \\ \boldsymbol{\mu}_{b,l}^t \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\mathbf{w}'} = \alpha_{0,l}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{aa,l}^t & \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ab,l}^t \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ba,l}^t & \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{bb,l}^t \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$E(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} | \tilde{\mathbf{w}}_{t,l}) = \boldsymbol{\mu}_{a,l}^t + \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{ab,l}^t (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{bb,l}^t)^{\dagger} (\tilde{\mathbf{w}}_{t,l} - \boldsymbol{\mu}_{b,l}^t) \quad (15)$$

$$V\left(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}|\hat{\mathbf{w}}_{t,l}\right)=\alpha_{0,l}^{-1}\left(\hat{\Sigma}_{aa,l}^t-\hat{\Sigma}_{ab,l}^t\left(\hat{\Sigma}_{bb,l}^t\right)^\dagger\hat{\Sigma}_{ab,l}^t\right) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} E\left(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}|\hat{\mathbf{w}}_{t,l}\right) &\approx E\left(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}|\hat{\mathbf{w}}_{t,l}\right), V\left(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}|\hat{\mathbf{w}}_{t,l}\right) \\ &\approx V\left(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}|\hat{\mathbf{w}}_{t,l}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

$$p\left(\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}|\hat{\mathbf{w}}_{t,l},\alpha_{0,l}\right)=N\left(\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}|\boldsymbol{\eta}_{t,l},\boldsymbol{\Omega}_{t,l}\right) \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{t,l}=\boldsymbol{\Psi}_l\hat{\mathbf{w}}_{t,l}+\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{t,l} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{t,l}=\alpha_{0,l}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,l} \quad (20)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{t,l}=\tilde{\mathbf{U}}_l\left[\boldsymbol{\mu}_{a,l}^t-\hat{\Sigma}_{ab,l}^t\left(\hat{\Sigma}_{bb,l}^t\right)^\dagger\boldsymbol{\mu}_{b,l}^t\right] \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_l=\bar{\mathbf{F}}_{t,l}+\tilde{\mathbf{U}}_l \quad (22)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,l}=\mathbf{I}+\tilde{\mathbf{U}}_l\left[\hat{\Sigma}_{aa,l}^t-\hat{\Sigma}_{ab,l}^t\left(\hat{\Sigma}_{bb,l}^t\right)^\dagger\hat{\Sigma}_{ba,l}^t\right]\tilde{\mathbf{U}}_l^T \quad (23)$$

其中, $\bar{\mathbf{F}}_{t,l}=[\tilde{\mathbf{U}}_l\hat{\Sigma}_{ab,l}^t\left(\hat{\Sigma}_{bb,l}^t\right)^\dagger,\mathbf{O}_{M(2d+2)\times N}]$, \dagger 表示伪逆运算, 令 $\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}=\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}-\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{t,l}$, 可得高斯后验 $p\left(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}|\tilde{\mathbf{y}}_{t,l},\alpha_{0,l},\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t\right)$ 和t分布后验 $p\left(\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}|\tilde{\mathbf{y}}_{t,l},\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t\right)$, 相应的高斯均值 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\bar{w}}$ 、方差 $\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\bar{w}}$ 以及t分布形状矩阵 $\hat{\Sigma}_{t,l}^{\bar{w}}$ 分别为式(24)–式(26)所示, 噪声精度 $\alpha_{0,l}$ 的估计同样被从 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 的重构中解耦并省略。问题即转化为利用等效观测方程式(27)重构 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$, 其中噪声 $\tilde{\mathbf{e}}'_{t,l}$ 具有式(28)的先验。与SMT-SBL算法相似, 仍然沿用FMLM算法框架执行重构任务, 相应的算法即引言中提到的SMT-RSBL算法。

$$\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\bar{w}}=\hat{\Sigma}_{t,l}^{\bar{w}}\boldsymbol{\Psi}_l^T\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,l}^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{t,l} \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{t,l}^{\bar{w}}=\alpha_{0,l}^{-1}\left(\boldsymbol{\Psi}_l^T\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,l}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_l+\bar{\mathbf{A}}_t\right)^{-1} \quad (25)$$

$$\hat{\Sigma}_{t,l}^{\bar{w}}=\left(\boldsymbol{\Psi}_l^T\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,l}^{-1}\boldsymbol{\Psi}_l+\bar{\mathbf{A}}_t\right)^{-1} \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}=\boldsymbol{\Psi}_l\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}+\tilde{\mathbf{e}}'_{t,l}, l=1,2,\dots,L \quad (27)$$

$$p\left(\tilde{\mathbf{e}}'_{t,l}\right)=N\left(\tilde{\mathbf{e}}'_{t,l}|\mathbf{0},\alpha_{0,l}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,l}\right) \quad (28)$$

