

快速傅里叶变换在正交场器件 大信号理论计算中的应用*

敖 超 蔡金荣 陈增圭 舒士畏 张世昌
(中国科学院计算所**) (中国科学院电子学研究所)

提 要

快速傅里叶变换 (FFT) 自 1965 年问世以来, 发展很快, 应用相当广泛, 深受广大科技人员的重视。

本文简要地介绍了这一算法的特点, 并首次尝试用 FFT 进行正交场器件的大信号理论计算, 详细讨论了求解泊松方程的具体过程, 取得了较好的结果。

引 言

正交场器件(又称M型器件)如各种类型的磁控管以及泊管、前向波放大器等, 是一簇门类繁多的微波电子管。它具有悠久的历史, 同时还在不断改进中。这类器件在国防和国民经济中都有重要的应用。然而长期以来, 其工作机理一直没有很好搞清楚。直到 1965 年, S. P. Yu 和 G. P. Kooyers^[1] 借助于高速数字计算机求解泊松方程的快速方法, 第一次完成了对正交场器件的精确而完整的模拟, 才在相互作用机理方面有了重大突破。我们在 1973 年也开展了大信号理论的计算工作, 根据文献 [1] 提出的计算磁控管的基本思想, 对物理模型和数学模型作了比较仔细的研究, 在分布发射式和注入式两类前向波放大器的互作用计算方面都取得了满意的结果^[2]。在解决这一问题中, 我们采用了快速傅里叶变换求解泊松方程, 比文献 [1] 所用的超速 Hockney-Buneman 方法^[3] 速度更快。

下面首先简要地介绍快速傅里叶变换这一算法的特点, 然后详细讨论用快速傅里叶变换求解正交场器件中空间电荷场的方法。

(一) FFT 算法的特点

众所周知, 对 N 点复数序列进行离散的傅里叶变换(简称 DFT) 时, 需要进行 N^2 次复数乘和 $N(N-1)$ 次复数加。若 N 很大则计算次数相当惊人, 很不经济, 也限制了计算机的使用。

FFT 算法的基本思想是把原来的 N 点序列分成两个 $N/2$ 点的短序列(N 设为偶数), 两个 $N/2$ 点短序列的 DFT 之和得到原来 N 点序列的 DFT, 但现在的复数乘运算次数

* 1978 年 11 月 9 日收到。

** 现中国科学院计算中心。

只有约 $(N/2)^2 \cdot 2 = N^2/2$, 为直接计算次数的一半. 继续再将 $N/2$ 点序列分为两个 $N/4$ 点序列, 运算次数又可以减少一个因子 2. 依此类推, 一直分下去, 最终变为 2 点序列, 而 1 点函数的 DFT 即取样点本身, 这样总的运算次数变为

$$N^2 \frac{\log_2 N}{N} = N \log_2 N,$$

从而大大减少了运算次数. 总之, FFT 算法的特点就是快, N 越大, 其特点愈加显著, 实用意义也就愈大.

(二) 用 FFT 求解正交场器件中的空间电荷场

1. 问题的提出

大家知道, 预示微波管的性能, 取决于对管内电磁场和电子运动的了解程度, 因为管子的性能取决于场和电子的相互作用. 在正交场器件的大信号理论计算中^[2], 直流场是已知的, 周期慢波结构中的高频场已由 Yu 和 Hess 给出^[4], 而空间电荷场则尚不知道, 需要求解泊松方程来获得:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = -\rho(x, y)/\epsilon_0 \quad (1)$$

式中, $\phi(x, y)$ 为作用空间中的总电位, 由此可以求出总电场; $\rho(x, y)$ 为电荷密度, ϵ_0 为真空中的介电常数.

方程 (1) 满足下述边界条件(参看图 1):

$$\left. \begin{aligned} \phi(0, y) &= 0 \\ \phi(a, y) &= \phi_c(a, y) + \phi_a \\ \phi(x, y) &= \phi(x, y + \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, λ 为所研究的某空间谐波的波长, $\phi_c(a, y)$ 为阳极上的高频场电位.

