

一种变换状态空间的稳定卡尔曼滤波算法

龚享铤 周良柱

(国防科大电子科学与工程学院信号处理研究室 长沙 410073)

摘要: 该文在分析了扩展卡尔曼滤波中两种线性化误差的产生原因及其对滤波影响的基础上, 针对线性状态方程和非线性观测方程这一类系统, 提出了采用一组新的状态量代替原来的状态量, 使得观测方程为线性方程, 从而避免了因为观测方程线性化导致的观测空间和状态空间的映射关系改变, 提高了扩展卡尔曼滤波的稳定性和状态估计的精度。通过一个无源定位与跟踪的计算机仿真试验验证了这种方法的优点。

关键词: 扩展卡尔曼滤波, 状态空间, 单站无源定位与跟踪

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2005)06-0896-04

A Robust Extended Kalman Filter Based on Transforming State Space

Gong Xiang-yi Zhou Liang-zhu

(School of Electronic Sci. and Eng., Nat. Univ. of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract Based on the analysis of the effect on the linearization about the measurement equation and state equation, aimed to some system with linear state equation, a new algorithm named as Transforming State Space Extended Kalman Filter (TSS-EKF) is proposed to improve the robust of EKF. Simulation in single observer passive location and tracking validates that this algorithm is robust.

Key words Extended Kalman Filter (EKF), State space, Single observer passive location and tracking

1 前言

扩展的卡尔曼滤波(EKF)是一种常用的非线性信号处理方法, 广泛应用于雷达目标跟踪、自动控制及参数测量等领域。EKF 实际上是在当前的状态估计值处对非线性的状态方程和观测方程进行泰勒展开, 忽略其高阶项而得到线性方程, 进行卡尔曼滤波得到下一状态的估计值^[1]。当状态的估计值偏离状态的实际值较大时, 采用泰勒展开式的一次项模型偏离系统模型较大, 使得 EKF 算法得到次优的估计结果, 甚至造成算法不收敛。通常认为 EKF 算法仅适用于非线性强度较小并且噪声扰动不大的情况, 因此提高 EKF 算法的稳定性是一个重要的研究内容。文献[2]研究了采用多次迭代逐步减小线性化误差的迭代扩展卡尔曼滤波(IEKF)方法; 文献[3]将非线性的观测方程表示成线性方式进行滤波, 称之为伪线性估计(PLE); 文献[4,5]以非线性方程的泰勒展开式的二阶项作为线性化误差修正原来 EKF 的二阶扩展卡尔曼滤波(Second-order EKF, SEKF)方法; 文献[6]根据 H_∞ 模最小化原则提出了一种新的稳健 EKF(Robust EKF, REKF)方法。这些方法在不同的应用范围内都比 EKF 方法性能有所提高, 但是它们都有不足之处。IEKF 和二阶 EKF 虽然可以得到更高

的估计精度, 但是这两种算法的稳定度提高却不大, 而且二阶 EKF 的计算量增加很大; PLE 算法的估计结果是有偏估计; 稳健 EKF 算法为了提高算法的稳定度, 降低了估计结果的精度。

本文在第 2 节对 EKF 线性化误差特性进行了分析; 第 3 节针对线性状态方程和非线性观测方程这一类非线性系统, 提出了采用一个新的状态空间代替原来的状态空间, 使得观测方程为线性方程, 称这种方法为变换状态空间扩展卡尔曼滤波算法(TSS-EKF); 第 4 节以单站无源定位与跟踪为应用背景进行了仿真试验。

2 EKF 算法的线性化误差分析

考虑状态方程和观测方程都是非线性的离散系统, 其数学模型为

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= g(x(k), k) + w(k) \\ z(k) &= f(x(k)) + v(k) \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