4 算法总结及其运算量、收敛性分析

SMT-SBL和SMT-RSBL算法都是以对数边缘似然函数 $L\left(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t\right)=\ln p\left(\tilde{\mathbf{Y}}_t|\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t\right)$ 作为目标函数, 并在寻求 $L\left(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t\right)$ 最大化的过程中实现对超参数 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t$ 的估计。将 $\boldsymbol{\Psi}_l$ 和 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t$ 分别记作 $\boldsymbol{\Psi}_l=[\psi_{1,l},\psi_{2,l},\dots,\psi_{N(d+2),l}]$ 和 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{N(d+2)}]$ 。具体的目标函数, 涉及到的中间变量以及每个超参数 α_j 的更新公式列在表1中, 表2给出了涉及到的目标函数、中间变量以及后验统计量 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\bar{w}}$ 和 $\hat{\Sigma}_{t,l}^{\bar{w}}$ 的快速更新公式。算法1和算法2分别是SMT-SBL和SMT-RSBL算法的具体步骤。

表1 目标函数、中间变量及超参数估计公式列表

目标函数及其分解形式(其中 $\tilde{a}_l=2a_l+M(2d+2)$):	
$L\left(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t\right)=-\sum_{l=1}^L\left\{\tilde{a}_l\ln\left(\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}^T\bar{\mathbf{C}}_l^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}+2b_l\right)+\ln\left \bar{\mathbf{C}}_l\right \right\}/2$	(29)
$L\left(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t\right)=-\sum_{l=1}^L\left\{\tilde{a}_l\ln\left(1-\frac{q_{j,l}^2/g_{j,l}}{\alpha_j+s_{j,l}}\right)+\ln\left(1-\alpha_j^{-1}s_{j,l}\right)\right\}/2$	(30)
中间变量:	
$\bar{\mathbf{C}}_l=\mathbf{I}+\boldsymbol{\Psi}_l\bar{\mathbf{A}}_l^{-1}\boldsymbol{\Psi}_l^T, \bar{\mathbf{C}}_{-j,l}=\mathbf{I}+\sum_{k\neq j}\alpha_k^{-1}\psi_{k,l}\psi_{k,l}^T$ (SMT-SBL)	(31)
$\bar{\mathbf{C}}_l=\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,l}+\boldsymbol{\Psi}_l\bar{\mathbf{A}}_l^{-1}\boldsymbol{\Psi}_l^T, \bar{\mathbf{C}}_{-j,l}=\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{t,l}+\sum_{k\neq j}\alpha_k^{-1}\psi_{k,l}\psi_{k,l}^T$ (SMT-RSBL)	(32)
$s_{j,l}=\psi_{j,l}^T\bar{\mathbf{C}}_{-j,l}^{-1}\psi_{j,l}, q_{j,l}=\psi_{j,l}^T\bar{\mathbf{C}}_{-j,l}^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}, g_{j,l}=\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}^T\bar{\mathbf{C}}_{-j,l}^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}+2b_l$	(33)
$S_{j,l}=\psi_{j,l}^T\bar{\mathbf{C}}_l^{-1}\psi_{j,l}, Q_{j,l}=\psi_{j,l}^T\bar{\mathbf{C}}_l^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}, G_l=\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}^T\bar{\mathbf{C}}_l^{-1}\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}+2b_l$	(34)
α_j 更新公式:	
$\alpha_j=\begin{cases} L/\theta_j, & \theta_j > 0 \\ \infty, & \text{其他} \end{cases}$	(35)
$\theta_j=\sum_{l=1}^L\frac{\tilde{a}_l(q_{j,l}^2/g_{j,l})-s_{j,l}}{s_{j,l}(s_{j,l}-q_{j,l}^2/g_{j,l})}$	(36)

SMT-SBL和SMT-RSBL算法分别是基于式(10)和式(27)的观测方程, 在FMLM算法框架下完成对超参数 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t$ 的估计, 进而实现信号重构, 因此这两个算法的收敛性是由FMLM算法保证的, FMLM有成熟的理论研究基础^[6], 它通过在模型中添加、删除原子的贪婪优化策略, 以最少的迭代步数实现目标函数的最大化。

SMT-SBL算法步骤如下:

步骤1 输入 $\tilde{\mathbf{Y}}_t, \mathbf{U}_l=[\tilde{\mathbf{U}}_l, \tilde{\mathbf{U}}_l](\forall l), \tilde{\mathbf{W}}_t$ 和收敛阈值 ε ;

步骤2 计算 $\bar{\mathbf{Y}}_t=[\bar{\mathbf{y}}_{t,1},\bar{\mathbf{y}}_{t,2},\dots,\bar{\mathbf{y}}_{t,L}], \bar{\mathbf{y}}_{t,l}=\tilde{\mathbf{y}}_{t,l}-\mathbf{U}_l\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$;

步骤3 将 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_t$ 中的 $\alpha_{t-d}, \alpha_{t-d+1}, \dots, \alpha_t$ 初始化为 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{t-1}$ 中的相应值;

步骤4 按照式(11)和式(13)计算 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\bar{w}}$ 和 $\hat{\Sigma}_{t,l}^{\bar{w}}(\forall l)$;

步骤5 按照表1计算 $\theta_j, s_{j,l}, q_{j,l}, g_{j,l}, S_{j,l}, Q_{j,l}, G_l(\forall j, l)$;

步骤6 根据表2计算所有 $\psi_{j,l}$ 对应的 ΔL , 若始终满足 $\Delta L < \varepsilon$, 跳转到步骤12, 否则跳转到步骤7;

