

基于 q 梯度的仿射投影算法及其稳态均方收敛分析

王世元^{*①②} 史春芬^{①②} 蒋云翔^③ 王文月^{①②} 钱国兵^{①②}

^①(西南大学电子信息工程学院 重庆 400715)

^②(重庆非线性电路和智能信息处理重点实验室 重庆 400715)

^③(清华大学深圳研究生院 深圳 518055)

摘要: q 梯度是基于 q 微分的广义梯度。为了进一步提高仿射投影算法(APA)的滤波性能,该文基于最小均方误差准则将 q 梯度应用于APA进而产生一种新的 q -APA,在高斯噪声环境下选择合适的 q 值可以取得理想的滤波性能。通过理论分析,提出了保证算法收敛的充分条件,并计算出表征滤波性能的稳态额外均方误差(EMSE)。除此之外,为了进一步提高算法的滤波性能,提出一个变 q 的APA(V- q -APA)。在高斯噪声环境下,将 q -APA和V- q -APA应用于系统辨识中。仿真结果表明:与传统的APA和变 q 的最小化均方(V- q -LMS)算法相比, q -APA和V- q -APA均具有更好的滤波性能。

关键词: 信号处理; q 微分; 误差准则; 仿射投影算法; 均方收敛分析

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)10-2402-06

DOI: 10.11999/JEIT171125

q -affine Projection Algorithm and Its Steady-state Mean Square Convergence Analysis

WANG Shiyuan^{①②} SHI Chunfen^{①②} JIANG Yunxiang^③

WANG Wenyue^{①②} QIAN Guobing^{①②}

^①(College of Electronic and Information Engineering, Southwest University, Chongqing 400715, China)

^②(Chongqing Key Laboratory of Nonlinear Circuits and Intelligent Information Processing, Chongqing 400715, China)

^③(Graduate School at Shenzhen of Tsinghua University, Shenzhen 518055, China)

Abstract: The q -gradient is a generalized gradient based on the q -derivative concept. To improve the filtering performance of the Affine Projection Algorithm (APA), the q -gradient is applied to APA based on the minimum of the recent mean square errors, generating a novel q -Affine Projection Algorithm (q -APA). The q -APA with appropriate setting of q achieves desirable filtering performance in the presence of Gaussian noises. A sufficient condition for guaranteeing convergence of the proposed q -APA is also presented, and its steady-state Excess Mean Square Error (EMSE) of q -APA is obtained theoretically to evaluate the filtering performance. In addition, the Variable q -APA (V- q -APA) is developed to improve further the filtering performance. Simulations in the context of system identification demonstrate the superior filtering performance of the proposed algorithms compared with APA and Variable q -Least Mean Square (V- q -LMS) algorithm in the presence of Gaussian noise.

Key words: Signal processing; q -derivative; Error criterion; Affine Projection Algorithm (APA); Mean square convergence analysis

收稿日期: 2017-11-28; 改回日期: 2018-06-14; 网络出版: 2018-07-30

*通信作者: 王世元 wsy@swu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61671389, 61701419), 中国博士后基金(2017M610583, 2017M620783), 重庆博士后科研基金(Xm2017107, Xm2017104)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61671389, 61701419), China Postdoctoral Science Foundation Funded Project (2017M610583, 2017M620783), Chongqing Postdoctoral Science Foundation Special Funded Project (Xm2017107, Xm2017104)

1 引言

自适应滤波算法已被广泛应用于噪声消除和系统辨识等领域中。根据不同的误差准则可产生不同的滤波算法^[1-4], 包括最小化均方(Least Mean Square, LMS)算法^[2], 仿射投影算法^[3](Affine Projection Algorithm, APA)和递归最小二乘(Recursive Least-Squares, RLS)算法^[4]等。LMS算法因采用当前瞬时平方误差作为误差准则, 计算最简单。尽管LMS算法具有低复杂度和易实现的特点, 但其收敛速度较慢^[5]。为了提高其收敛速度和滤波精度, 文献^[4]提出了基于所有输入误差及最小二乘(Least Squares, LS)^[6-9]准则的RLS算法, 但也同时增加了其计算复杂度。为了解决收敛速度和计算复杂度之间的矛盾, 文献^[3]利用部分误差提出了APA算法, 其收敛速度和滤波精度介于LMS和RLS之间。