其中 x 为状态矢量, $x \in R^n$; g 为 $R^n \rightarrow R^n$ 非线性的状态转移算子; z 为观测矢量, $z \in R^m$; f 为 $R^n \rightarrow R^m$ 非线性的算子; w, v 分别为 n 维的系统噪声和 m 维的观测噪声, 它们的均值为 0, 并且满足:

$$\left. \begin{aligned} E(\boldsymbol{w}(i)\boldsymbol{w}^H(j)) &= \boldsymbol{Q}_i\delta(i-j) \\ E(\boldsymbol{v}(i)\boldsymbol{v}^H(j)) &= \boldsymbol{R}_i\delta(i-j) \\ E(\boldsymbol{w}(i)\boldsymbol{v}^H(j)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

EKF 算法首先将非线性的状态方程在状态估计值处线性化, 将非线性的观测方程在状态预测值处线性化处理, 然后在这个近似的线性空间进行卡尔曼滤波处理。下面分别对这两种线性化处理对 EKF 算法的影响进行分析。

(1) 将状态方程在状态估计值处泰勒展开, 忽略它的高阶项, 近似得到线性化的状态方程:

$$\boldsymbol{x}(k+1) \approx \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}(k/k), k) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(k) - \hat{\boldsymbol{x}}(k/k)) + \boldsymbol{w}(k) \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{G} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}} \right|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k/k)}$, 根据式(1)的状态方程和式(2)可以得到 EKF 的状态预测值和预测协方差:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}(k+1/k) &= \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}(k/k), k) \\ \boldsymbol{P}_x(k+1/k) &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{P}_x(k/k)\boldsymbol{G}^T + \boldsymbol{Q}_k \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 $\boldsymbol{P}_x(k+1/k)$, $\boldsymbol{P}_x(k/k)$ 分别表示状态预测协方差和估计协方差。从式(3)可以看出: 对于非线性状态方程的线性化处理将误差协方差的传递定为二次传递函数, 但是不会改变状态自身的非线性转移。对于一般的情况而言, 误差协方差的变化只会对卡尔曼滤波增益产生影响, 进而影响收敛速度和估计精度, 不会威胁算法的稳定性。

(2) 与前面相同, 将非线性的观测方程在预测值 $\hat{\boldsymbol{x}}(k+1/k)$ 处泰勒展开, 忽略它的高阶项, 近似得到线性化的观测方程和新息的协方差:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{z}(k+1) &\approx \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}(k+1/k)) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}(k+1) - \hat{\boldsymbol{x}}(k+1/k)) + \boldsymbol{v}(k) \\ \boldsymbol{P}_v(k+1) &= \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_x(k+1/k)\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{R}_k \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中 $\boldsymbol{F} = \left. \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} \right|_{\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}(k+1/k)}$, \boldsymbol{P}_v 为新息的协方差。从式(4)可以看出, 关于观测方程的线性化处理对 EKF 算法产生两方面的作用。第一, 将状态空间到观测空间的非线性映射关系近似为线性映射关系, 在 EKF 的初期阶段, 状态矢量的预计值往往偏离状态矢量的实际值较大, 忽略泰勒展开式的高阶项而产生较大的误差, 所以线性的观测方程不能够认为是实际观测方程的近似表示, 进而对下一次的估计产生不利影响, 从而导致算法的不收敛。第二, 改变了新息的协方差, 影响了卡尔曼增益计算, 但是一般不会威胁算法的稳定性。

从对 EKF 线性化的影响分析中可以看出, 因为对于观测方程的线性化处理导致状态空间与观测空间的映射关系改变是影响算法稳定性的一个重要原因。基于这方面的考虑, 本文考虑如何改变状态空间, 将非线性的观测方程对应于一个线性的观测方程。