步骤7 选择执行添加、删除或维持操作后能获得最大 ΔL 值的原子 $\psi_{j,l}(\forall l)$ 对应的 α_j 作为优化对象;

步骤8 若 $\theta_j > 0$ 且 $\alpha_j = \infty$, 添加 $\psi_{j,l}(\forall l)$, 更新 $\alpha_j = L/\theta_j$, 并根据表2更新 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\bar{w}}, \hat{\Sigma}_{t,l}^{\bar{w}}, S_{k,l}, Q_{k,l}, G_l(\forall k, l)$;

步骤9 若 $\theta_j \leq 0$ 且 $\alpha_j < \infty$, 删除 $\psi_{j,l}(\forall l)$, 更新 $\alpha_j = \infty$, 并根据表2更新 $\boldsymbol{\mu}_{t,l}^{\bar{w}}, \hat{\Sigma}_{t,l}^{\bar{w}}, S_{k,l}, Q_{k,l}, G_l(\forall k, l)$;

步骤10 若 $\theta_j > 0$ 且 $\alpha_j < \infty$, 保留 $\psi_{j,l}(\forall l)$,

表2 相关的快速更新公式列表

添加原子 $\psi_{j,l}$	删除原子 $\psi_{j,l}$	维持原子 $\psi_{j,l}$	说明
SMT – SBL : $\tilde{\Sigma}_{t,l}^w = [\hat{\Sigma}_{t,l}^w + \hat{\Sigma}_{jj,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \psi_{j,l} \psi_{j,l}^T \Psi_l \hat{\Sigma}_{t,l}^w - \hat{\Sigma}_{jj,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \psi_{j,l}; -\hat{\Sigma}_{jj,l} \psi_{j,l}^T \Psi_l \hat{\Sigma}_{t,l}^w, \hat{\Sigma}_{jj,l}]$ $\tilde{\mu}_{t,l}^w = [\mu_{t,l}^w + \mu_{j,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \psi_{j,l}; \mu_{j,l}]$ $e_{j,l} = \psi_{j,l} - \Psi_l \hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \psi_{j,l}$	SMT – SBL : $\tilde{S}_{k,l} = S_{k,l} + (\hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \psi_{k,l})^2 / \hat{\Sigma}_{jj,l}$ $\tilde{Q}_{k,l} = Q_{k,l} + \mu_{j,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \psi_{k,l} / \hat{\Sigma}_{jj,l}$ $\tilde{G}_l = G_l + (\hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \mathbf{y}_{t,l})^2 / \hat{\Sigma}_{jj,l}$	SMT – SBL : $\tilde{S}_{k,l} = S_{k,l} + \gamma_{j,l} (\hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \psi_{k,l})^2$ $\tilde{Q}_{k,l} = Q_{k,l} + \gamma_{j,l} \mu_{j,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \psi_{k,l}$ $\tilde{G}_l = G_l + \gamma_{j,l} (\hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \mathbf{y}_{t,l})^2$	添加情形中: $\hat{\Sigma}_{jj,l} = (\hat{\alpha}_j + S_{j,l})^{-1}$ $\mu_{j,l} = \hat{\Sigma}_{jj,l} Q_{j,l}$
SMT – RSBL : $\tilde{\Sigma}_{t,l}^w = [\hat{\Sigma}_{t,l}^w + \hat{\Sigma}_{jj,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \psi_{j,l} \psi_{j,l}^T \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \Psi_l \hat{\Sigma}_{t,l}^w - \hat{\Sigma}_{jj,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \psi_{j,l}; -\hat{\Sigma}_{jj,l} \psi_{j,l}^T \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \Psi_l \hat{\Sigma}_{t,l}^w, \hat{\Sigma}_{jj,l}]$ $\tilde{\mu}_{t,l}^w = [\mu_{t,l}^w + \mu_{j,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \psi_{j,l}; \mu_{j,l}]$ $e_{j,l} = (\hat{\Omega}_{t,l}^{-1} - \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \Psi_l \hat{\Sigma}_{t,l}^w \Psi_l^T \hat{\Omega}_{t,l}^{-1}) \psi_{j,l}$	SMT – RSBL : $\tilde{S}_{k,l} = S_{k,l} + (\hat{\Sigma}_{t,l}^w \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \psi_{k,l})^2 / \hat{\Sigma}_{jj,l}$ $\tilde{Q}_{k,l} = Q_{k,l} + \mu_{j,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \psi_{k,l} / \hat{\Sigma}_{jj,l}$ $\tilde{G}_l = G_l + (\hat{\Sigma}_{t,l}^w \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \mathbf{y}_{t,l})^2 / \hat{\Sigma}_{jj,l}$	SMT – RSBL : $\tilde{S}_{k,l} = S_{k,l} + \gamma_{j,l} (\hat{\Sigma}_{t,l}^w \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \psi_{k,l})^2$ $\tilde{Q}_{k,l} = Q_{k,l} + \gamma_{j,l} \mu_{j,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \psi_{k,l}$ $\tilde{G}_l = G_l + \gamma_{j,l} (\hat{\Sigma}_{t,l}^w \hat{\Omega}_{t,l}^{-1} \mathbf{y}_{t,l})^2$	删除情形中: $\hat{\Sigma}_{jj,l}$ 是 $\hat{\Sigma}_{t,l}^w$ 的第 j 个对角元 $\hat{\Sigma}_{j,l}$ 是 $\hat{\Sigma}_{t,l}^w$ 的第 j 列, $\mu_{j,l}$ 是 $\mu_{t,l}^w$ 的第 j 个元素。 维持情形中:
通用公式: $\tilde{S}_{k,l} = S_{k,l} - \hat{\Sigma}_{jj,l} (\psi_{k,l}^T e_{j,l})^2$ $\tilde{Q}_{k,l} = Q_{k,l} - \mu_{j,l} \psi_{k,l}^T e_{j,l}$ $\tilde{G}_l = G_l - \hat{\Sigma}_{jj,l} (\mathbf{y}_{t,l}^T e_{j,l})^2$ $2\Delta L = \sum_{l=1}^L \ln [\hat{\alpha}_j / (\hat{\alpha}_j + s_{j,l})]$ $- \sum_{l=1}^L \tilde{a}_l \ln [1 - (q_{j,l}^2 / g_{j,l}) / (\hat{\alpha}_j + s_{j,l})]$	通用公式: $2\Delta L = - \sum_{l=1}^L \ln (1 - S_{j,l} / \alpha_j)$ $- \sum_{l=1}^L \tilde{a}_l \ln [1 + \frac{Q_{j,l}^2 / G_l}{\alpha_j - S_{j,l}}]$ $\tilde{\Sigma}_{t,l}^w = \hat{\Sigma}_{t,l}^w - \hat{\Sigma}_{j,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w / \hat{\Sigma}_{jj,l}$ $\tilde{\mu}_{t,l}^w = \mu_{t,l}^w - \mu_{j,l} \hat{\Sigma}_{j,l} / \hat{\Sigma}_{jj,l}$	通用公式: $2\Delta L = \sum_{l=1}^L (\tilde{a}_l - 1) \ln (1 + \frac{\alpha_j - \tilde{\alpha}_j}{\alpha_j \tilde{\alpha}_j})$ $+ \sum_{l=1}^L \tilde{a}_l \ln \left[\frac{(\alpha_j + s_{j,l}) g_{j,l} - q_{j,l}^2}{(\tilde{\alpha}_j + s_{j,l}) g_{j,l} - q_{j,l}^2} \frac{\tilde{\alpha}_j}{\alpha_j} \right]$ $\tilde{\Sigma}_{t,l}^w = \hat{\Sigma}_{t,l}^w - \gamma_{j,l} \hat{\Sigma}_{j,l} \hat{\Sigma}_{t,l}^w$ $\tilde{\mu}_{t,l}^w = \mu_{t,l}^w - \gamma_{j,l} \mu_{j,l} \hat{\Sigma}_{j,l}$	$\hat{\Sigma}_{jj,l}$, $\hat{\Sigma}_{j,l}$, $\mu_{j,l}$ 与前述相同, $\gamma_{j,l} = [\hat{\Sigma}_{jj,l} + (\hat{\alpha}_j - \alpha_j)^{-1}]^{-1}$