为进一步提高APA的收敛性能, 本文提出了一种基于 q 梯度^[10]的APA(q -Affine Projection Algorithm, q -APA)。 q 微积分已经被广泛应用于统计学和信号处理等领域中^[11,12], 可以提供更好的稳态性能^[11]。此外, 本文提出了变 q 的APA(Variable q -Affine Projection Algorithm, V- q -APA)。为了证明所提算法的性能, 本文对 q -APA进行了性能分析, 并推导出其稳态时的额外均方误差(Excess Mean Square Error, EMSE)。

2 背景介绍

2.1 APA算法

假设目标是通过输入输出数据对 $\{\mathbf{u}_i, d_i\}$ 学习一个未知的连续输入输出映射 $f: \mathbb{R}^{M \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$, 其中, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 是时刻 i 的输入数据; $d_i \in \mathbb{R}$ 是其对应的期望输出。

APA利用时刻 i 的最近 K 个数据进行滤波器的权重更新运算, 因此, 其代价函数可以表示为

$$J(\mathbf{w}) = \sum_{k=i-K+1}^i e_k^2 = \sum_{k=i-K+1}^i (d_k^2 - d_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{w}_{i-1} - d_k \mathbf{w}_{i-1}^T \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_{i-1}^T \mathbf{w}_{i-1} \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{w}_{i-1} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$ 是最优权重在 $i-1$ 时刻的权重估计值, $e_k = d_k - \mathbf{u}_k^T \mathbf{w}_{i-1}$ 是预测误差。

通过采用最速下降法^[13], 可以得到APA算法的权重更新方式为

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} - \frac{\mu}{2} \nabla_{\mathbf{w}} J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}_{i-1} + \mu \mathbf{U}_i \mathbf{e}_i \quad (2)$$

其中, $\mu > 0$ 是学习步长; 输入矩阵 $\mathbf{U}_i = [\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i-1}, \dots, \mathbf{u}_{i-K+1}]$; $\mathbf{d}_i = [d_i, d_{i-1}, \dots, d_{i-K+1}]^T$ 是期望

输出向量; 预测误差向量 $\mathbf{e}_i = \mathbf{d}_i - \mathbf{U}_i^T \mathbf{w}_{i-1}$, $\mathbf{e}_i = [e_i, e_{i-1}, \dots, e_{i-K+1}]^T$ 。以下将根据式(2)进行讨论。

2.2 q 微分的综述

q 梯度是基于 q 微分^[10-12]的概念。给出一个函数 $f(x)$, 关于变量 x 的 q 微分可以表示为 $D_{q,x} f(x)$, 且

$$D_{q,x} f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \quad (3)$$

其中, $x \neq 0$; q 是一个正数且当 $q \rightarrow 1$ 时, q 微分就转换为传统的微分。

对于向量 \mathbf{x} 的函数 $F(\mathbf{x})$, 定义 $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, 因此, 关于 \mathbf{x} 的 q 梯度被定义为

$$\nabla_{\mathbf{q}, \mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = [\nabla_{q_1, x_1} F(\mathbf{x}), \nabla_{q_2, x_2} F(\mathbf{x}), \dots, \nabla_{q_n, x_n} F(\mathbf{x})]^T \quad (4)$$

3 算法原理

用 q 梯度取代APA代价函数中的梯度可以得到新的权重更新方式即 q -APA:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{q}, \mathbf{w}} J(\mathbf{w}) &= \sum_{k=i-K+1}^i \nabla_{\mathbf{q}, \mathbf{w}} (d_k^2 - 2d_k \mathbf{u}_k^T \mathbf{w}_{i-1} \\ &\quad + \mathbf{w}_{i-1}^T \mathbf{w}_{i-1} \mathbf{u}_k^T \mathbf{u}_k) \\ &= -2\mathbf{U}_i \mathbf{d}_i + \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^T \mathbf{g} \odot \mathbf{w}_{i-1} \end{aligned} \quad (5)$$

其中, \odot 表示点积运算; $\mathbf{g} = \mathbf{q} + \mathbf{1}$ 且 $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_M]^T$, $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^{M \times 1}$ 。和传统的梯度相比, 此时权重更新公式增加了系数 \mathbf{g} 。又因 \mathbf{g} 可以表示为 $\mathbf{g} = \|\mathbf{g}\| \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}$, 其中 $\frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|}$ 表示 \mathbf{g} 的单位向量(调整滤波器输出的方向), $\|\mathbf{g}\| = (g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_M^2)^{1/2}$ 为 \mathbf{g} 的模, 用于调整滤波器输出值的大小。因此, q -APA算法的权重更新公式为

