

基于大通讯时滞的二阶多智能体系统的一致性分析

晋守博* 魏章志 李耀红

(宿州学院数学与统计学院 宿州 234000)

摘要: 在有向网络拓扑下, 该文研究了2阶大时滞多智能体系统的一致性, 提出具有加权项的时滞状态导数反馈协议, 改进了大通讯时滞导致系统震荡的问题。首先引入具有加权项的时滞状态导数反馈协议, 并给出2阶多智能体系统的闭环形式; 然后采用频域分析法求出2阶多智能体系统渐近实现稳态一致的充要条件, 并证明与传统一致性协议相比, 2阶多智能体系统在具有加权项的时滞状态导数反馈协议下能够容忍更大的通讯时滞; 最后通过数值仿真验证了具有加权项的时滞状态导数反馈协议的优势。

关键词: 多智能体系统; 一致性; 鲁棒性; 通讯时滞

中图分类号: TN915.01; TP13

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)04-1029-06

DOI: 10.11999/JEIT191009

Consensus Analysis of the Second Order Multi-agent Systems Based on Large Communication Delay

JIN Shoubo WEI Zhangzhi LI Yaohong

(School of Mathematics and Statistics, Suzhou University, Suzhou 234000, China)

Abstract: Under the directed network topology, the consensus of the second order multi-agent system with large communication delay is studied, the protocol of delayed-state-derivative feedback with weighting term is proposed, which improves the problem of system oscillation caused by large communication delay. Firstly, the delayed-state-derivative feedback protocol with weighting term is introduced, and the closed-loop form of the second-order multi-agent system is given. Then, the sufficient and necessary conditions for the asymptotic steady-state consensus of the second-order multi-agent system are obtained by using the frequency domain analysis method, and it is proved that the second-order multi-agent system can tolerate the greater communication delay under the delayed-state-derivative feedback protocol with weighting term. Finally, the advantage of the delayed-state-derivative feedback protocol with weighting term is verified by numerical simulation.

Key words: Multi-agent system; Consensus; Robustness; Communication delay

1 引言

多智能体系统广泛应用于生物学、计算机、管理学和工程学等方面, 如鸟群的飞行、蚁群的协同合作、鱼群的巡游和无人机群表演等^[1,2], 这些现象都可以利用多智能体系统构造数学模型解决。本文将研究定向通信拓扑下2阶多智能体系统的一致性与鲁棒性, 该问题的关键点是设计通信协议, 并在该协议下分析随着时间的变化, 所有智能体是否

能够达到相同的状态。自从一致性的定义在文献^[3]中被提出后, 许多学者从不同的方面开始陆续关注该问题。最近, 文献^[4,5]的成果将多智能体系统的一致性问题的研究推向了一个新的阶段, 随后文献^[2]讨论了相关问题的理论框架, 并给出了一致性算法。另外, 蒋国平等^[6]从不同方面介绍了一致性问题的相关研究成果, 并且指出仍然有许多难题需要学者去解决, 关于一致性问题的进一步研究可参考文献^[7,8]。

一般情况下, 多智能体系统常用微分方程组描述系统的变化规律, 既有低阶的情况也有高阶的情况, 往往随着阶数的增高, 系统会变得更加复杂。一阶多智能体系统对应着一组一阶微分方程组, 这种系统结构相对简单, 主要是反映智能体位置的变化规律, 目前已经有很多这方面的研究成果; 2阶

收稿日期: 2019-12-18; 改回日期: 2020-04-27; 网络出版: 2020-07-09

*通信作者: 晋守博 jin_shoubo@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61876073); 安徽省高校自然科学基金重点项目(KJ2019A0666, KJ2019A0672, KJ2018A0452)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61876073), The Key Natural Science Research Projects of Anhui Universities (KJ2019A0666, KJ2019A0672, KJ2018A0452)

多智能体系统虽然结构复杂,但是能够同时描述智能体位置和速度的变化情况,而且2阶系统现实意义更强。针对2阶多智能体系统,文献[9,10]分析了实现一致的充要条件,文献[11]讨论了有限时间一致性问题,文献[12]在随机扰动下研究了系统的一致性。另外,ZHENG等人在文献[13]中讨论了混合阶多智能体系统的一致性。本文将考虑如式(1)2阶多智能体系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = u_i(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x_i(t) \in R$ 与 $v_i(t) \in R$ 为智能体 i 的位置与速度, $u_i(t)$ 为输入变量, LIU 等人在文献[14]中提出了一种具有通讯时滞的输入变量 $u_i(t) = -\gamma v_i(t) + \sum_{j \in N_i} a_{ij} [(v_j(t-\tau) - v_i(t-\tau)) + \gamma(x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau))]$, 其中 a_{ij} 表示邻接矩阵的元素, τ 为通讯时滞, γ 为控制参数, N_i 表示智能体 i 的邻居集。研究表明,对于包含较大通讯时滞的系统,容易发生震荡^[15],因此在不改变时滞的情况下,如何设计一个的一致性协议,使含有较大通讯时滞的多智能体系统保持稳定是一个重要问题。