更新 $\alpha_j = L/\theta_j$, 并根据表2更新 $\mu_{t,l}^w$, $\hat{\Sigma}_{t,l}^w$, $S_{k,l}$, $Q_{k,l}$, G_l ($\forall k, l$);

步骤 11 跳转到步骤5;

步骤 12 停止, 存储 α_t , 由式(11)和式(13)计算 $\mu_{t,l}^w$, $\hat{\Sigma}_{t,l}^w$ ($\forall l$) 并输出。

SMT-RSBL算法步骤如下:

步骤 1 输入 $\tilde{\mathbf{Y}}_t$, $\mathbf{U}_l = [\tilde{\mathbf{U}}_l, \tilde{\mathbf{U}}_l]$, $\mu_{t,l}^w$, $\hat{\Sigma}_{t,l}^w$ ($\forall l$) 和 ε ;

步骤 2 按照(14)式和式(21)–式(23)计算 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{t,l}$, Ψ_l , $\hat{\Omega}_{t,l}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}_{t,l} = \hat{\mathbf{y}}_{t,l} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{t,l}$ ($\forall l$);

步骤 3 将 $\hat{\alpha}_t$ 中的 α_{t-d} , α_{t-d+1} , \dots , α_t 初始化为 $\hat{\alpha}_{t-1}$ 中的相应值;

步骤 4 按照式(24)和式(26)计算 $\mu_{t,l}^w$ 和 $\hat{\Sigma}_{t,l}^w$ ($\forall l$);

步骤 5 按照表1计算 θ_j , $s_{j,l}$, $q_{j,l}$, $g_{j,l}$, $S_{j,l}$, $Q_{j,l}$, G_l ($\forall j, l$);

步骤 6 根据表2计算所有 $\psi_{j,l}$ 对应的 ΔL , 若始终满足 $\Delta L < \varepsilon$, 跳转到步骤12, 否则跳转到步骤7;