3 改变状态空间的稳定的 EKF 算法

对于某一类非线性系统, 例如雷达对匀速运动的目标进行跟踪的情况, 它的状态方程为线性方程, 方位角、俯仰角和径向距离等观测量是状态矢量的非线性函数。这一类系统的数学模型可以由式(1)改写为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) &= \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{w}(k) \\ \boldsymbol{z}(k) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)) + \boldsymbol{v}(k) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{A}(k)$ 为状态转移矩阵, 其它的符号与式(1)符号的含义相同, 根据第 2 节所述, 如果直接采用 EKF 进行状态估计, 由于对观测方程的线性化处理不但对误差协方差矩阵、卡尔曼增益有影响, 而且改变了从状态空间到观测空间的映射关系, 由于滤波初期的状态预测值偏离实际值较大而使得算法发散。如果构造一个新的状态空间, 使得它到观测空间的映射关系是线性的, 其对应新的状态矢量 \boldsymbol{y} , 然后采用 EKF 算法对新的状态进行估计, 最后将新的状态估计值映射到实际的状态空间得到 $\hat{\boldsymbol{x}}(k/k)$ 。状态矢量 \boldsymbol{y} 的状态方程可能因此变成非线性方程, 但是从第 2 节的分析中可以看出, 对于状态方程的线性化处理不改变状态矢量的非线性传递关系, 只影响估计误差协方差, 从而可以改善滤波的稳定性。我们称这种方法为 TSS-EKF, 算法的具体步骤为

(1) 构造一个新的状态矢量 \boldsymbol{y} , 使得观测方程为线性方程, 状态方程相应地变成非线性方程, 新的系统方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{y}(k+1) &= \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}(k)) + \boldsymbol{w}'(k) \\ \boldsymbol{z}(k) &= \boldsymbol{D}\boldsymbol{y}(k) + \boldsymbol{v}(k) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

(2) 利用观测值 $\boldsymbol{z}(k)$ 并采用 EKF 方法对式(6)中的状态矢量 \boldsymbol{y} 进行估计。

(3) 由新状态 \boldsymbol{y} 的估计值 $\hat{\boldsymbol{y}}(k/k)$ 计算式(5)中 \boldsymbol{x} 的估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}(k/k)$ 。

在第(1)步中, 如果 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 是一个可逆函数组, 则可以直接构造新状态矢量 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, 观测方程为 $\boldsymbol{z}(k) = \boldsymbol{y}(k) + \boldsymbol{v}(k)$ 。但是对于一般的情况, 式(6)中的观测空间的维数小于状态空间的维数, 即 $m < n$, 所以 $\boldsymbol{f}(\cdot)$ 是一个不可逆的函数组, 需要增加新的 $m-n$ 维的辅助量 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, 使得扩展函数组 $\boldsymbol{f}_E(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})]^T$ 是一个可逆的函数组, 定义新状态矢量 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}_E(\boldsymbol{x})$, 则式(6)的观测方程为

$$\boldsymbol{z}(k) = [\boldsymbol{I}_{m \times m}, \mathbf{0}_{m \times (n-m)}] \boldsymbol{y}(k) + \boldsymbol{v}(k) \quad (7a)$$

同样可以推导出式(6)的状态方程的具体表达式:

$$\boldsymbol{y}(k+1) = \boldsymbol{f}_E(\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_E^{-1}(\boldsymbol{y}(k))) + \boldsymbol{w}'(k) \quad (7b)$$

其中 $\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{f}_E(\boldsymbol{w})$, 它的均值为 0, 并且满足

$$\left. \begin{aligned} E(\mathbf{w}'(i)\mathbf{w}'^H(j)) &= \mathbf{F}_E \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_E^H \delta(i-j) \\ E(\mathbf{w}'(i)\mathbf{v}'^H(j)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 $\mathbf{F}_E = \frac{\partial \mathbf{f}_E}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\mathbf{y}=\hat{\mathbf{y}}(k+1/k)}$ 。