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \frac{1}{2} (2\mu_1 \mathbf{U}_i \mathbf{d}_i - \mu \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^T \mathbf{g} \odot \mathbf{w}_{i-1}) \quad (6)$$

其中, μ_1 和 μ 分别是 $\mathbf{U}_i \mathbf{d}_i$ 和 $\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^T \mathbf{g} \odot \mathbf{w}_{i-1}$ 的学习步长。在权重向量各向同性的准则下, 取 $q_1 = q_2 = \dots = q_M = q$ 。由于常系数可归结到步长中, 为使算法规范化, 设置 $\mu_1 = \frac{q+1}{2} \mu$, 因此, q -APA的权重向量更新方式为

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \mu \mathbf{G} \mathbf{U}_i \mathbf{e}_i \quad (7)$$

其中, $\mathbf{G} = \frac{q+1}{2} \mathbf{I}_M$ 是对角矩阵。 $\mathbf{I}_M \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 是单位矩阵。从式(7)可知, 系数 \mathbf{G} 影响 q -APA的滤波性能。

为了全面评价滤波性能, 比较 q -APA与APA和RLS的计算复杂度。假定滤波器阶数为 M 。执行一次仿真, APA需 $4KM$ 次运算; q -APA需 $6KM$ 次

运算; RLS需 $7M^2+3M$ 次运算。由此可知, q -APA计算复杂度略高于APA。 q -APA与RLS的计算复杂度关系由 M 和 K 具体数值决定。

4 算法性能分析

为了在理论上验证 q -APA算法的性能, 本节将对 q -APA进行均方性能分析。假设在第 i 时刻滤波器的期望输出 $d_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{w}^* + v_i$, $\mathbf{w}^* = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$ 是需要估计的最优权重向量, v_i 表示干扰噪声。如果只利用当前输入 \mathbf{u}_i 估计滤波器期望输出 d_i , 且 $y_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{w}_{i-1}$ 时, e_i 可以表示为

$$\begin{aligned} e_i &= d_i - y_i = \mathbf{u}_i^T (\mathbf{w}^* - \mathbf{w}_{i-1}) + v_i \\ &= \mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1} + v_i = e_{a,i} + v_i \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $\tilde{\mathbf{w}}_{i-1}$ 是 $i-1$ 时刻的权重误差向量, $e_{a,i} = \mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}$ 表示超前误差。为了进行理论分析, 需给定以下假设^[14,15]:

A1: 噪声 v_i 是零均值的, 独立同分布的, 且独立于输入信号 \mathbf{u}_i 。A2: 超前误差 $e_{a,i}$ 是零均值且和噪声 v_i 是独立的。A3: 滤波器的运行时间足够长, 因此, $e_{a,i}$ 是 Gaussian 分布的, 且 $\mathbf{u}_i^T \mathbf{G} \mathbf{u}_i$ 和 e_i^2 是渐进无关的。

假设A1~A3已广泛应用于自适应滤波器的理论分析中^[14,15]。

4.1 收敛性分析

用 \mathbf{w}^* 减去式(7)的两端, 可以得到

$$\tilde{\mathbf{w}}_i = \tilde{\mathbf{w}}_{i-1} - \mu \mathbf{G} \mathbf{U}_i e_i \quad (9)$$

对式(9)两边同时取平方和期望可以得到

$$\begin{aligned} E[\|\tilde{\mathbf{w}}_i\|^2] &= E[\|\tilde{\mathbf{w}}_{i-1}\|^2] - 2\mu E[e_i^T \mathbf{U}_i^T \mathbf{G} \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}] \\ &\quad + \mu^2 E[(\mathbf{G} \mathbf{U}_i e_i)^T \mathbf{G} \mathbf{U}_i e_i] \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\|\tilde{\mathbf{w}}_i\|^2 = \tilde{\mathbf{w}}_i^T \tilde{\mathbf{w}}_i$ 。当算法收敛时, 权重误差向量满足 $E[\|\tilde{\mathbf{w}}_i\|^2] \leq E[\|\tilde{\mathbf{w}}_{i-1}\|^2]$, 因此,

$$0 < \frac{q+1}{2} \mu < \frac{2E[e_i^T \mathbf{U}_i^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}]}{E[(\mathbf{U}_i e_i)^T \mathbf{U}_i e_i]} \quad (11)$$