步骤 7 选择执行添加、删除或维持操作后能获得最大 ΔL 值的原子 $\psi_{j,l}$ ($\forall l$) 对应的 α_j 作为优化对象;

步骤 8 若 $\theta_j > 0$ 且 $\alpha_j = \infty$, 添加 $\psi_{j,l}$ ($\forall l$), 更新 $\alpha_j = L/\theta_j$, 并根据表2更新 $\mu_{t,l}^w$, $\hat{\Sigma}_{t,l}^w$, $S_{k,l}$, $Q_{k,l}$, G_l ($\forall k, l$);

步骤 9 若 $\theta_j \leq 0$ 且 $\alpha_j < \infty$, 删除 $\psi_{j,l}$ ($\forall l$), 更新 $\alpha_j = \infty$, 并根据表2更新 $\mu_{t,l}^w$, $\hat{\Sigma}_{t,l}^w$, $S_{k,l}$, $Q_{k,l}$, G_l ($\forall k, l$);

步骤 10 若 $\theta_j > 0$ 且 $\alpha_j < \infty$, 保留 $\psi_{j,l}$ ($\forall l$), 更新 $\alpha_j = L/\theta_j$, 并根据表2更新 $\mu_{t,l}^w$, $\hat{\Sigma}_{t,l}^w$, $S_{k,l}$, $Q_{k,l}$, G_l ($\forall k, l$);

步骤 11 跳转到步骤5;

步骤 12 停止, 存储 $\hat{\alpha}_t$, 由式(24)和式(26)计算 $\mu_{t,l}^w$, $\hat{\Sigma}_{t,l}^w$ ($\forall l$) 并输出。

由于目标函数本质上是对数函数, 所以对数函数的非凹性可以保证目标函数具有全局最大值。尽管FMLM机制收敛到的只是局部最大值估计, 但其贪婪迭代策略保证了该估计同时也是最稀疏估计, 根据SBL框架下全局最优解也是最稀疏解的特性^[20], FMLM机制获得的是一个很接近全局最优解的局部最优解, 这保证了本文两算法重构结果质量的可靠性。

算法运算量用乘加运算数目衡量, 两个算法都是从步骤5开始进入FMLM迭代阶段, 步骤5之前的各步骤可视作两算法的初始化阶段。SMT-RSBL算法每次迭代的运算量为 $O(d^2MNL + dMS_bL + S_b^2L + d^2S_bM^2L + dNL)$, 其中 S_b 是模型中每个任务已添加的原子数目, SMT-SBL算法的每次迭代由于不涉及 $\hat{\Omega}_{t,l}^{-1}$, 所以运算量减少为 $O(d^2MNL + dMS_bL + S_b^2L + dNL)$ 。在初始化阶段, SMT-RSBL算法的运算量为 $O(S_a^2L + dMS_a^2L + d^2S_aM^2L + d^2S_bM^2L + d^2S_aMNL)$, 其中 S_a 是每个 $\mu_{a,l}^t$ 内非零元素的数目, SMT-SBL的初始化运算量则为 $O(S_c^2MdL + S_cL + S_c^3L + S_cMdL)$, 其中 S_c 是每个 $\tilde{\mathbf{w}}_{t,l}$ 内非零元素的数目。对运算量起主要作用的是迭代阶段, 具体的收敛速度与信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)、观测数目 M 以及任务数目 L 有关, 下面将结合工程实测数据开展实验, 具体验证两种算法的实际性能。

5 实验结果与分析

实验数据采用黄海崂山海域蒸发波导高度

(Evaporation Duct Height, EDH)的历史预测数据, 该预测数据是基于国家气象局布设的气象浮标长期观测的海上气象数据, 通过国际上认可度较高的Babin预测模型^[22]计算获得。数据时间分辨率为1 h, 地理坐标为36.1667°N, 121.165°E, 时间范围是2017年6月17日00时至2017年8月15日23时。出于缩短观测时间延迟的考虑, 并依据LOT变化理论文献的建议, 信号长度取为 $N = 16$, 任务数目 L 设为3, 观测数目 M 和观测SNR均是自变量。任务 l 的滑动观测矩阵 $U_l \in \mathbb{R}^{M(2d+2) \times N(2d+3)}$ 的生成方式与文献^[20]相同。除本文所提两种算法外, 将目前多观测向量模型压缩感知算法中最具有代表性的TMSBL和MT-CS算法作为对比算法。采用重构信号的信误比(Signal-to-Error Ratio, SER)、成功率(Success Rate, SR)和运行时间对重构性能进行评估, 信误比越高表明重构精度越高, 成功率则定义为信号中重构信误比高于30 dB的元素数目占全部元素数目的比例。实验结果均为100次独立实验取平均获得。

图2所示是4种算法的SER随观测数目变化的比较结果, 其中设定了SNR=15 dB和SNR=35 dB两组附加变量条件。从图中可见, 4种算法的SER均随观测数目的增加而增加, 并且信噪比的增加会提高SMT-RSBL, SMT-SBL和MT-CS算法的SER, 对TMSBL算法则不产生显著的作用。4种算法按照SER整体表现从高到低排序依次是SMT-RSBL, SMT-SBL, MT-CS和TMSBL算法。