为了使得 $\mathbf{f}_E(\mathbf{x})$ 可逆, 有许多方式选择辅助量 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, 这造成了构造 $\mathbf{f}_E(\mathbf{x})$ 的随意性, 如果 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 选择不当, 可能使得 $\mathbf{f}_E(\mathbf{x})$ 是一个病态的可逆函数, 不但使得式(6)的 $\mathbf{h}(\cdot)$ 是一个严重非线性函数, 而且使得 \mathbf{w}' 的协方差矩阵不能简单用式(8)表示, 而应该考虑高阶项的影响。因此如果 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 选择不当, 可能造成算法性能提高不大, 应该根据具体情况选择辅助量 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 。

4 实例仿真

下面以单站无源定位与跟踪作为一个具体应用例子, 对 TSS-EKF 算法进行仿真试验, 并与 EKF 算法进行比较。如图 1 所示, 观测平台(O)和目标辐射源(T)在二维平面中作相对匀速直线运动, 观测平台利用方位角 β 、角速度 $\dot{\beta}$ 和径向加速度 a_r 的观测量对目标辐射源进行定位和跟踪, 整个系统可以用式(5)来描述, 状态矢量由目标辐射源到观测平台的相对直角坐标位置和相对速度构成, 即 $\mathbf{x} = [x, y, \dot{x}, \dot{y}]^T$, 状

态转移矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, T 为观测平台对参数的观测

周期。观测方程的观测量 $\mathbf{z} = [\beta_m \quad \dot{\beta}_m \quad a_{rm}]^T$, 下标 m 表示含有噪声的测量值。根据运动学原理可以得到观测函数为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \beta(\mathbf{x}) \\ \dot{\beta}(\mathbf{x}) \\ a_r(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctg(y/x) \\ (-\dot{x}y + y\dot{x})/(x^2 + y^2) \\ -(-\dot{x}y + y\dot{x})^2 / (x^2 + y^2)^{1.5} \end{bmatrix} \quad (9)$$

显然 $\mathbf{f}(\cdot)$ 是一个不可逆的函数组, 定义辅助量 $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\dot{x}x + \dot{y}y) / \sqrt{x^2 + y^2}$, 构造新的状态矢量 \mathbf{y} 并且使得它到 \mathbf{x} 的映射是可逆的, 即 $\mathbf{y} = \mathbf{f}_E(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$, 观测矩阵

$\mathbf{D} = [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 1}]$, $\mathbf{f}_E(\mathbf{x})$ 的逆函数为

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}_E^{-1}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -\cos(\beta)a_r / \dot{\beta}^2 \\ -\sin(\beta)a_r / \dot{\beta}^2 \\ (a_r / \dot{\beta})\sin(\beta) + u \cos(\beta) \\ -(a_r / \dot{\beta})\cos(\beta) + u \sin(\beta) \end{bmatrix} \quad (10)$$