为了降低时滞对系统式(1)的影响,需要设计新的一致性协议,首先将输入变量中的 $x_i(t-\tau)$ 和 $v_i(t-\tau)$ 替换为 $x_i(t-\tau+\beta)$ 和 $v_i(t-\tau+\beta)$, 此时常数 β 无法直接控制,为了能够控制该参数,再利用 $x_i(t-\tau+\beta) \approx r_1 x_i(t-\tau) + r_2 \beta \dot{x}_i(t-\tau)$ 和 $v_i(t-\tau+\beta) \approx r_1 v_i(t-\tau) + r_2 \beta \dot{v}_i(t-\tau)$, 可得到具有时滞状态导数反馈的一致性协议

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -\gamma v_i + \sum_{j \in N_i} a_{ij} [r_1 \gamma (x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau)) \\ & + (r_1 + r_2 \beta \gamma)(v_j(t-\tau) - v_i(t-\tau)) \\ & + r_2 \beta (\dot{v}_j(t-\tau) - \dot{v}_i(t-\tau))] \end{aligned} \quad (2)$$

该协议中 $\beta \geq 0$ 表示时滞状态导数的反馈强度,权重系数 $r_1, r_2 > 0$ 。当 $r_1 = r_2 = 1$ 且 $\beta = 0$ 时,该协议式(2)变为传统的一致性协议。对于2阶多智能体系统,如何提高系统的时滞鲁棒性是一个十分重要的问题,目前,在不改变网络拓扑结构的情况下,可以通过减少网络的连通性来解决该问题,但是由于减少连通性会降低多智能体系统实现一致收敛的速度,为了克服两者之间的矛盾,文献[15,16]引入时滞状态导数反馈协议部分解决了该问题。然而,如果反馈强度过大,系统在任意通讯时滞下都会发生震荡^[17],这需要寻求新的方法来解决。随后,Wu等人^[9]设计了一种加权平均预测的一致性协议,在该协议下,问题得到了解决,但是该协议结构需要利用积分理论做加权平均处理,导致结构过于复

杂,在实际应用中很难实现。本文将采用一种相对简单的加权方法,给出一种新的具有加权项的时滞状态导数反馈协议式(2),分析系统式(1)的一致性和鲁棒性,此时2阶多智能体系统具有如下闭环形式

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = -\gamma v_i + \sum_{j \in N_i} a_{ij} [r_1 \gamma (x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau)) \\ + (r_1 + r_2 \beta \gamma)(v_j(t-\tau) - v_i(t-\tau)) \\ + r_2 \beta (\dot{v}_j(t-\tau) - \dot{v}_i(t-\tau))] \end{cases} \quad (3)$$

本文的创新之处在于提出了一种具有加权项的时滞状态导数反馈协议,在定向通讯网络拓扑下,改进了大通讯时滞导致2阶多智能体系统容易发生震荡的问题。下面将采用频域理论研究系统式(3)的一致性和鲁棒性。

2 主要定理

2阶多智能体系统的一致性要求位置与速度都要达到一致,具体定义为

定义1 如果存在常数 c , 对任意 i 都有: $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = c, \lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0$, 则称多智能体系统式(1)能够渐近实现稳态一致。

为了保证系统式(3)渐近实现稳态一致,需要对系统的通讯时滞进行约束,具体定理如下。

定理1 设权重系数 $r_1, r_2 > 0, \lambda_i (i = 2, 3, \dots, N)$ 为拉普拉斯矩阵的非零特征值,则在包含全局可达节点的定向网络拓扑结构下,当反馈强度 $\beta < \min \left\{ \frac{r_1}{r_2 \tau}, \frac{1}{r_2 |\lambda_2|}, \dots, \frac{1}{r_2 |\lambda_N|} \right\}$ 时,系统式(3)渐近实现稳态一致的充要条件是通讯时滞

$$\begin{aligned} \tau < & \min_{i=2,3,\dots,N} \left\{ \frac{\sqrt{1 - r_2^2 \beta^2 |\lambda_i|^2}}{r_1 |\lambda_i|} \right. \\ & \cdot \left. \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{r_1 \beta |\lambda_i|}{\sqrt{1 - r_2^2 \beta^2 |\lambda_i|^2}} - \left| \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} \right| \right] \right\} \\ & \triangleq \tau_{\max} \end{aligned} \quad (4)$$

