

# 基于原子范数最小化的步进频率 ISAR一维高分辨距离成像方法

吕明久\* 陈文峰 徐芳 赵欣 杨军  
(空军预警学院 武汉 430019)

**摘要:** 针对传统离散化压缩感知方法在网格失配条件下步进频率(SF) ISAR 1维距离成像估计性能下降的问题, 该文提出一种基于原子范数最小化(ANM)的高分辨距离成像方法。首先, 构建基于原子范数的无网格SF ISAR距离向稀疏表示模型, 将1维距离成像问题转化为原子系数以及频率估计问题。然后, 利用原子范数半正定性, 将原子范数最小化问题转化为半正定规划问题, 并基于交替方向乘法实现快速求解。最后, 利用Vandermonde分解得到最终的1维高分辨距离成像结果。由于避免了网格离散化处理, 因此可以实现网格失配、低量测值条件下的高分辨距离成像, 且保持了高的距离分辨能力。理论分析与仿真实验验证了所提方法的有效性。

**关键词:** 逆合成孔径雷达; 原子范数; 高分辨距离像; 步进频率信号; 连续压缩感知; 网格失配

中图分类号: TN911.73; TN957.52

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)08-2267-09

DOI: 10.11999/JEIT200501

## One Dimensional High Resolution Range Imaging Method of Stepped Frequency ISAR Based on Atomic Norm Minimization

LÜ Mingjiu CHEN Wenfeng XU Fang ZHAO Xin YANG Jun  
(Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China)

**Abstract:** In order to solve the problem that the performance of one-dimensional range profile synthesis performance of Stepped Frequency (SF) ISAR based on the traditional discrete compressed sensing method declines under the condition of off-grid, a high-resolution range profile synthesis method of SF ISAR based on Atomic Norm Minimization (ANM) is proposed. Firstly, a grid free SF ISAR range sparse representation model based on atomic norm is constructed, and the one-dimensional range synthesis problem is transformed into the atomic coefficient and frequency estimation problem. Then, the atomic norm minimization problem is transformed into a semi-positive definite programming problem by using the semi-positive definite property of the atomic norm, and the fast solvers are performed via the alternating direction method of multipliers. Finally, the final one-dimensional high-resolution range profile imaging results are obtained by Vandermonde decomposition. Because the grid discretization is avoided, the high-resolution range profile imaging can be realized under the condition of grid mismatch and low measurement, and the high range resolution can be maintained. Theoretical analysis and simulation experiments verify the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** Inverse Synthetic Aperture Radar (ISAR); Atom norm; High resolution range profile; Stepped Frequency (SF) signal; Continuous Compressive Sensing (CCS); Off grid

### 1 引言

逆合成孔径雷达(Inverse Synthetic Aperture Radar, ISAR)系统采用具有大宽带的发射信号实现对目标的探测, 高的距离分辨可以提供更为精细的

目标特征。而步进频率(Stepped Frequency, SF)波形通过发射载频连续跳变的窄带子脉冲, 在接收端实现大的合成宽带。因此, 将步进频率波形与现代ISAR相结合, 不仅可以实现高的1维距离分辨能力, 对于降低系统复杂度、实现雷达多模工作方式均具有重要意义, 因此众多学者对SF ISAR高分辨距离成像方法进行了广泛研究<sup>[1,2]</sup>。

当前, 对SF信号的距离合成方法主要有IFFT方法、目标抽取算法以及宽带合成方法等<sup>[3]</sup>。其中, 最常用的就是对接收采样信号直接进行IFFT变换。

收稿日期: 2020-06-08; 改回日期: 2020-11-10; 网络出版: 2020-12-10

\*通信作者: 吕明久 lv\_mingjiu@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61671469)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61671469)

但是这类方法存在分辨率不高,在信号缺失、干扰等条件下成像效果较差等缺点<sup>[4]</sup>。将稀疏表示特别是压缩感知理论(Compressive Sensing, CS)与SF相结合,通过利用ISAR观测目标的稀疏特性,可以实现信号缺失条件下的1维高分辨成像,已成为SF距离成像研究的重要手段<sup>[5]</sup>。然而,目前基于CS的SF高分辨成像方法大都是一类离散化稀疏表示模型,均是基于目标散射点准确位于预设网格点的理想假设<sup>[6]</sup>。实际上,目标散射点分布的随机性加之ISAR成像过程中存在的距离走动现象使得网格失配问题总是存在,从而严重制约了稀疏重构性能的提升。针对这一问题,主要有以下两种解决思路:一是提高网格划分密度,使得目标最大可能落入网格点上<sup>[7]</sup>。但是这种方法不仅可能导致处理复杂度的急剧增加,相应的重构性能也会因为字典相关性的提高而严重退化。二是通过字典优化的方法减小网格失配的影响<sup>[8,9]</sup>。如文献<sup>[10]</sup>提出了一种自适应字典的网格失配优化方法,通过频移在一个分辨单元内构造自适应网格,减少失配带来的影响。文献<sup>[11]</sup>将网格失配视作为模型误差,基于贝叶斯理论提出了一种网格失配稀疏贝叶斯重构(Off-Grid Sparse Bayesian Inference, OGSBI)算法。但这些算法均是基于网格离散的前提,通过网格进一步细化或者搜索优化等方式逼近真实的散射点位置,因此并没有完全消除网格失配的影响。文献<sup>[12]</sup>提出了一种基于原子范数最小化(Atom Norm Minimization, ANM)的连续压缩感知理论(Continuous Compressed Sensing, CCS),通过在连续域中进行稀疏建模,从而避免了网格离散化操作,实现了网格失配下正弦信号频率的精确估计。文献<sup>[13]</sup>将这一理论运用至DOA估计领域,得到了比传统离散化CS方法更好的估计性能。受上述思想启发,若能将在原子范数理论应用于ISAR成像领域,对于解决网格失配条件下的SF ISAR 1维高分辨距离成像将具有十分重要的研究价值。