将式(9)和式(10)代入式(7)得到新的系统方程, 然后利用 EKF 方法对目标辐射源的运动状态进行估计。

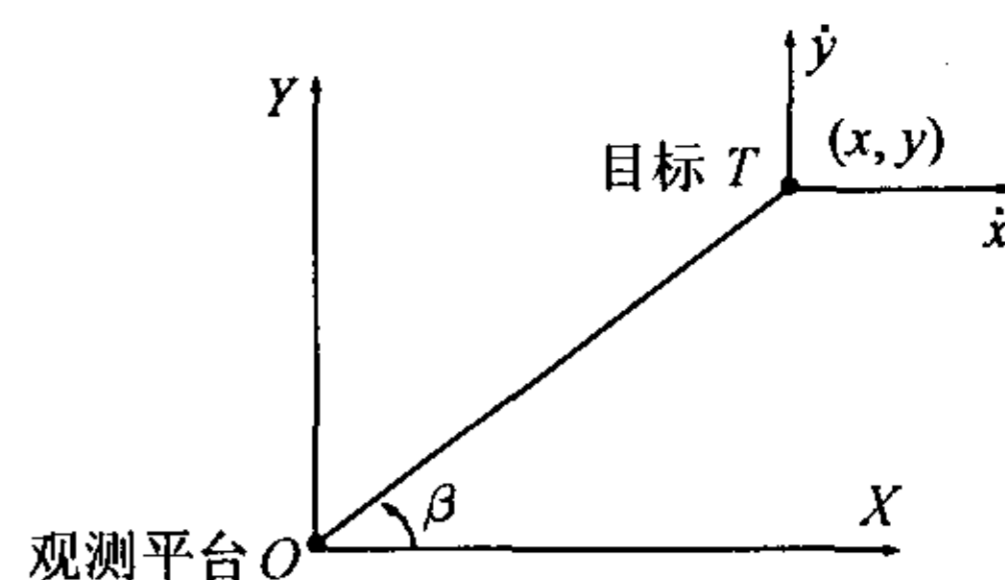


图1 观测平台与目标辐射源的几何关系图

如图 1 所示, 假设观测平台处于原点(0,0)处, 目标辐射源 0 时刻在 (200km,200km) 处以 300m/s 沿 x 轴负方向进行匀速直线运动, 观测平台对观测周期 $T = 1s$, 在方位角 β 、角速度 $\dot{\beta}$ 和径向加速度 a_r 的观测噪声方差 $[5 \times 10^{-3} \text{rad} \quad 2 \times 10^{-3} \text{rad/s} \quad 2 \times 10^{-2} \text{m/s}^2]$ 和 $[10^{-2} \text{rad} \quad 5 \times 10^{-3} \text{rad/s} \quad 5 \times 10^{-2} \text{m/s}^2]$ 的情况下分别采用 TSS-EKF 算法和 EKF 算法对目标辐射源进行定位与跟踪计算。图 2 显示了单次试验结果, 可以看出在观测噪声比较小的情况下, 两种算法都收敛, 但是在观测噪声比较大的情况下, EKF 算法不收敛, 而 TSS-EKF 算法收敛。另外在两组观测噪声的情况下, 采用 1000 次 Monte-Carlo 试验比较 TSS-EKF 算法和 EKF 算法的定位跟踪精度的统计值和稳定性。图 3 显示了上述的两种噪声情况下这两种算法的定位精度和定位时间的统计值(剔除了不收敛的试验), 从图中可以看出: 第一, TSS-EKF 算法的收敛后的定位精度明显好于 EKF 算法; 第二, TSS-EKF 算法收敛速度快于 EKF 算法。表 1 显示了在不同噪声情况下进行 1000 次 Monte-Carlo 试验(注: 方括号内的参数依次为 $\beta, \dot{\beta}, a_r$ 的观测噪声方差, 单位为 rad, rad/s, m/s^2), 两种算法收敛的次数, 从表 1 可以看出, 随着观测噪声的减小, 各种算法的稳定都有提高, 但是在相同的观测噪声下, TSS-EKF 算法的稳定性明显好于 EKF 算法, 说明了 TSS-EKF 算法是一种稳定算法。