而且当通讯时滞 $\tau = \tau_{\max}$ 时,系统式(3)的解必定全局震荡。

证明 记 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T, \mathbf{v}(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)]^T$, 则系统式(3)可化为 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{v}}(t) = -\gamma \mathbf{v}(t) - \mathbf{L} [r_1 \gamma \mathbf{x}(t-\tau) + (r_1 + r_2 \beta \gamma) \mathbf{v}(t-\tau) + r_2 \beta \dot{\mathbf{v}}(t-\tau)]$, 这里, \mathbf{L} 为系统的拉普拉斯矩阵,利用拉普拉斯变换,变为 $s^2 \mathbf{X}(s) = -\gamma s \mathbf{X}(s) - \mathbf{L} e^{-\tau s} [r_1 \gamma \mathbf{X}(s) + (r_1 + r_2 \beta \gamma) s \mathbf{X}(s) + r_2 \beta s^2 \mathbf{X}(s)]$, 这里, $\mathbf{X}(s)$ 表示 $\mathbf{x}(t)$ 的拉普拉斯变换。于是 $\mathbf{X}(s)$ 的特征方程为

$$\det[(s+\gamma)(s\mathbf{I} + e^{-\tau s}(r_1 + r_2\beta s)\mathbf{L})] = 0 \quad (5)$$

由于矩阵 \mathbf{L} 为 N 阶方阵, 所有 $s = -\gamma$ 是上面特征方程的 N 重根, 为了使系统式(3)实现渐近稳态一致, 需要研究方程

$$\det(s\mathbf{I} + e^{-\tau s}(r_1 + r_2\beta s)\mathbf{L}) = 0 \quad (6)$$

的根在复平面上的分布情况, 如果除了0之外, 方程式(6)全部根都在左半开平面上, 则系统式(3)能够渐近实现稳态一致。另外, 利用本文中拓扑结构包含全局可达节点的特征, 可知矩阵 \mathbf{L} 只有零特征值和具有正实部的特征值 λ_i 。所以方程式(6)等价于 $s \prod_{i=2}^N (s + \lambda_i e^{-\tau s}(r_1 + r_2\beta s)) = 0$, 从而 $s = 0$ 是方程式(6)的单根。另外, 当 $s \neq 0$ 时, 研究方程式(7)的根。

$$s + \lambda_i e^{-\tau s}(r_1 + r_2\beta s) = 0 \quad (7)$$

式(7)可化为 $1 + \frac{\lambda_i e^{-\tau s}(r_1 + r_2\beta s)}{s} = 0$, 令 $g_i(s) = \frac{\lambda_i e^{-\tau s}(r_1 + r_2\beta s)}{s}$, 下面分析函数 $g_i(jw) = \frac{\lambda_i e^{-\tau wj}(r_1 + r_2\beta wj)}{jw}$ 的性质。

当 $0 < w < +\infty$ 时, 经过计算可得 $\frac{d|g_i(jw)|}{dw} < 0$ 和 $\frac{d \cdot \arg(g_i(jw))}{dw} < 0$, 所以 $g_i(jw)$ 的模 $|g_i(jw)| = |\lambda_i| \sqrt{r_2^2\beta^2 + \frac{r_1^2}{w^2}}$ 和辐角 $\arg(g_i(jw)) = -\tau w + \arctan \frac{r_2\beta w}{r_1} + \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} - \frac{\pi}{2}$, 关于变量 w 单调减少, 假设当 $w = w_1$ 时 $g_i(jw)$ 第1次穿过负实轴, 此时 $-\tau w_1 + \arctan \frac{r_2\beta w_1}{r_1} + \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} - \frac{\pi}{2} = -\pi$ 。当 $-\infty < w < 0$ 时, 经过类似计算, 再利用单调性, 并假设当 $w = w_2$ 时 $g_i(jw)$ 最后一次穿过负实轴, 则 $-\tau w_2 + \arctan \frac{r_2\beta w_2}{r_1} + \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} + \frac{\pi}{2} = \pi$ 。

奈奎斯特稳定判据是判断系统稳定性的主要方法, 根据前面对函数 $g_i(jw)$ 性质的分析可知, 方程式(7)的根在左半平面当且仅当 $\max_{i=2,3,\dots,N} \{|g_i(jw_1)|, |g_i(jw_2)|\} < 1$ 时, 经过简化计算后可得式(4)成立。

所以当式(4)成立时, 特征方程式(5)只有零根和具有负实部的根, 从而对任意的 i 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = x_i^*$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} v_i(t) = 0$ 。另外, 由式(3)可得 $\mathbf{L}[x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*]^T = 0$, 并且 $\text{rank}(\mathbf{L}) = N - 1$ 和 $\mathbf{L}[1, 1, \dots, 1]^T = 0$, 所以 $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*]^T = c[1, 1, \dots, 1]^T$, 即对任意 i , 有 $x_i^* = c$ 。所以系统式(3)渐近实现稳态一致。