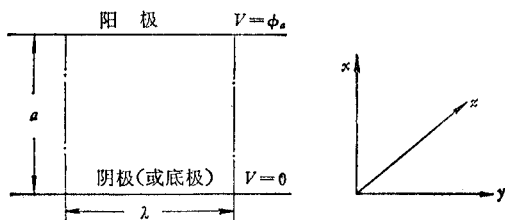


图 1 泊松方程的边界条件

最后一个边界条件表示空间电荷场在 y 方向呈周期性, 周期为 λ ^[2]. 这一点在运用 FFT 求解泊松方程中是尤为重要的.

用傅里叶变换求解泊松方程 (1) 的基本思想是: 在某些条件下, 泊松方程的解在某一维上具有周期性, 就可以将方程的解在这一维上展开为傅氏级数, 从而分离两个变量, 把对偏微分方程的求解, 化为对若干常微分方程的求解, 以达到简化计算的目的. 一般地说, 应用傅里叶变换求解偏微分方程 $H[U(x, y)] = F(x, y)$ 必须具备以下特定条件: (1) U 和 F 是某个变量 (x 或 y) 的周期函数, 这样即可展开为傅氏级数; (2) 方程必须

是常系数的(如轴对称空间中的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

不满足这一条件,用傅氏变换求解就有困难);(3) 必须是有规则的矩形边界. 这三个条件是缺一不可的.

FFT 是计算 N 个复数序列 $\{X_j\}$, ($j = 0, 1, \dots, N-1$) 的有限傅氏变换(即 DFT). 如前所述,直接计算大约需要运算 N^2 次,而采用 FFT 则大约只要运算 $N \log_2 N$ 次就够了,从而达到快速的目的. 在正交场器件的计算中,为了保证计算精度,作用空间(长为一个相波长)分得很细,运用 FFT 更能显示出其快速的优点.

2. 用傅里叶分析求解泊松方程

式(1)和式(2)分别为待解的方程及其边界条件.

将长度为一个波长 λ 的作用空间分成 $2N \times M$ 个网格(见图 2),任一时间增量的电荷分布可通过计算每一网格中的电荷棒的数量来确定.

若 $\rho(x, y)$ 及 $\phi_c(a, y)$ 都是 y 的以 λ 为周期的周期函数,则 $\phi(x, y)$ 也是 y 的周期函数(周期同样为 λ). 那么 $\phi(x, y)$ 和 $\rho(x, y)$ 均可展开为傅氏级数.

令 $-\rho(x, y)/\varepsilon_0 = N(x, y)$, 且用 $N_{i,j}$ 表示在 $(i\Delta x, j\Delta y)$ 格点上的值. 则有

$$N_{i,j} = \frac{a_i^{(0)}}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \left(a_i^{(k)} \cos \frac{2\pi k j}{2N} + b_i^{(k)} \sin \frac{2\pi k j}{2N} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2N-1 \quad (3)$$

$N_{i,j}$ 是已知的,所以 $a_i^{(k)}$ 、 $b_i^{(k)}$ 均可求出.

同样 $\phi(x, y)$ 也展开为傅氏级数(设格点上的值为 $\phi_{i,j}$):

$$\phi_{i,j} = \frac{\phi_i^{(0)}}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\phi_i^{(k)} \cos \frac{2\pi k j}{2N} + \phi_i^{(k)} \sin \frac{2\pi k j}{2N} \right),$$

$$i = 1, 2, \dots, M-1; \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2N-1 \quad (4)$$

式中, $\phi_i^{(k)}$ 和 $\phi_i^{(k)}$ 为待定系数,若定出这些系数,就可以通过式(4)求出泊松方程的近似数值解 $\phi_{i,j}$ 了.