图3所示是4种算法的SER随SNR变化的比较结果, 其中设定了 $M = 4$ 和 $M = 6$ 两组附加变量条件。从图中可见, 除TMSBL算法外, 其他3种算法的SER总体上都随信噪比的增加而增加, 并且增加

的幅度随观测数目的增加而增大。4种算法按照SER整体表现从高到低排序情况与图2相同。综合图2和图3的实验结果分析, 由于SMT-RSBL算法采取了抑制重构误差积累的措施, 所以获得了比SMT-SBL算法更好的鲁棒性, 在不同的实验条件下表现出更高的重构精度, SMT-SBL算法通过LOT变化消除信号分块过程中的块效应, 因而表现出比MT-CS和TMSBL算法更高的重构精度。

图4所示是4种算法的SR随观测数目变化的比较结果, 其中设定了SNR=15 dB和SNR=35 dB两组附加变量条件。从图中可见4种算法的成功率都随观测数目的增加而增加, 且信噪比的增加有助于进一步提高各种算法的成功率。随着观测数目的增加, SMT-SBL和SMT-RSBL算法的成功率逐渐接近, 并获得超过MT-CS算法约0.2的成功率优势。4种算法按照成功率从高到低排序与图2相同。

图5所示是4种算法的SR随SNR变化的比较结果

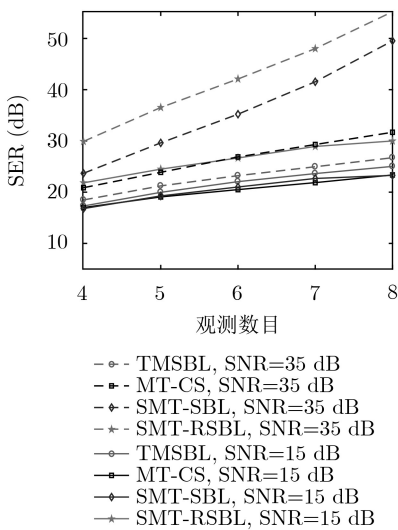


图2 不同算法的SER随观测数目变化的比较结果

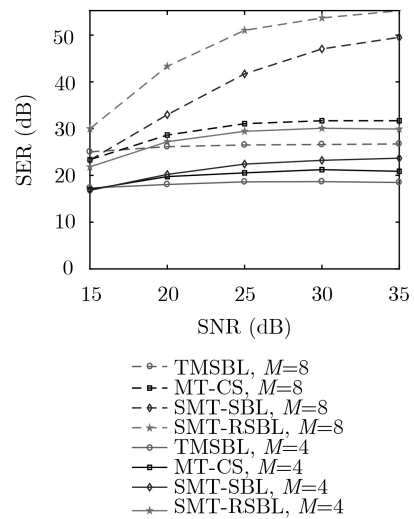


图3 不同算法的SER随信噪比变化的比较结果

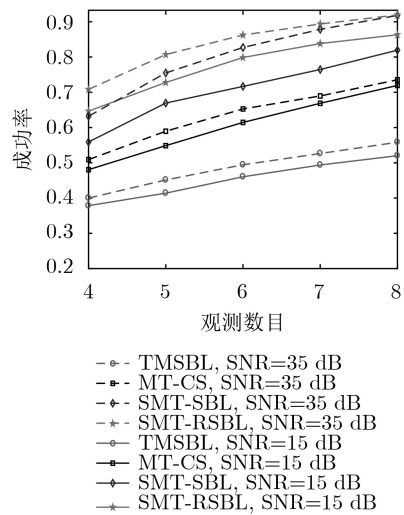


图4 不同算法的SR随观测数目变化的比较结果

果, 其中设定了 $M=4$ 和 $M=8$ 两组附加变量条件。从中可见, MT-CS和TMSBL算法成功率受信噪比的影响很小, 而SMT-RSBL和SMT-SBL算法的成功率则随信噪比的增加而表现出增加的趋势, 尽管当信噪比超过25 dB后这种趋势也不再明显, 但依然表现出明显高于MT-CS和TMSBL算法的成功率。4种算法按照成功率从高到低的排序不变。

图6所示是4种算法的运行时间随观测数目变化的比较结果, 其中设定了SNR=15 dB和SNR=35 dB两组附加变量条件。从图中可见, 4种算法的运行时间都随观测数目的增加而增加, 但增加的速度会随着信噪比的增加而减小, 同时运行时间也会得到缩短, 任务数目的增加则会增加各种算法的运行时间。4种算法按照运行时间从短到长排序依次是SMT-RSBL, SMT-SBL, MT-CS和TMSBL算法。