下面证明当 $\tau = \tau_{\max}$ 时, 方程式(6)的根除 $s = 0$ 外, 还有其它根在虚轴上。令

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{1 - r_2^2\beta^2|\lambda_m|^2}}{r_1|\lambda_m|} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{r_1\beta|\lambda_m|}{\sqrt{1 - r_2^2\beta^2|\lambda_m|^2}} - \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_m)}{\text{Re}(\lambda_m)} \right]$$

和 $s = jw$, 由式(7)可得 $jw + \lambda_m e^{-jw\tau}(r_1 + r_2\beta wj) = 0$ 和 $-jw + \bar{\lambda}_m e^{jw\tau}(r_1 - r_2\beta wj) = 0$, 两式相乘得

$$w^2 + |\lambda_m|^2(r_1^2 + r_2^2\beta^2 w^2) + 2w\{[r_2\beta w \text{Re}(\lambda_m) + r_1 \text{Im}(\lambda_m)] \cos(\tau w) - [r_1 \text{Re}(\lambda_m) - r_2\beta w \text{Im}(\lambda_m)] \sin(\tau w)\} = 0,$$

当 $w > 0$ 时, 由上式可得

$$(w - |\lambda_m| \sqrt{r_1^2 + r_2^2\beta^2 w^2})^2 + 2w|\lambda_m| \sqrt{r_1^2 + r_2^2\beta^2 w^2} \cdot \left\{ 1 - \sin \left[\tau w - \arctan \frac{r_2\beta w}{r_1} - \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_m)}{\text{Re}(\lambda_m)} \right] \right\} = 0,$$

所以 $w = |\lambda_m| \sqrt{r_1^2 + r_2^2\beta^2 w^2}$ 且 $\sin \left[\tau w - \arctan \frac{r_2\beta w}{r_1} - \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_m)}{\text{Re}(\lambda_m)} \right] = 1$, 经过计算可知最小时滞为

$$\tau = \frac{\sqrt{1 - r_2^2\beta^2|\lambda_m|^2}}{r_1|\lambda_m|} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{r_1\beta|\lambda_m|}{\sqrt{1 - r_2^2\beta^2|\lambda_m|^2}} + \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_m)}{\text{Re}(\lambda_m)} \right] \quad (8)$$

同理, 当 $w < 0$ 时, 经过类似地计算可知最小时滞为

$$\tau = \frac{\sqrt{1 - r_2^2\beta^2|\lambda_m|^2}}{r_1|\lambda_m|} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{r_1\beta|\lambda_m|}{\sqrt{1 - r_2^2\beta^2|\lambda_m|^2}} - \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_m)}{\text{Re}(\lambda_m)} \right] \quad (9)$$

结合式(8)和式(9)可得最小时滞为 $\tau = \frac{\sqrt{1 - r_2^2\beta^2|\lambda_m|^2}}{r_1|\lambda_m|} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{r_1\beta|\lambda_m|}{\sqrt{1 - r_2^2\beta^2|\lambda_m|^2}} - \left| \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_m)}{\text{Re}(\lambda_m)} \right| \right]$ 。

所以, 当 $\tau = \tau_{\max}$ 时, 特征方程(5)有3个根 $s = 0, s = \pm \frac{r_1|\lambda_m|}{\sqrt{1 - r_2^2\beta^2|\lambda_m|^2}}j$, 此时, 多智能体系统式(3)发生震荡。证毕

注: 定理1表明对于所有权重系数 $r_1, r_2 > 0$, 只要反馈强度 β 和通讯时滞 τ 满足一定的条件, 就可以保证系统式(3)渐近实现稳态一致。然而为了确保具有时滞状态导数反馈的一致协议能够更加准确地反映传统一致性协议的性能, 在实际应用过程中, 往往需要对参数 r_1, r_2 和 β 进行约束。一般地, r_1 和 r_2 越接近1, 且 β 越接近0, 对传统协议的性能反映越准确。当 $\beta = 0$ 时, 协议式(2)变为传统的一致性协议, 下面考虑协议式(2)比传统的一致性协议更有优势, 为了证明该问题, 只要找到恰当的 β 使得 $\tau_{\max|\beta \neq 0} > \tau_{\max|\beta = 0}$ 即可。

定理2 系统式(3)比应用传统的一致性协议的系统能容忍更大的通讯时滞。即存在常数 $\beta^c > 0$, 当反馈强度 $\beta \in (0, \beta^c)$ 时, 系统式(3)能够容忍的最大通讯时滞 $\tau_{\max}|_{\beta \neq 0} > \tau_{\max}|_{\beta=0}$ 。