把泊松方程(1)近似地用差分方程来表示:

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j}) + \frac{1}{\Delta y^2} (\phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}) = N_{i,j} \quad (5)$$

把式(3)、(4)代入上一方程,令相同的正弦项和余弦项的系数相等,并注意到边界条件为: $\phi(0, y) = 0$, $\phi(a, y) = \phi_a + A \sin 2\pi\beta y$ ($A \sin 2\pi\beta y$ 为阳极上高频场的表达式, β 为相位常数),则可得到关于 $\phi_i^{(k)}$ 和 $\phi_i^{(k)}$ 的 $(2N-1)$ 组 $(M-1)$ 阶代数方程组:

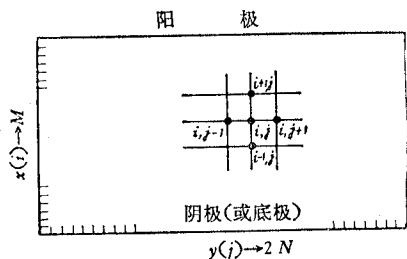


图2 泊松方程求解示意图

$$\left. \begin{aligned}
 &\phi_{i-1}^{(0)} - 2\phi_i^{(0)} + \phi_{i+1}^{(0)} = \Delta x^2 a_i^{(0)}, \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, M-1; \quad \phi_0^{(0)} = 0, \phi_M^{(0)} = \phi_d) \\
 &\phi_{i-1}^{(k)} - 2 \left[1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{2N} \right) \right] \phi_i^{(k)} + \phi_{i+1}^{(k)} = \Delta x^2 a_i^{(k)}, \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, M-1; \quad \phi_0^{(k)} = \phi_M^{(k)} \equiv 0) \\
 &\phi_{i-1}^{(k)} - 2 \left[1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{2N} \right) \right] \phi_i^{(k)} + \phi_{i+1}^{(k)} = \Delta x^2 b_i^{(k)}, \\
 &\quad (i = 1, 2, \dots, M-1; \quad \phi_0^{(k)} \equiv 0, \quad \phi_M^{(k)} = \begin{cases} A & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}) \\
 &\quad (k = 1, 2, \dots, N-1)
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(6)有 $(2N-1)$ 个代数方程组,每一方程组有 $(M-1)$ 个待定系数和 $(M-1)$ 个方程.这些方程组还都是“三对角线”形状的.

解这类方程组最常用的也是最方便的办法是追赶法.现举例说明如下:

设有“三对角线”方程组:

$$\left. \begin{aligned}
 &B_1 x_1 + C_1 x_2 = D_1 \\
 &A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = D_2 \\
 &\quad \vdots \\
 &A_i x_{i-1} + B_i x_i + C_i x_{i+1} = D_i \\
 &\quad \vdots \\
 &A_N x_{N-1} + B_N x_N = D_N
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

设 $x_{i-1} = P_{i-1} x_i + Q_{i-1}$,代入上式中第 i 个方程并消去其中的 x_{i-1} ,可得

$$x_i = - \frac{C_i x_{i+1}}{A_i P_{i-1} + B_i} + \frac{D_i - A_i Q_{i-1}}{A_i P_{i-1} + B_i} = P_i x_{i+1} + Q_i \quad (8)$$

式中,

$$P_i = - \frac{C_i}{A_i P_{i-1} + B_i}, \quad Q_i = \frac{D_i - A_i Q_{i-1}}{A_i P_{i-1} + B_i} \quad (9)$$

式(9)是一对递推公式,若已知 P_{i-1} , Q_{i-1} 即可推出 P_i 和 Q_i ,直至 P_{N-1} , Q_{N-1} , Q_N 等($P_N = 0$).

由式(7)中的第一式可得

$$x_1 = - \frac{C_1 x_2}{B_1} + \frac{D_1}{B_1} = P_1 x_2 + Q_1, \quad \left(P_1 = - \frac{C_1}{B_1}, \quad Q_1 = \frac{D_1}{B_1} \right) \quad (10)$$

经过这一步骤,式(7)可化为:

$$\left. \begin{aligned}
 &x_1 = P_1 x_2 + Q_1 \\
 &x_2 = P_2 x_3 + Q_2 \\
 &\quad \vdots \\
 &x_i = P_i x_{i+1} + Q_i \\
 &\quad \vdots \\
 &x_N = Q_N
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(11)中 x_N 已明显给出,这样经过由 N 到1的回代,就可得到方程组的全部解.