图7是4种算法的运行时间随SNR变化的比较结果, 其中设定了 $M=4$ 和 $M=8$ 两组附加变量条件。

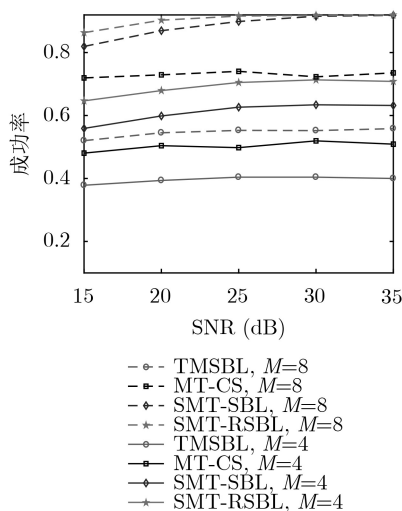


图5 不同算法的SR随SNR变化的比较结果

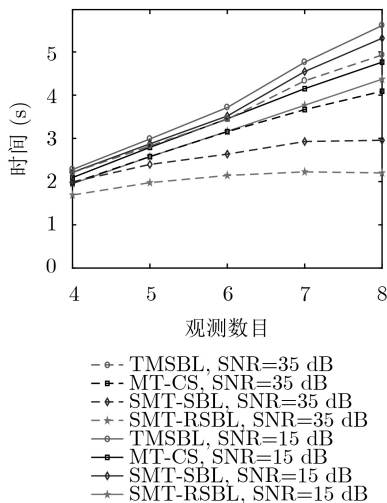


图6 不同算法的运行时间随观测数目变化的比较结果

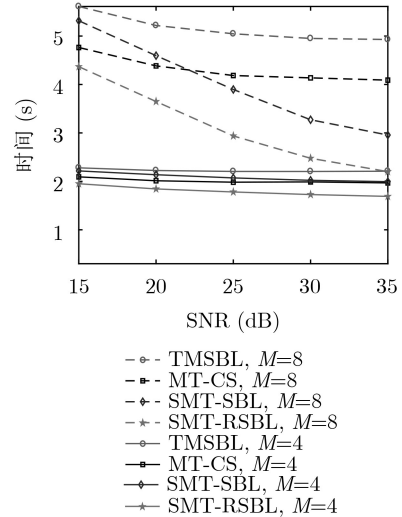


图7 不同算法的运行时间随SNR变化的比较结果

从图中可见, 4种算法的运行时间总体上表现出随信噪比增加而缩短的趋势, 该趋势会随着观测数目的增加而增强, SMT-RSBL和SMT-SBL算法对此表现得最为明显。尽管4种算法的运行时间都会随观测数目的增加而增加, 但SMT-RSBL始终是运行时间最短的, 其次便是SMT-SBL算法。

6 结束语

为了解决多任务观测条件下时域流信号的在线重构面临的人为块效应, 本文将基于LOT变化的时域滑窗观测系统推广到多任务情形, 通过贝叶斯概率建模将未知噪声精度的估计从信号重构中解耦并省略, 提出SMT-SBL算法, 并采取近似策略将度量重构不确定性的统计量引入滑窗内的信号重构过程中, 提出了对误差累积抑制效果更好, 鲁棒性更强的SMT-RSBL算法。本文使用海上蒸发波导高度的历史诊断数据进行信号重构实验, 实验结果表明, 与TMSBL和MT-CS算法相比, 本文的两种算法在不同的观测信噪比、观测数目和任务数目条件下, 具有显著更优的重构精度、成功率和运行速度, 其中SMT-RSBL算法凭借其鲁棒性优势表现出更优于SMT-SBL算法的信号重构性能, 该研究成果有助于提高压缩感知在时域流信号多任务观测条件下的应用潜力。

参考文献

- [1] LEINONEN M, CODREANU M, and JUNTTI M. Sequential compressed sensing with progressive signal reconstruction in wireless sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2015, 14(3): 1622–1635. doi: 10.1109/TWC.2014.2371017.
- [2] ASIF M S and ROMBERG J. Sparse recovery of streaming signals using ℓ_1 -homotopy[J]. *IEEE Transactions on Signal*