证明 记 $\tau_{i \max} = \frac{\sqrt{1-r_2^2\beta^2|\lambda_i|^2}}{r_1|\lambda_i|} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{r_1\beta|\lambda_i|}{\sqrt{1-r_2^2\beta^2|\lambda_i|^2}} - \left| \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} \right| \right]$, 对 β 求导可得

$$\frac{d\tau_{i \max}}{d\beta} = 1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \alpha_i \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \alpha_i - \left| \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} \right| \right] \triangleq \Psi_i(\alpha_i) \quad (10)$$

其中, $\alpha_i = \frac{r_1\beta|\lambda_i|}{\sqrt{1-r_2^2\beta^2|\lambda_i|^2}}$ 。利用 $\frac{d^2\Psi_i(\alpha_i)}{d\alpha_i^2} < 0$ 和 $\frac{d\Psi_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} \Big|_{\alpha_i=0} < 0$, 可知当 $\alpha_i > 0$ 时, 有 $\frac{d\Psi_i(\alpha_i)}{d\alpha_i} < 0$, 再利用 $\Psi_i(0) = 1 > 0$ 和 $\lim_{\alpha_i \rightarrow +\infty} \Psi_i(+\infty) = -\infty$ 可得, 函数 $\Psi_i(\alpha_i) = 0$ 在 $0 < \alpha_i < +\infty$ 有且仅有一个解, 记为 $\alpha_i^* = \frac{r_1\beta_i^*|\lambda_i|}{\sqrt{1-r_2^2\beta_i^{*2}|\lambda_i|^2}}$ 。由于 $\alpha_i = \frac{r_1\beta|\lambda_i|}{\sqrt{1-r_2^2\beta^2|\lambda_i|^2}}$ 关于 $\beta \in \left(0, \frac{1}{r_2|\lambda_i|}\right)$ 单调增加, 所以利用 $\Psi_i(\alpha_i)$ 的单调性, 可得 $\frac{d\tau_{i \max}}{d\beta} \begin{cases} > 0, \beta \in (0, \beta_i^*) \\ < 0, \beta \in \left(\beta_i^*, \frac{1}{r_2|\lambda_i|}\right) \end{cases}$, 其中 β_i^* 是方程

$$\frac{r_2^2}{r_1} \frac{\beta_i^*|\lambda_i|}{\sqrt{1-r_2^2\beta_i^{*2}|\lambda_i|^2}} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{r_1\beta_i^*|\lambda_i|}{\sqrt{1-r_2^2\beta_i^{*2}|\lambda_i|^2}} - \left| \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} \right| \right] = 1 \quad (11)$$

的唯一解。另外, 利用 $\tau_{i \max}|_{\beta=0} = \frac{1}{r_1|\lambda_i|} \left[\frac{\pi}{2} - \left| \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} \right| \right] \triangleq \tau_i^*$, 可得存在唯一正实数 β_i^c , 使

得 $\tau_{i \max} \begin{cases} > \tau_i^*, \beta \in (0, \beta_i^c) \\ < \tau_i^*, \beta \in \left(\beta_i^c, \frac{1}{r_2|\lambda_i|}\right) \end{cases}$, 这里 β_i^c 是方程

$\tau_{i \max} = \tau_i^*$, 即方程 $\frac{\sqrt{1-r_2^2\beta_i^{*2}|\lambda_i|^2}}{r_1|\lambda_i|} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{r_1\beta_i^c|\lambda_i|}{\sqrt{1-r_2^2\beta_i^{*2}|\lambda_i|^2}} - \left| \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} \right| \right] = \left[\frac{\pi}{2} - \left| \arctan \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{\text{Re}(\lambda_i)} \right| \right]$ 的唯一正解。取 $\beta^c = \min_{i=2,3,\dots,N} \{\beta_i^c\}$,

则对任意 $\beta \in (0, \beta^c)$ 有 $\tau_{\max} = \min_{i=2,3,\dots,N} \tau_{i \max} > \min_{i=2,3,\dots,N} \tau_i^* = \tau^*$, 即 $\tau_{\max}|_{\beta \neq 0} > \tau_{\max}|_{\beta=0}$ 。证毕

注: 定理1和定理2分别从一致性和鲁棒性两个方面讨论了具有时滞状态导数反馈的多智能体系统, 没有涉及多智能体系统的收敛速度问题, 需要

指出的是, 为了证明系统式(3)具有更快的收敛速度, 只要能够找到恰当的反馈强度 β , 使协议式(2)的闭环极点都小于传统协议的闭环极点即可, 感兴趣的读者可以参考文献[13]的方法进一步研究。另外, 对于具有噪声和干扰的时滞多智能体系统, 文中采用的将传统协议变为具有时滞状态导数反馈协议的转化方法仍有可鉴之处。