3. 实数序列与复数序列之间的转换

上面介绍的追赶法一节, 讲的是电荷密度分布 $N_{i,j}$ 的实傅氏系数与电位 $\phi_{i,j}$ 的实傅氏系数之间的关系, 而 FFT 算法是对复数序列 F_j 及其复数系数 A_k 讲的, 所以为了有效地利用 FFT 法, 就得适当地构造复数序列, 并给出实系数和复系数之间的转换关系.

对于固定的 i (即固定的 x 坐标), 若用实数序列 $\{f_j\}$, $j = 0, 1, \dots, 2N-1$ 表示序列 $\phi_{i,j}$ 或 $N_{i,j}$, 则它们的实傅氏展开式及其系数就是:

$$f_j = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \left(a_k \cos \frac{2\pi k j}{2N} + b_k \sin \frac{2\pi k j}{2N} \right), \quad j = 0, 1, \dots, 2N-1 \quad (12)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f_j \cos \frac{2\pi k j}{2N} \\ b_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f_j \sin \frac{2\pi k j}{2N} \end{aligned} \right\} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (13)$$

构造复数序列:

$$F_j = f_{2j} + i f_{2j+1}, \quad (j = 0, 1, \dots, N-1) \quad (14)$$

F_j 的傅氏展开式和系数是

$$\left. \begin{aligned} F_j &= \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{i \frac{2\pi k j}{N}} \\ A_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{-i \frac{2\pi k j}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left(f_{2j} \cos \frac{2\pi k j}{N} + f_{2j+1} \sin \frac{2\pi k j}{N} \right) \right. \\ &\quad \left. + i \left(-f_{2j} \sin \frac{2\pi k j}{N} + f_{2j+1} \cos \frac{2\pi k j}{N} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

令 $A_k = \bar{a}_k + i \bar{b}_k$, 则

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f_{2j} \cos \frac{2\pi k j}{N} + f_{2j+1} \sin \frac{2\pi k j}{N} \right) \\ \bar{b}_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f_{2j+1} \cos \frac{2\pi k j}{N} - f_{2j} \sin \frac{2\pi k j}{N} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

同样有

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{N-k} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f_{2j} \cos \frac{2\pi(N-k)j}{N} + f_{2j+1} \sin \frac{2\pi(N-k)j}{N} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f_{2j} \cos \frac{2\pi k j}{N} - f_{2j+1} \sin \frac{2\pi k j}{N} \right) \\ \bar{b}_{N-k} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f_{2j} \sin \frac{2\pi k j}{N} + f_{2j+1} \cos \frac{2\pi k j}{N} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

整理式(16)、(17)可得

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_k + \bar{a}_{N-k} &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_{2j} \cos \frac{2\pi k j}{N} \\ \bar{a}_k - \bar{a}_{N-k} &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_{2j+1} \sin \frac{2\pi k j}{N} \\ \bar{b}_k + \bar{b}_{N-k} &= \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_{2j+1} \cos \frac{2\pi k j}{N} \\ \bar{b}_k - \bar{b}_{N-k} &= -\frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_{2j} \sin \frac{2\pi k j}{N} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

由此可推得

$$\left. \begin{aligned} (\bar{b}_k + \bar{b}_{N-k}) \cos \frac{\pi k}{N} - (\bar{a}_k - \bar{a}_{N-k}) \sin \frac{\pi k}{N} + (\bar{a}_k + \bar{a}_{N-k}) &= 2a_k \\ (\bar{b}_k + \bar{b}_{N-k}) \sin \frac{\pi k}{N} + (\bar{a}_k - \bar{a}_{N-k}) \cos \frac{\pi k}{N} - (\bar{b}_k - \bar{b}_{N-k}) &= 2b_k \\ -(\bar{b}_k + \bar{b}_{N-k}) \cos \frac{\pi k}{N} + (\bar{a}_k - \bar{a}_{N-k}) \sin \frac{\pi k}{N} + (\bar{a}_k + \bar{a}_{N-k}) &= 2a_{N-k} \\ (\bar{b}_k + \bar{b}_{N-k}) \sin \frac{\pi k}{N} + (\bar{a}_k - \bar{a}_{N-k}) \cos \frac{\pi k}{N} + (\bar{b}_k - \bar{b}_{N-k}) &= 2b_{N-k} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left(k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right)$$