其中, $\mathbf{U}_i^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1} = [\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-1}^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}, \dots, \mathbf{u}_{i-K+1}^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}]^T$ 满足高斯分布函数^[16]。当滤波器达到稳态时, 可以得到 $E[\mathbf{u}_i^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}] = \dots = E[\mathbf{u}_{i-K+1}^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}]$ 且 $E[e_i] = E[e_{i-1}] = \dots = E[e_{i-K+1}]$ 。因此, 式(11)右边的分子部分可以简化为

$$\begin{aligned} 2E[e_i^T \mathbf{U}_i^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}] &= 2E\left[\sum_{k=i-K+1}^i e_k e_{a,k}\right] \\ &\approx 2KE[e_i e_{a,i}] \end{aligned} \quad (12)$$

在假设A3下, 式(11)右边部分的分子可以简化为

$$\begin{aligned} &E[(\mathbf{U}_i e_i)^T \mathbf{U}_i e_i] \\ &= E\left[\left(\sum_{k=i-K+1}^i \mathbf{u}_k e_k\right)^T \left(\sum_{k=i-K+1}^i \mathbf{u}_k e_k\right)\right] \\ &\approx K^2 \text{Tr}(\mathbf{R}_u) E[e_i^2] \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{R}_u = \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$, $\text{Tr}(\cdot)$ 表示矩阵的求迹运算。将式(12)和式(13)代入式(11), 可以得到 q -APA收敛的条件

$$0 < (q+1) \mu < \frac{4E[e_i e_{a,i}]}{K \text{Tr}(\mathbf{R}_u) E[e_i^2]} \quad (14)$$

由于 $E[e_i^2] = E[(e_{a,i} + v)^2] = E[e_{a,i}^2] + \sigma_v^2$, 且 $E[e_i e_{a,i}] = E[(e_{a,i} + v_i) e_{a,i}] = E[e_{a,i}^2]$, 类似于LMS, 式(14)可以化简为

$$0 < (q+1) \mu < \frac{4}{K \text{Tr}(\mathbf{R}_u)} \quad (15)$$

4.2 稳态均方性能分析

EMSE常用来衡量滤波器的稳态性能, 表示为 $S = \lim_{i \rightarrow \infty} E[e_i^2]$ 。对式(10)两边同时取极限可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} E[\|\tilde{\mathbf{w}}_i\|^2] &= \lim_{i \rightarrow \infty} E[\|\tilde{\mathbf{w}}_{i-1}\|^2] \\ &\quad - 2\mu \lim_{i \rightarrow \infty} E[e_i^T \mathbf{U}_i^T \mathbf{G} \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}] \\ &\quad + \mu^2 \lim_{i \rightarrow \infty} E[(\mathbf{G} \mathbf{U}_i e_i)^T \mathbf{G} \mathbf{U}_i e_i] \end{aligned} \quad (16)$$

当滤波器达到稳态时, 权重误差向量满足

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E[\|\tilde{\mathbf{w}}_i\|^2] = \lim_{i \rightarrow \infty} E[\|\tilde{\mathbf{w}}_{i-1}\|^2], \text{ 因此, 式(16)可以被简化为}$$

$$2 \lim_{i \rightarrow \infty} E[e_i^T \mathbf{U}_i^T \tilde{\mathbf{w}}_{i-1}] = \mu \lim_{i \rightarrow \infty} E[(\mathbf{U}_i e_i)^T \mathbf{G} \mathbf{U}_i e_i] \quad (17)$$

基于式(12)和式(13), 式(17)可以被简化为

$$2 \lim_{i \rightarrow \infty} E[e_i e_{a,i}] = \mu K \lim_{i \rightarrow \infty} E[(\mathbf{u}_i e_i)^T \mathbf{G} \mathbf{u}_i e_i] \quad (18)$$

定义 $\mathbf{R}_q = \mathbf{G} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$, 结合假设A3, 式(18)右边部分可以简化为

$$\mu K \lim_{i \rightarrow \infty} E[(\mathbf{u}_i e_i)^T \mathbf{G} \mathbf{u}_i e_i] = \mu K \text{Tr}(\mathbf{R}_q) \lim_{i \rightarrow \infty} E[e_i^2] \quad (19)$$