3 数值仿真

假设系统有4个智能体, 其通信拓扑对应的拉

普拉斯矩阵为 $L = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.3 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$, 则

该矩阵的特征值依次为 $\lambda_1=0, \lambda_2=0.6, \lambda_3=0.85+0.3841i, \lambda_4=0.85-0.3841i$ 。对系统式(3)进行数值仿真时, 通讯时滞 τ 和控制参数 γ 可以首先取定, 然后通过反馈强度 β 和权重系数 r_1, r_2 的调节, 仿真多智能体的变化情况。取参数 $\gamma=0.9, \beta=0$ 和 $r_1=r_2=1$, 由定理1可知, $\tau^*=1.2291$, 此处 τ^* 为传统一致性协议下的最大通讯时滞。另外, 对于具有时滞状态导数反馈的系统式(3), 取 $\beta=0.2$ 且 $r_1=r_2=1$, 相应的最大通讯时滞 $\tau_{\max}=1.4051$, 显然该通讯时滞比传统协议下的通讯时滞大。最后, 通过调整权重系数, 可以求出当 $\beta=0.2, r_1=0.9$ 且 $r_2=0.8$ 时, 相应的最大通讯时滞 $\tau_{\max}=1.5484$, 下面进行数值模拟。

在 $\beta=0$ 和 $r_1=r_2=1$ 下, 取 $\tau=1.3$, 系统式(3)的位置和速度状态变化趋势见图1。这里的横坐标时间概念表示多智能体系统中 $x_i(t)$ 和 $v_i(t)$ 的时间变量 t , 纵坐标表示两者的数值。

从图1可以看出, 此时2阶多智能体系统发生明显的震荡, 主要原因在于此时的通讯时滞 $\tau=1.3 > \tau^*$, 系统式(3)会发生震荡, 从而定理结论有效。

另外, 当 $\beta=0.2$ 且 $r_1=r_2=1$ 时, 取通讯时滞 $\tau=1.35$, 系统式(3)的位置和速度状态变化趋势见图2。

从图2可知, 尽管 τ 增加到1.35, 但是系统式(3)却能够渐近实现稳态一致。这是因为此时 β 调整为0.2时, 使得 $\tau=1.35 < \tau_{\max}=1.4051$, 从而系统式(3)能够渐近实现稳态一致, 于是定理结论有效。

最后, 保持反馈强度 $\beta=0.2$ 不变, 将权重系数调整为 $r_1=0.9$ 和 $r_2=0.8$, 此时在通讯时滞 $\tau=1.5$ 下, 该系统的位置和速度状态变化趋势见图3。

从图3可知, 即使将通讯时滞增大到 $\tau=1.5 < \tau_{\max}=1.5484$, 在给定的权重参数下, 系统式(3)仍能够渐近实现稳态一致。结合图1—图3, 尽管时滞从1.3增加到了1.5, 但是只要给定适当 β, r_1 和 r_2 , 即可保证系统式(3)渐近实现稳态一致。