式(19)是已知复系数 $\bar{a}_k$ 、 $\bar{b}_k$ 求实系数 a_k 、 b_k 的关系式。同样由上式亦可推得由实系数求复系数的关系式:

$$\left. \begin{aligned} (b_k + b_{N-k}) \cos \frac{\pi k}{N} - (a_k - a_{N-k}) \sin \frac{\pi k}{N} + (a_k + a_{N-k}) &= 2\bar{a}_k \\ (b_k + b_{N-k}) \sin \frac{\pi k}{N} + (a_k - a_{N-k}) \cos \frac{\pi k}{N} - (b_k - b_{N-k}) &= 2\bar{b}_k \\ -(b_k + b_{N-k}) \cos \frac{\pi k}{N} + (a_k - a_{N-k}) \sin \frac{\pi k}{N} + (a_k + a_{N-k}) &= 2\bar{a}_{N-k} \\ (b_k + b_{N-k}) \sin \frac{\pi k}{N} + (a_k - a_{N-k}) \cos \frac{\pi k}{N} + (b_k - b_{N-k}) &= 2\bar{b}_{N-k} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left(k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \right)$$

比较式(19)和式(20)可见,两者除 a_k 、 b_k 与 $\bar{a}_k$ 、 $\bar{b}_k$ 的位置互换外,形式是完全一样的。所以在编制程序时,程序是共同的。

4. FFT 算法

前面已经提到,FFT 是计算 N 个复数序列 $\{F_j\}$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$) 的有限离散傅氏变换。式(15)表示了这一关系,其中的第二式又称为第一式的逆变换,两者的计算是等价的。令 $W_N = e^{i2\pi/N}$, 则有

$$F_j = \sum_{k=0}^{N-1} A_k W_N^{kj}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (21)$$

直接计算上式大约需要 N^2 次运算, 而用 FFT 算法, 其运算量约可减少为 $N \log_2 N$ 次. 当 N 很大时, 其优点十分明显. 现证明如下:

设 $N = r \times s$, 把式 (21) 中的下标 j, k 分解:

$$\left. \begin{aligned} j &= j_1 r + j_0, \quad \text{记为 } j = (j_1, j_0) \\ k &= k_1 s + k_0, \quad \text{记为 } k = (k_1, k_0) \\ j_0, k_1 &= 0, 1, \dots, r-1; \quad k_0, j_1 = 0, 1, \dots, s-1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

注意到 $W_N^N = 1$ 这一事实, 则有

$$W_N^{jk} = W_N^{(j_1 r + j_0)(k_1 s + k_0)} = W_N^{j_0 k_0} W_r^{j_1 k_1} W_s^{j_0 k_0} \quad (23)$$

将式 (23) 代入式 (21), 得

$$F(j_1, j_0) = \sum_{k_0=0}^{s-1} \left[\sum_{k_1=0}^{r-1} A(k_1, k_0) W_r^{j_1 k_1} \right] W_s^{j_0 k_0} W_N^{j_0 k_0} = \sum_{k_0=0}^{s-1} A_1(j_0, k_0) W_s^{j_0 k_0} \quad (24)$$

式中,

$$A_1(j_0, k_0) = \left[\sum_{k_1=0}^{r-1} A(k_1, k_0) W_r^{j_1 k_1} \right] W_N^{j_0 k_0} \quad (25)$$

按 j_0, k_0 取值方式, 序列 A_1 中有 N 个元素, 每一元素要运算 r 次, 共需 Nr 次运算. 同样从序列 A_1 计算序列 F 需要 Ns 次运算, 因而从序列 A 计算序列 F 所需要的运算次数是 $T = N(r + s)$.