假设 v_i 是零均值的高斯噪声, 且其噪声方差为 σ_v^2 。接下来将推导出 q -APA稳态时的理论EMSE值。

在假设A1和A2下, 式(18)左边的部分简化为

$$2 \lim_{i \rightarrow \infty} E[e_i e_{a,i}] = 2 \lim_{i \rightarrow \infty} E[(e_{a,i} + v_i) e_{a,i}] = 2S \quad (20)$$

同样, 通过简单计算式(19)右边为

$$\begin{aligned} &\mu K \text{Tr}(\mathbf{R}_q) \lim_{i \rightarrow \infty} E[e_i^2] \\ &= \mu K \text{Tr}(\mathbf{R}_q) \lim_{i \rightarrow \infty} E[(e_{a,i} + v_i)(e_{a,i} + v_i)] \\ &= \mu K \text{Tr}(\mathbf{R}_q) (S + \sigma_v^2) \end{aligned} \quad (21)$$

将式(20)和式(21)代入式(18), q -APA的稳态EMSE满足

$$S_{q\text{-APA}} = \frac{\mu K \text{Tr}(\mathbf{R}_q) \sigma_v^2}{2 - \mu K \text{Tr}(\mathbf{R}_q)} \quad (22)$$

其中, $\text{Tr}(\mathbf{R}_q) = \frac{q+1}{2} \text{Tr}(\mathbf{R}_u)$, 当 $q < 1$ 时, 可以得到 $S_{q\text{-APA}} < S_{\text{APA}} = \frac{\mu K \text{Tr}(\mathbf{R}_u) \sigma_v^2}{2 - \mu K \text{Tr}(\mathbf{R}_u)}$ 。

由于 $\text{Tr}(\mathbf{R}_q)$ 是关于 q 的一个单调递增函数, 式(22)中 q -APA的稳态EMSE也是关于 q 的单调递增函数, 不同的 q 值可以形成 q -APA的不同滤波性能。当 $q < 1$ 时, 和APA相比, q -APA可以获得较低的稳态EMSE。当 $q > 1$ 时, q -APA产成一个较大的稳态EMSE。该特性可在第6节仿真中的图1(b)观察。

5 算法拓展

从第4节可以看出, q 值的选取对算法的收敛速度和滤波精度产生了重要的影响。因此, 为了同时提高稳态性能和收敛速度, 这里提出了V- q -APA。V- q -APA算法的主要思想是: 在初始阶段提供一个较大的 q 值, 当算法达到稳态时, 提供一个较小的 q 值。基于此, 这里提出了 q 参数的自适应调整规则, 即

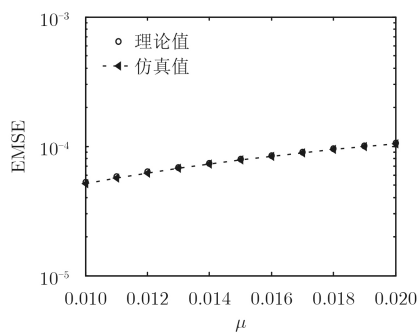
$$q_{i+1} = \begin{cases} q_{\text{up}}, & \psi_{i+1} > q_{\text{up}} \\ \psi_{i+1}, & \text{其他} \end{cases} \quad (23)$$

其中, $q_{\text{up}} = \frac{4}{K\mu\text{Tr}(\mathbf{R}_u)} - 1$ 是根据式(14)提出的需要满足算法收敛的条件, $\psi_{i+1} = \alpha\psi_i + \beta|e_{i+1}|$, ($0 < \alpha < 1, \beta > 0$), $|e_{i+1}| = \sum_{k=i-K+1}^i |e_k|$ 为 e_i 的1范数。

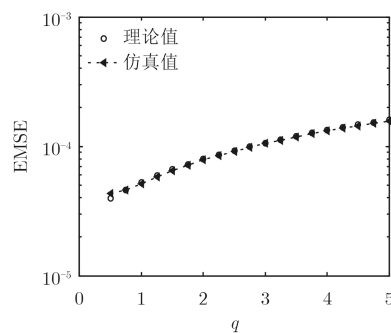
式(23)根据 $|e_{i+1}|$ 自适应调节 q 值。在滤波器的初始阶段, 滤波器的实际输出和期望输出差值较大, 即产生一个较大的 $|e_{i+1}|$, 从而得到一个较大的 q ; 当滤波器达到稳态时, 式(23)得到一个较小的 $|e_{i+1}|$, 从而得到一个较小的 q 。因此, 可以自适应调节 q 的大小。将式(23)取代 q -APA算法中的固定 q 值即可得到V- q -APA, 通过选择合适的 α 和 β , V- q -APA能够进一步提高滤波器收敛速度的同时降低稳态误差。