- Processing*, 2014, 62(16): 4209–4223. doi: [10.1109/TSP.2014.2328981](https://doi.org/10.1109/TSP.2014.2328981).
- [3] 周超杰, 张杰, 杨俊钢, 等. 基于ROMS模式的南海SST与SSH四维变分同化研究[J]. *海洋学报*, 2019, 41(1): 32–40. doi: [10.3969/j.issn.0253-4193.2019.01.005](https://doi.org/10.3969/j.issn.0253-4193.2019.01.005).
ZHOU Chaojie, ZHANG Jie, YANG Jungang, *et al.* 4DVAR assimilation of SST and SSH data in South China Sea based on ROMS[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2019, 41(1): 32–40. doi: [10.3969/j.issn.0253-4193.2019.01.005](https://doi.org/10.3969/j.issn.0253-4193.2019.01.005).
- [4] ZHANG Yonggang, ZHANG Jianxue, JIAO Lin, *et al.* Algorithms of wave reflective critical angle on interface[C]. SPIE 10250, International Conference on Optical and Photonics Engineering, Chengdu, China, 2017: 8–13. doi: [10.1117/12.2266713](https://doi.org/10.1117/12.2266713).
- [5] AO Dongyang, WANG Rui, HU Cheng, *et al.* A sparse SAR imaging method based on multiple measurement vectors model[J]. *Remote Sensing*, 2017, 9(3): 297. doi: [10.3390/rs9030297](https://doi.org/10.3390/rs9030297).
- [6] TIPPING M E and FAUL A. Fast marginal likelihood maximisation for sparse Bayesian models[C]. The 9th International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics, Key West, USA, 2003: 3–6.
- [7] WIPF D P and RAO B D. An empirical bayesian strategy for solving the simultaneous sparse approximation problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3704–3716. doi: [10.1109/tsp.2007.894265](https://doi.org/10.1109/tsp.2007.894265).
- [8] ZHANG Zhilin and RAO B D. Sparse signal recovery in the presence of correlated multiple measurement vectors[C]. 2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Dallas, USA, 2010: 3986–3989. doi: [10.1109/ICASSP.2010.5495780](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2010.5495780).
- [9] ZHANG Zhilin and RAO B D. Iterative reweighted algorithms for sparse signal recovery with temporally correlated source vectors[C]. 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Prague, Czech Republic, 2011: 3932–3935. doi: [10.1109/ICASSP.2011.5947212](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2011.5947212).
- [10] ZHANG Zhilin and RAO B D. Sparse signal recovery with temporally correlated source vectors using sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(5): 912–926. doi: [10.1109/JSTSP.2011.2159773](https://doi.org/10.1109/JSTSP.2011.2159773).
- [11] JI Shihao, DUNSON D, and CARIN L. Multitask compressive sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(1): 92–106. doi: [10.1109/tsp.2008.2005866](https://doi.org/10.1109/tsp.2008.2005866).
- [12] ZHANG Zhilin and RAO B D. Extension of SBL algorithms for the recovery of block sparse signals with intra-block correlation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(8): 2009–2015. doi: [10.1109/TSP.2013.2241055](https://doi.org/10.1109/TSP.2013.2241055).
- [13] BERNAL E A and LI Qun. Tensorial compressive sensing of jointly sparse matrices with applications to color imaging[C]. 2017 IEEE International Conference on Image Processing, Beijing, China, 2018: 2781–2785. doi: [10.1109/ICIP.2017.8296789](https://doi.org/10.1109/ICIP.2017.8296789).
- [14] HAN Ningning and SONG Zhanjie. Bayesian multiple measurement vector problem with spatial structured sparsity patterns[J]. *Digital Signal Processing*, 2018, 75: 184–201. doi: [10.1016/j.dsp.2018.01.015](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2018.01.015).
- [15] QIN Yanhua, LIU Yumin, and YU Zhongyuan. Underdetermined DOA estimation using coprime array via multiple measurement sparse Bayesian learning[J]. *Signal, Image and Video Processing*, 2019, 13(7): 1311–1318. doi: [10.1007/s11760-019-01480-x](https://doi.org/10.1007/s11760-019-01480-x).
- [16] DU Yang, DONG Binhong, ZHU Wuyong, *et al.* Joint channel estimation and multiuser detection for uplink Grant-Free NOMA[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2018, 7(4): 682–685. doi: [10.1109/LWC.2018.2810278](https://doi.org/10.1109/LWC.2018.2810278).
- [17] SHAHIN S, SHAYEGH F, MORTAHEB S, *et al.* Improvement of flexible design matrix in sparse Bayesian learning for multi task fMRI data analysis[C]. The 23rd Iranian Conference on Biomedical Engineering and 20161st International Iranian Conference on Biomedical Engineering, Tehran, Iran, 2017: 3823–3826. doi: [10.1109/ICBME.2016.7890927](https://doi.org/10.1109/ICBME.2016.7890927).
- [18] FENG Weike, GUO Yiduo, ZHANG Yongshun, *et al.* Airborne radar space time adaptive processing based on atomic norm minimization[J]. *Signal Processing*, 2018, 148: 31–40. doi: [10.1016/j.sigpro.2018.02.008](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2018.02.008).
- [19] WU Jingjing, LI Siwei, ZHANG Saiwen, *et al.* Fast analysis method for stochastic optical reconstruction microscopy using multiple measurement vector model sparse Bayesian learning[J]. *Optics Letters*, 2018, 43(16): 3977–3980. doi: [10.1364/OL.43.003977](https://doi.org/10.1364/OL.43.003977).
- [20] WIJEWARDHANA U L and CODREANU M. A Bayesian approach for online recovery of streaming signals from compressive measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(1): 184–199. doi: [10.1109/TSP.2016.2614489](https://doi.org/10.1109/TSP.2016.2614489).
- [21] MALVAR H S and STAELIN D H. The LOT: Transform coding without blocking effects[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(4): 553–559. doi: [10.1109/29.17536](https://doi.org/10.1109/29.17536).
- [22] BABIN S M, YOUNG G S, and CARTON J A. A new model of the oceanic evaporation duct[J]. *Journal of Applied Meteorology*, 1997, 36(3): 193–204. doi: [10.1175/1520-0450\(1997\)036<0193:ANMOTO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1997)036<0193:ANMOTO>2.0.CO;2).
- 董道广: 男, 1990年生, 博士生, 研究方向为贝叶斯统计学习、压缩感知和蒸发波导反演。
芮国胜: 男, 1968年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为混沌通信系统及现代滤波理论。
田文飏: 男, 1987年生, 副教授, 主要研究方向为压缩感知及蒸发波导反演。