若 $N = r_1 \times r_2 \times r_3 \times \dots \times r_m$, 可将下标 j 和 k 分解成 m 层, 重复 m 次上述式 (24)、(25) 的过程, 所需的运算次数是 $T = N(r_1 + r_2 + \dots + r_m)$. 为使 T 达最小值, 应有 $r_1 = r_2 = \dots = r_m = r$, 则 $N = r^m$, $m = \log_r N$. 因此,

$$T_{\min} = Nrm = Nr \log_r N = N \log_2 N \cdot \frac{r}{\log_2 r} \quad (26)$$

不同 r 时的运算次数列于表 I. 可见 $r = 3$ 时运算次数最少, 但 $r = 2$ 时可以减少乘法运算, 具有一定的优越性. $r = 2, N = 2^m$ 的方法推导如下:

$$\left. \begin{aligned} j &= j_{m-1} 2^{m-1} + j_{m-2} 2^{m-2} + \dots + j_1 2 + j_0 \\ &= (j_{m-1}, j_{m-2}, \dots, j_1, j_0) \\ k &= k_{m-1} 2^{m-1} + k_{m-2} 2^{m-2} + \dots + k_1 2 + k_0 \\ &= (k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_1, k_0) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中 k_v, j_v 都等于 0 或 1 ($v = 0, 1, \dots, m-1$).

由此式 (21) 可以写成

$$\begin{aligned} F(j_{m-1}, j_{m-2}, \dots, j_1, j_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{m-1}=0}^1 \\ &\quad \cdot A(k_{m-1}, k_{m-2}, \dots, k_1, k_0) W_N^{kj} \\ &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{m-1}=0}^1 A(k_{m-1}, \dots, k_0) W_N^{j_0 k_{m-1} \cdot 2^{m-1}} W_N^{j(k_{m-2} 2^{m-2} + \dots + k_0)} \end{aligned} \quad (28)$$

表 1

r	$r/\log_2 r$
2	2.00
3	1.88
4	2.00
5	2.15
6	2.31
7	2.49
8	2.67
9	2.82
10	3.01

令

$$\begin{aligned} A_1(j_0, k_{m-2}, \dots, k_1, k_0) &= \sum_{k_{m-1}=0}^1 A(k_{m-1}, \dots, k_1, k_0) W_N^{j_0 k_{m-1} 2^{m-1}} \\ &= A(0, k_{m-2}, \dots, k_1, k_0) + A(1, k_{m-2}, \dots, k_1, k_0) W_N^{j_0 \cdot 1 \cdot 2^{m-1}} \end{aligned} \quad (29)$$

将式(29)代入式(28),得

$$\begin{aligned} F(j_{m-1}, j_{m-2}, \dots, j_0) &= \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{m-2}=0}^1 \\ &\cdot A_1(j_0, k_{m-2}, \dots, k_1, k_0) W_N^{j_0(k_{m-2} 2^{m-2} + \dots + k_0)} = \sum_{k_0=0}^1 \sum_{k_1=0}^1 \dots \sum_{k_{m-3}=0}^1 \\ &\cdot \left[\sum_{k_{m-2}=0}^1 A_1(j_0, k_{m-2}, \dots, k_1, k_0) W_N^{(j_1 2 + j_0) k_{m-2} 2^{m-2}} \right] W_N^{j_0(k_{m-3} 2^{m-3} + \dots + k_0)} \end{aligned} \quad (30)$$

又令

$$\begin{aligned} A_2(j_0, j_1, k_{m-3}, \dots, k_1, k_0) &= \sum_{k_{m-2}=0}^1 A_1(j_0, k_{m-2}, \dots, k_1, k_0) W_N^{(j_1 2 + j_0) k_{m-2} 2^{m-2}} \\ &= A_1(j_0, 0, k_{m-3}, \dots, k_1, k_0) + A_1(j_0, 1, k_{m-3}, \dots, k_1, k_0) W_N^{j_1 j_0 \cdot 0, \dots, 0} \end{aligned} \quad (31)$$