6 仿真

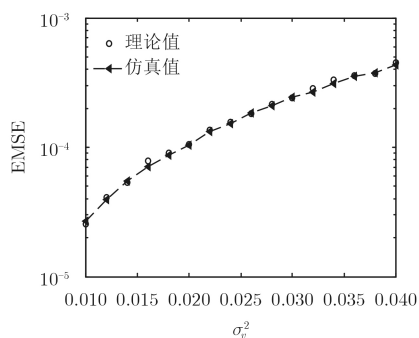
本节将采用系统辨识[12]实例验证所提算法的有效性。这里, 假设 $\mathbf{w}^* = [0.227, 0.460, 0.688, 0.460, 0.227]^T$ 为未知系统的最优权重, 以及系统的期望输出为: $d_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{w}^* + v_i$, 其中 v_i 是均值为0方差为0.08的高斯噪声, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$ 是服从独立标准正态分布的随机输入向量。自适应滤波器的实际输出表示为 $y_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{w}_{i-1}$ 。本文共产生10000个输入-输出数据对集合 $\{\mathbf{u}_i, d_i\}_{i=1}^{10000}$, 其中选取前8000个数据对作为训练数据, 最后100个数据对作为测试数据。则



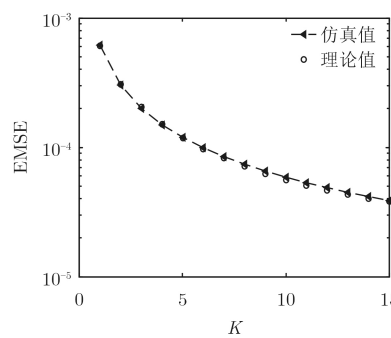
(a) 关于学习步长 μ 的 EMSE ($\sigma_v^2=0.08, K=10, q=0.5$)



(b) 关于 q 的 EMSE ($\mu=0.01, \sigma_v^2=0.08, K=10$)



(c) 关于噪声方差 σ_v^2 的 EMSE ($\mu=0.01, q=0.5, K=10$)



(d) 关于 K 的 EMSE ($\mu=0.01, \sigma_v^2=0.08, K=10$)

图1 高斯噪声环境下 q -APA算法的理论和仿真

训练数据和测试数据的长度分别为8000和100。在每次训练后，计算100个测试数据对的均方误差。

为了评估算法在滤波过程中的滤波性能，定义均方误差(Mean Square Error, MSE)

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i - y_i)^2 \quad (24)$$

其中， d_i 和 y_i 分别是滤波器的期望输出和实际输出， N 为测试数据的长度。为了消除仿真中的随机性，取100次蒙特卡罗仿真结果的平均值来计算算法的MSE。

为了全面地评价本文算法的有效性，选用变 q 的LMS (Variable- q -Least Mean Square, V- q -LMS)算法^[1]，APA^[3]和RLS算法^[4]作为 q -APA和V- q -APA的比较算法。其中V- q -LMS算法是变 q 算法的代表算法。为了区别于传统的APA，本文中 q -APA的 q 值在式(15)的基础上设置为 $q=0.01$ 和 $q=10$ 。对于V- q -APA，初值 $q_0=5$ ， $\alpha=0.3$ ， $\beta=0.1$ 。

首先，为了证实第4节的理论分析结果，对 q -APA稳态时EMSE的理论值和仿真值进行对比，其中EMSE的仿真值是通过每次蒙特卡罗最后500个点计算平均得到的，EMSE的理论值采用式(22)计算得到。从图1中可以看出算法的EMSE仿真值和理论值是匹配的，表明式(22)的理论结果是正确的。

图2比较了不同算法在滤波过程中的MSE，其中，参数设置为： $\mu_{q\text{-APA}}=\mu_{V\text{-}q\text{-APA}}=0.012$ ， $\mu_{V\text{-}q\text{-LMS}}=0.12$ ， $K_{q\text{-APA}}=K_{\text{APA}}=K_{V\text{-}q\text{-APA}}=15$ 。从图2可知，在高斯噪声下，较大的 q 值在以较大MSE为代价下可获得较快的收敛速度。相反，较小的 q 值会在较慢的收敛速度下获得较小的MSE，这和图1(b)中的结果一致。此外，在增加一定计算复杂度下，V- q -APA能够提高APA的滤波精度。