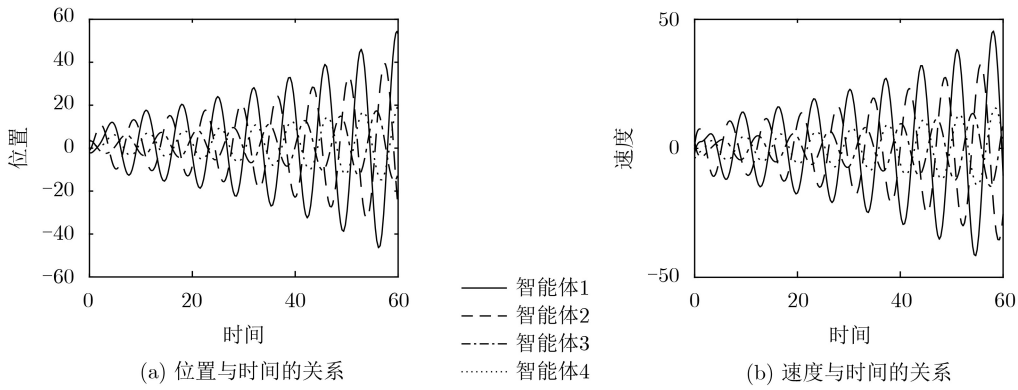


图 1 在 $\beta=0, r_1=r_2=1$ 且 $\tau=1.3$ 下系统的状态

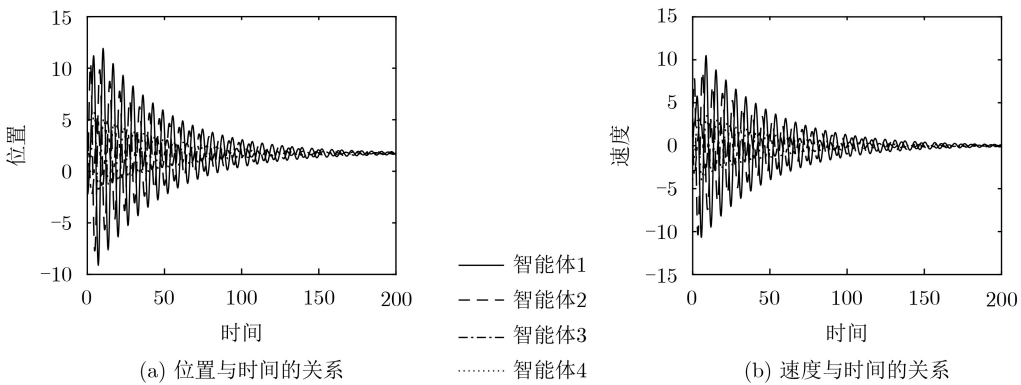


图 2 在 $\beta=0.2, r_1=r_2=1$ 且 $\tau=1.35$ 下系统的状态

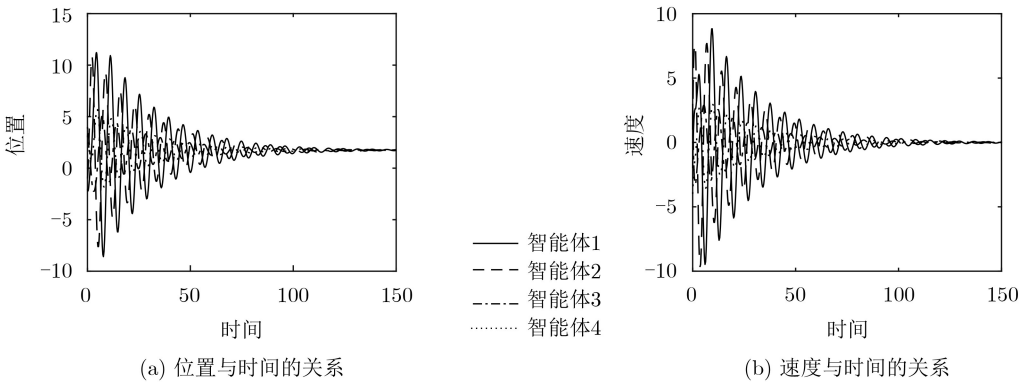


图 3 在 $\beta=0.2, r_1=0.9$ 且 $\tau=1.5$ 下系统的状态

4 结论

研究表明，对于在定向网络拓扑结构下二阶智能体系统，具有加权项的时滞状态导数反馈协议有较大的优势，它们比传统的一致性协议能够容忍更大的通讯时滞，而且该协议中的参数调整相对简单，比较容易实现。对于系统的通讯时滞偏大的情况，系统往往会发生震荡，为了解决震荡问题，只要引入具有加权项的时滞状态导数反馈协议，通过对反馈强度和权重系数进行调整，即可保证系统渐近实现稳态一致。

参考文献

- [1] 余莹莹. 多智能体系统一致性若干问题的研究[D]. [博士论文], 华中科技大学, 2010: 3-26.
YU Yingying. Research on several problems of consensus in multi-agent systems[D]. [Ph. D. dissertation], Huazhong University of Science and Technology, 2010: 3-26.
- [2] OLFATI-SABER R and MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1520-1533. doi: 10.1109/TAC.2004.834113.
- [3] DEGROOT M H. Reaching a consensus[J]. *Journal of the*