如此下去,

$$\begin{aligned} A_l(j_0, j_1, \dots, j_{l-1}, k_{m-(l+1)}, \dots, k_1, k_0) \\ &= A_{l-1}(j_0, j_1, \dots, j_{l-2}, 0, k_{m-l-1}, \dots, k_1, k_0) \\ &+ A_{l-1}(j_0, j_1, \dots, j_{l-2}, 1, k_{m-l-1}, \dots, k_1, k_0) W_N^{(j_{l-1} \dots j_0, 0, \dots, 0)} \end{aligned} \quad (32)$$

最后得

$$F(j_{m-1}, j_{m-2}, \dots, j_1, j_0) = A_m(j_0, j_1, \dots, j_{m-2}, j_{m-1}) \quad (33)$$

可见,如果序列 $\{A_k\}$ 的初始排列是自然次序,那么最后得到的傅氏序列 $\{F_j\}$ 是逆的二进制次序,即若 A_k 的下标为 $k = k_{m-1} 2^{m-1} + k_{m-2} 2^{m-2} + \dots + k_1 2 + k_0$, 那么得到的 F_j 的下标是 $j = k_{\text{Rev}} = k_0 2^{m-1} + k_1 2^{m-2} + \dots + k_{m-2} 2 + k_{m-1}$. 反之,若初始序列是按逆的二进制次序排列,那么最后结果序列是按自然次序排列的.

以上我们详细介绍了 FFT 算法及其求解泊松方程(包括追赶法)的完整思路.从编制程序来说,要设立三个过程,它们分别对应于傅氏变换的正、逆过程,复傅氏系数和实傅氏系数的相互转换以及追赶法公式.

程序中还要定义四个场(即数组),分别为电荷场(存放 $N_{i,j}$),电荷傅氏系数场(存放电荷的傅氏系数),电位场(存放 $\phi_{i,j}$)和电位傅氏系数场(存放电位的傅氏系数).

求解泊松方程的具体步骤可归纳如下:

- (1) 已知 $N_{i,j}$ 利用 FFT 求出其复系数 $\bar{a}_i^{(k)}$ 、 $\bar{b}_i^{(k)}$;
- (2) 由系数转换公式求出实系数 $a_i^{(k)}$ 、 $b_i^{(k)}$;
- (3) 利用 $N_{i,j}$ 与 $\phi_{i,j}$ 的傅氏系数关系,用追赶法求出 $\phi_{i,j}$ 展开式中的实系数 $\phi_i^{(k)}$ 、 $\psi_i^{(k)}$;
- (4) 利用系数转换公式求出复系数 $\bar{\phi}_i^{(k)}$ 、 $\bar{\psi}_i^{(k)}$;
- (5) 利用 FFT (逆过程)求出 $\phi_{i,j}$.

结 论

我们成功地应用 FFT 求解了空间电荷场, 计算了正交场器件中电子和波的相互作用, 计算结果和样管特性是相当吻合的^[2]。看来, 计算机对于求解复杂的、非线性的正交场相互作用是必不可少的工具。计算机给出的结果可以作为设计良好的正交场器件的理论依据。

计算机模拟之所以取得了成功, 采用 FFT 求解泊松方程是其中的一个关键。实践证明, FFT 作为一种快速的算法是行之有效的, 效果十分明显。

本文介绍的方法, 可以推广运用于某些偏微分方程边值问题的数值求解, 只要其满足文中交代的特定条件即可。

参 考 文 献

- [1] S. P. Yu and G. P. Kooyers, *J. Appl. Phys.*, 36 (1965), 2550.
- [2] 舒士畏, 陈增圭, 张世昌, 朱敏慧, 赵瑞清, 电子学通讯, 1(1979), 147.
- [3] R. W. Hockney, *A Fast Direct Solution of Poisson's Equation Using Fourier Analysis*, Tech. Rep. CS6, Apr. 1964, Computer Sci. Div., Stanford Univ.
- [4] S. P. Yu and P. N. Hess, *IRE Trans. on ED*, ED-9 (1962), 51.