最后，表1比较了不同算法在仿真中的稳态

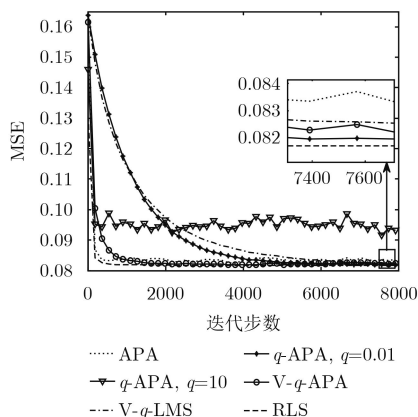


图2 V- q -APA算法和其他不同算法的学习曲线

表1 基于100次蒙特卡罗仿真的各个算法的性能比较

算法	MSE	时间(s)
APA	0.0835	10.0802
q -APA ($q=10$)	0.0951	10.9385
q -APA ($q=0.01$)	0.0819	10.9385
V- q -LMS	0.0825	15.0982
V- q -APA	0.0820	15.8802
RLS	0.0818	12.0637

MSE和100次蒙特卡罗仿真消耗计算时间的结果。由表1可知， q -APA($q=0.01$)的稳态MSE低于APA。V- q -APA的性能优于APA， q -APA($q=10$)和V- q -LMS，接近RLS。即V- q -APA算法以增加一定的计算量为代价提高了滤波精度。

7 结论

本文利用 q 微分改进了APA算法的权重更新方式，进而提出 q -APA算法。在增加一定计算复杂度的前提下，通过选择合适的 q 值， q -APA能够提高滤波器的滤波性能。当 $q=1$ 时， q -APA即为传统APA。作为算法中的关键参数，为了进一步证明 q 值对滤波器性能的影响，本文分析了 q -APA的收敛性能。并分别从理论和仿真讨论了 q 值对滤波器性能的影响。除此之外，本文计算了稳态时 q -APA的EMSE理论值，并通过仿真验证了其正确性。为了提高 q -APA的滤波性能，本文提出了V- q -APA。仿真结果表明：与基于瞬时误差的LMS和V- q -LMS算法相比， q -APA和V- q -APA能够有效地提高滤波器的滤波性能；与基于所有误差的RLS算法相比， q -APA和V- q -APA的滤波性能逼近RLS算法。

参考文献

- [1] HUANG Y T, BENESTY J, and CHEN J D. Acoustic MIMO Signal Processing[M]. Boston, MA: Springer, 2006: 233-236.
- [2] 刘建成, 赵宏志, 全厚德, 等. 迭代变步长LMS算法及性能分析[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(7): 1674-1680. doi: 10.11999/JEIT141501.
LIU Jiancheng, ZHAO Hongzhi, QUAN Houde, et al. Iteration-based variable step-size LMS algorithm and its performance analysis[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(7): 1674-1680. doi: 10.11999/JEIT141501.
- [3] 贾冲, 郭明嘉, 张雄伟. 基于M估计变步长自适应仿射投影算法的稳健时延估计[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(5): 1080-1083. doi: 10.3724/SP.J.1146.2006.01718.
JIA Chong, GUO Mingjia, and ZHANG Xiongwei. Robust time delay estimation using variable step-size affine