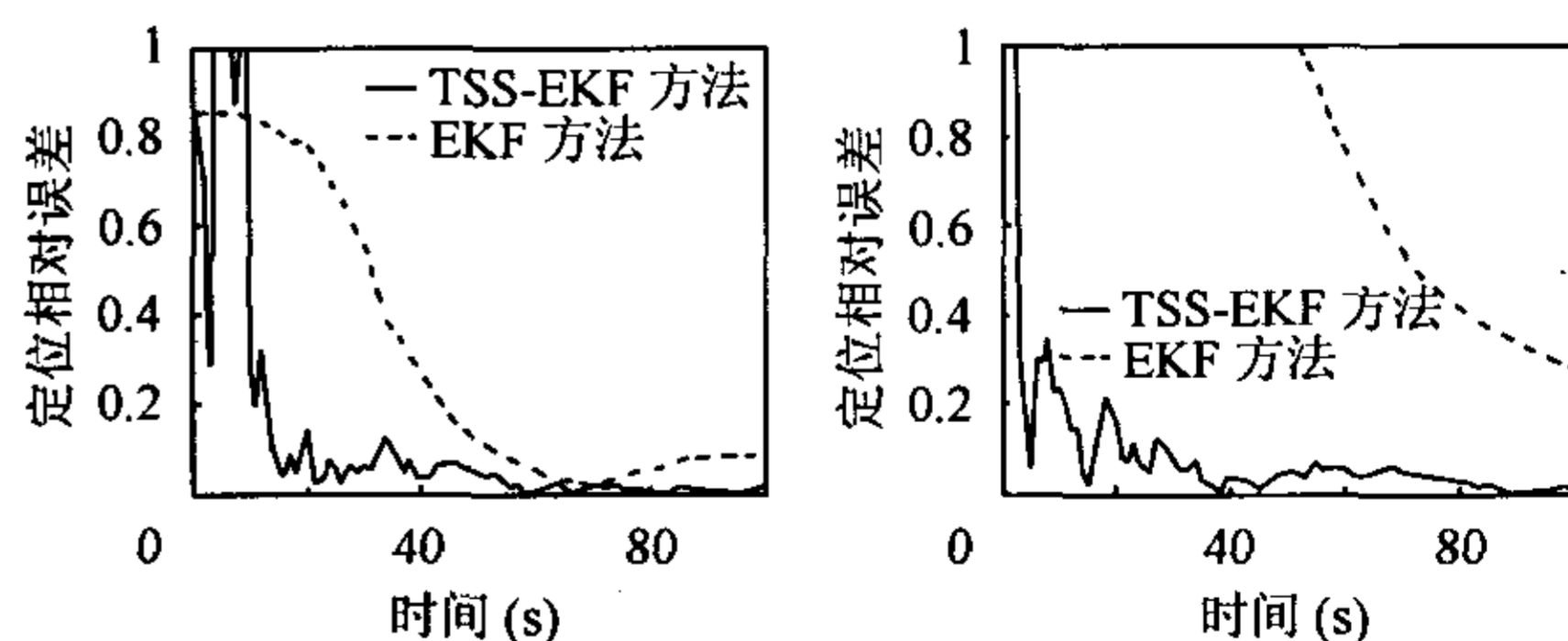


图2 在不同噪声条件下单次定位跟踪精度结果

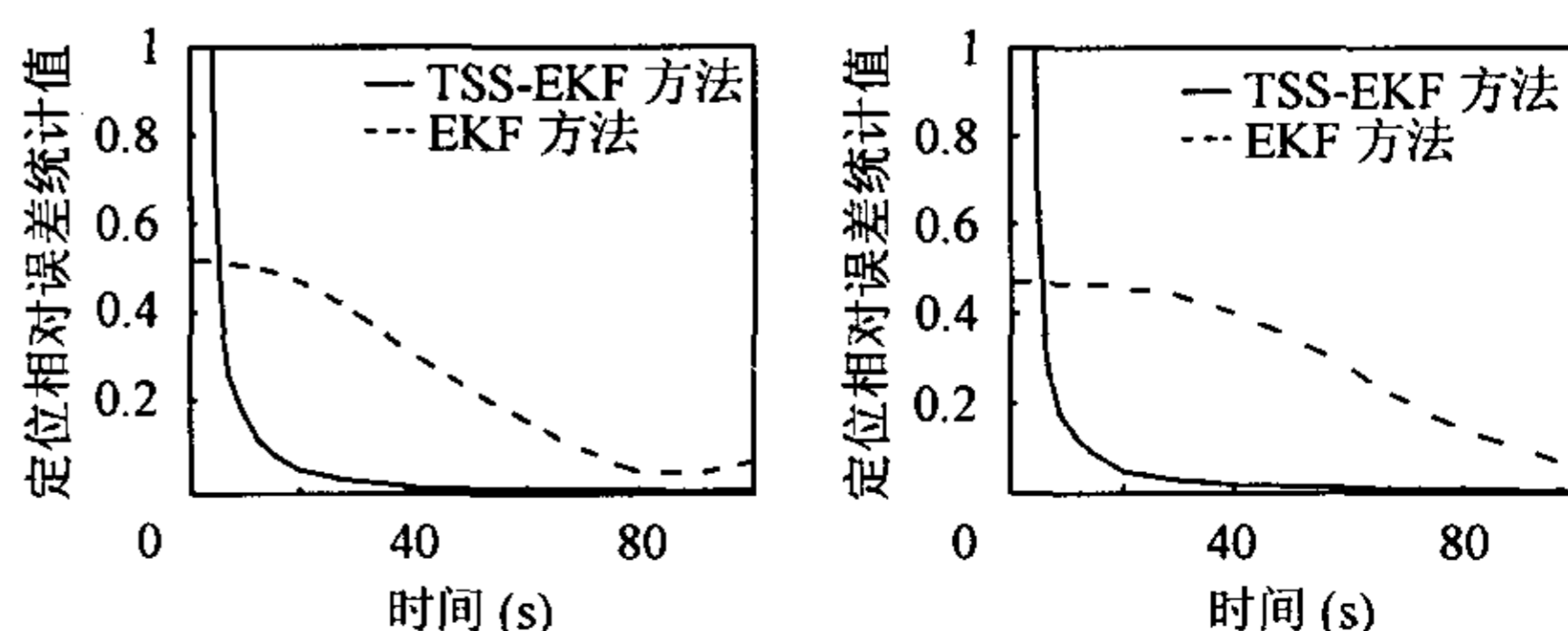


图3 在不同噪声条件下定位跟踪精度的统计结果

表 1 各种观测噪声条件下算法的收敛次数

算法	噪声方差			
	$\begin{bmatrix} 2 \times 10^{-3} & 10^{-3} \\ 10^{-2} & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \times 10^{-3} & 2 \times 10^{-3} \\ 2 \times 10^{-2} & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10^{-2} & 5 \times 10^{-3} \\ 5 \times 10^{-2} & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10^{-2} & 7 \times 10^{-3} \\ 7 \times 10^{-2} & \end{bmatrix}$
TSS-EKF 方法	975	967	943	854
EKF 方法	576	408	243	187

5 结束语

本文在分析了 EKF 算法中对观测方程和状态方程进行线性化处理的影响的基础上，针对观测方程为非线性方程，而状态方程为线性方程这一类系统，提出了一种变换状态空间的扩展的卡尔曼滤波算法。以单站无源定位与跟踪为例，在不同噪声环境下对这种算法进行了仿真试验，并和 EKF 算法进行了比较，说明了它是一种精度高，并且稳定性很好的算法。对状态空间的选择还待深入研究。

参 考 文 献

[1] Simon Haykin. Adaptive Filter Theory. Forth Edition, New Jersey: Prentice Hall, 2002, Section 10.10.
 [2] 刘福声, 罗鹏飞. 统计信号处理, 长沙: 国防科技大学出版社, 1998: 6.3 节.
 [3] 孙仲康, 周一宇. 单多基地有源无源定位技术, 北京: 国防工

业出版社, 1996: 9.2 节.

[4] Mahalanabis A, Farooq M. A second-order method for state estimation of non-linear dynamical systems, *Int. J. of Control*, 1971, 14(4): 631 – 639.
 [5] Kwanghee Nam, Min-Jea Tahk. A second-order stochastic filter involving coordinate transformation. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1999, 44(3): 603 – 608.
 [6] Einicke G A, White L B. Robust extend Kalman filtering. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999, 47(9): 2596 – 2599.

龚享铤: 男, 1973 年生, 博士生, 研究方向为现代信号处理、单站无源定位技术。
 周良柱: 男, 1952 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为现代信号处理。