- American Statistical Association*, 1974, 69(345): 118–121. doi: [10.2307/2285509](https://doi.org/10.2307/2285509).
- [4] VICSEK T, CZIRÓK A, BEN-JACOB E, *et al.* Novel type of phase transition in a system of self-driven particles[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(6): 1226–1229. doi: [10.1103/PhysRevLett.75.1226](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1226).
- [5] JADBABAIE A, LIN Jie, and MORSE A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(6): 988–1001. doi: [10.1109/tac.2003.812781](https://doi.org/10.1109/tac.2003.812781).
- [6] 蒋国平, 周映江. 基于收敛速率的多智能体系统一致性研究综述[J]. 南京邮电大学学报: 自然科学版, 2017, 37(3): 15–25. doi: [10.14132/j.cnki.1673-5439.2017.03.002](https://doi.org/10.14132/j.cnki.1673-5439.2017.03.002).
JIANG Guoping and ZHOU Yingjiang. Research on consensus of multi-agent systems based on convergence rate[J]. *Journal of Nanjing University of Posts and Telecommunications: Natural Science Edition*, 2017, 37(3): 15–25. doi: [10.14132/j.cnki.1673-5439.2017.03.002](https://doi.org/10.14132/j.cnki.1673-5439.2017.03.002).
- [7] 高杨, 李东生, 程泽新. 无人机分布式集群态势感知模型研究[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(6): 1271–1278. doi: [10.11999/JEIT170877](https://doi.org/10.11999/JEIT170877).
GAO Yang, LI Dongsheng, and CHENG Zexin. UAV distributed swarm situation awareness model[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(6): 1271–1278. doi: [10.11999/JEIT170877](https://doi.org/10.11999/JEIT170877).
- [8] 张岩, 孙世宇, 胡永江, 等. 基于特征距离与内点的随机抽样一致性算法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(4): 928–935. doi: [10.11999/JEIT170703](https://doi.org/10.11999/JEIT170703).
ZHANG Yan, SUN Shiyu, HU Yongjiang, *et al.* Random sample consensus algorithm based on feature distance and inliers[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(4): 928–935. doi: [10.11999/JEIT170703](https://doi.org/10.11999/JEIT170703).
- [9] YU Wenwu, CHEN Guanrong, and GAO Ming. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems[J]. *Automatica*, 2010, 46(6): 1089–1095. doi: [10.1016/j.automat.2010.03.006](https://doi.org/10.1016/j.automat.2010.03.006).
- [10] REN Wei and ATKINS E. Distributed multi-vehicle coordinated control *via* local information exchange[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(10/11): 1002–1033. doi: [10.1002/rnc.1147](https://doi.org/10.1002/rnc.1147).
- [11] ZOU Wencheng, SHI Peng, XIANG Zhengrong, *et al.* Finite-time consensus of second-order switched nonlinear multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(5): 1757–1762. doi: [10.1109/TNNLS.2019.2920880](https://doi.org/10.1109/TNNLS.2019.2920880).
- [12] REN Hongwei and DENG Feiqi. Stochastic bounded consensus of second-order multi-agent systems in noisy environment[J]. *Chinese Physics B*, 2017, 26(10): 100506. doi: [10.1088/1674-1056/26/10/100506](https://doi.org/10.1088/1674-1056/26/10/100506).
- [13] ZHENG Yuanshi, ZHAO Qi, MA Jingjing, *et al.* Second-order consensus of hybrid multi-agent systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2019, 125: 51–58. doi: [10.1016/j.sysconle.2019.01.009](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2019.01.009).
- [14] LIU Chenglin and TIAN Yuping. Coordination of multi-agent systems with communication delays[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2008, 41(2): 10782–10787. doi: [10.3182/20080706-5-KR-1001.01828](https://doi.org/10.3182/20080706-5-KR-1001.01828).
- [15] WU Zhihai and FANG Huajing. Improvement for consensus performance of multi-agent systems based on delayed-state-derivative feedback[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2012, 23(1): 137–144. doi: [10.1109/JSEE.2012.00017](https://doi.org/10.1109/JSEE.2012.00017).
- [16] WU Zhihai and FANG Huajing. Delayed-state-derivative feedback for improving consensus performance of second-order delayed multi-agent systems[J]. *International Journal of Systems Science*, 2012, 43(1): 140–152. doi: [10.1080/00207721003802289](https://doi.org/10.1080/00207721003802289).
- [17] 王娜, 王健, 曹智明, 等. 加权平均预测的一阶多智能体系统一致性的采样控制[J]. 空军工程大学学报: 自然科学版, 2017, 18(1): 105–110. doi: [10.3969/j.issn.1009-3516.2017.01.018](https://doi.org/10.3969/j.issn.1009-3516.2017.01.018).
WANG Na, WANG Jian, and CAO Zhiming, *et al.* Sampled-data consensus of first-order multi-agent systems with weighted average prediction[J]. *Journal of Air Force Engineering University: Natural Science Edition*, 2017, 18(1): 105–110. doi: [10.3969/j.issn.1009-3516.2017.01.018](https://doi.org/10.3969/j.issn.1009-3516.2017.01.018).
- [18] WU Zhihai, FANG Huajing, and SHE Yingying. Weighted average prediction for improving consensus performance of second-order delayed multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2012, 42(5): 1501–1508. doi: [10.1109/TSMCB.2012.2189384](https://doi.org/10.1109/TSMCB.2012.2189384).
- 晋守博: 男, 1980年生, 硕士, 副教授, 研究方向为多智能体系统。
魏章志: 男, 1977年生, 博士, 副教授, 主要研究方向为控制理论。
李耀红: 男, 1977年生, 硕士, 教授, 研究方向为微分动力系统。

责任编辑: 马秀强