- projection algorithm with M-estimator[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(5): 1080–1083. doi: [10.3724/SP.J.1146.2006.01718](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2006.01718).
- [4] SAYED A H. Fundamentals of Adaptive Filtering[M]. New York: Wiley Interscience, 2003: 77–79. doi: [10.1007/978-1-4757-3637-3_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3637-3_2).
- [5] RUPP M. Convergence properties of adaptive equalizer algorithms[J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2011, 59(6): 2562–2574. doi: [10.1109/TSP.2011.2121905](https://doi.org/10.1109/TSP.2011.2121905).
- [6] QIAO Bingqiang, LIU Siming, ZENG Houdun, *et al.* Evaluation of dimension of fractal time series with the least mean square method[J]. *SCIENCE CHINA Physics Mechanics & Astronomy*, 2017, 60(4): 040521. doi: [10.1007/s11433-016-9002-8](https://doi.org/10.1007/s11433-016-9002-8).
- [7] 毕严先, 魏少明, 王俊, 等. 基于最小二乘估计的InISARS空间目标三维成像方法[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(5): 1079–1084. doi: [10.11999/JEIT151000](https://doi.org/10.11999/JEIT151000).
- BI Yanxian, WEI Shaoming, WANG Jun, *et al.* Interferometric ISAR imaging for 3-D geometry of uniformly rotating targets based on least mean squares estimation method[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(5): 1079–1084. doi: [10.11999/JEIT151000](https://doi.org/10.11999/JEIT151000).
- [8] 汤光明, 孙艺, 徐潇雨, 等. 动态更新失真代价的自适应JPEG隐写算法[J]. 通信学报, 2017, 38(9): 1–8. doi: [10.11959/j.issn.1000-436x.2017177](https://doi.org/10.11959/j.issn.1000-436x.2017177).
- TANG Guangming, SUN Yi, XU Xiaoyu, *et al.* Adaptive JPEG implicit algorithm for dynamic update distortion cost[J]. *Journal on Communications*, 2017, 38(9): 1–8. doi: [10.11959/j.issn.1000-436x.2017177](https://doi.org/10.11959/j.issn.1000-436x.2017177).
- [9] 王奇, 陈航, 王英民, 等. 基于最小二乘的短垂线阵匹配场处理[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(6): 1355–1362. doi: [10.11999/JEIT160727](https://doi.org/10.11999/JEIT160727).
- WANG Qi, CHEN Hang, WANG Yingmin, *et al.* Matched filed processing based on the least squares algorithm for short vertical linear array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(6): 1355–1362. doi: [10.11999/JEIT160727](https://doi.org/10.11999/JEIT160727).
- [10] ERNST T. The History of q -Calculus and a New Method[M]. Uppsala: Uppsala University Press, 2000: 40–103. doi: [10.1002/nme.1620240207](https://doi.org/10.1002/nme.1620240207).
- [11] AL-SAGGAF U M, MOINUDDIN M, ARIF M, *et al.* The q -least mean square algorithm[J]. *Signal Processing*, 2015, 111(C): 50–60. doi: [10.1016/j.sigpro.2014.11.016](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2014.11.016).
- [12] SOTERRONI A C, GALSKI R L, and RAMONS F M. The q -gradient method for global optimization[J]. *Mathematics*, 2012, 1558(1): 2389–2393. doi: [10.1063/1.4826022](https://doi.org/10.1063/1.4826022).
- [13] 练秋生, 齐秀梅, 陈书贞, 等. 基于结构稀疏性的单次曝光相位成像算法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(7): 1546–1553. doi: [10.11999/JEIT161171](https://doi.org/10.11999/JEIT161171).
- LIAN Qiusheng, QI Xiumei, CHEN Shuzhen, *et al.* Single-shot phase imagine algorithm based on structural sparsity[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(7): 1546–1553. doi: [10.11999/JEIT161171](https://doi.org/10.11999/JEIT161171).
- [14] SHIN H C and SAYED A H. Mean-square performance of a family of affine projection algorithms[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(1): 90–102. doi: [10.1109/TSP.2003.820077](https://doi.org/10.1109/TSP.2003.820077).
- [15] CHEN Badong, XING Lei, LIANG Junli, *et al.* Steady-state mean-square error analysis for adaptive filtering under the maximum correntropy criterion[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2014, 21(7): 880–884. doi: [10.1109/LSP.2014.2319308](https://doi.org/10.1109/LSP.2014.2319308).
- [16] LIU Chunhui, QI Yue, and DING Wenrui. The data-reusing MCC-based algorithm and its performance analysis[J]. *Chinese Journal of Electronics*, 2016, 25(4): 719–725. doi: [10.1049/cje.2016.06.019](https://doi.org/10.1049/cje.2016.06.019).
- 王世元: 男, 1980年生, 教授, 硕士生导师, 研究方向为自适应信号处理、非线性滤波器设计、混沌通信系统。
- 史春芬: 女, 1990年生, 硕士生, 研究方向为信号与信息处理。
- 蒋云翔: 男, 1986年生, 博士, 研究方向为无线通信、无线能量信息同传、全双工通信。
- 王文月: 女, 1994年生, 硕士生, 研究方向为信号与信息处理。
- 钱国兵: 男, 1986年生, 讲师, 研究方向为自适应信号处理。