基于上述分析,本文将原子范数理论运用于SF ISAR成像领域,提出了一种基于ANM的SF ISAR 1维高分辨距离成像方法。首先,在原子范数域构建SF ISAR距离向稀疏表示模型,将1维距离成像问题转化为原子范数最小化问题。然后,将原子范数最小化问题转化为半正定规划问题,并利用交替方向乘子(Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM)方法进行快速求解。最后,利用Vandermonde分解实现最终的高分辨1维距离成像。由于该方法直接在连续域中进行距离像稀疏建模,避免了网格离散化操作带来的网格不匹配问题,具

有网格失配条件下估计性能精确的优势,且在低量测值条件下保持了较好的重构性能。相比于传统离散化稀疏重构方法,所提方法具有更普遍的应用范围。

## 2 原子范数理论

原子范数理论是一种描述连续参量的范数形式,其涵盖了多种常用范数,如 $\ell_1$ 范数、核范数等。假设原子集合 $\mathcal{A}$ 对应的凸包表示为 $\text{conv}(\mathcal{A})$ ,且 $\text{conv}(\mathcal{A})$ 为包含原点的中心对称紧集<sup>[14]</sup>。因此,原子范数就是由凸包 $\text{conv}(\mathcal{A})$ 的尺度函数所定义的范数形式,可以表示为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{A}} &= \inf \{t > 0 : \mathbf{Y} \in t \cdot \text{conv}(\mathcal{A})\} \\ &= \inf \left\{ \sum_k c_k : \mathbf{Y} = \sum_{k=1}^K c_k \mathbf{a}(f_k, \phi_k), c_k \geq 0, \right. \\ &\quad \left. f_k \in [0, 1], \phi_k \in [0, 2\pi) \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ 表示原子范数; $\mathbf{a}(f_k, \phi_k)$ 为凸包 $\text{conv}(\mathcal{A})$ 中的原子。

从式(1)可以看出,原子范数是以系数 $c_k$ 的和作为下界,通过在集合 $\mathcal{A}$ 中选取最少的原子 $\mathbf{a}(f_k, \phi_k)$ 来表征信号 $\mathbf{Y}$ ,因此原子范数可以视为对原子集合 $\mathcal{A}$ 添加了稀疏约束。在这种约束下,集合 $\mathcal{A}$ 被视为一个具有连续原子的无限字典,从而避免了引入网格离散化参数所带来的原子失配等问题。另外,若 $\mathbf{a}(f_k, \phi_k)$ 为欧式空间中的基向量,原子范数即为通常稀疏向量的 $\ell_1$ 范数;同理,若 $\mathbf{a}(f_k, \phi_k)$ 是秩为1的矩阵,此时原子范数即为矩阵填充理论中的核范数形式<sup>[12]</sup>。

实际上,原子范数具有半正定规划(SemiDefinite Programming, SDP)性质,因此可以将原子范数最小化(Atomic Norm Minimization, ANM)转化为如式(2)所示的SDP问题,然后利用相应的半正定规划优化方法进行求解<sup>[12]</sup>。

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Y}\|_{\mathcal{A}} &= \inf \left\{ \frac{1}{2N} \text{trace}(\text{Toep}(\mathbf{u})) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} t : \begin{bmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^H & t \end{bmatrix} \geq 0 \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $N$ 为信号长度; $\text{trace}(\cdot)$ 表示矩阵的迹; $\text{Toep}(\mathbf{u}) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 为Toeplitz矩阵,其中 $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N] \in \mathbb{C}^{1 \times N}$ 表示 $\text{Toep}(\mathbf{u})$ 矩阵第1行元素, $(\cdot)^H$ 表示共轭转置。

## 3 基于原子范数的SF ISAR距离成像方法

SF ISAR雷达系统距离向通过发射SF信号实现对目标的观测,在接收端进行距离像合成实现高

的距离分辨。雷达对 $K$ 个散射点目标进行观测，其相应的接收回波信号可以表示为<sup>[15]</sup>

$$s(n; n_a) = \sum_{k=1}^K \sigma_{k, n_a} \exp \left\{ -j \frac{4\pi}{c} [f_c + (n-1) \Delta f] \cdot (x_k - y_k n_a \Delta \theta) \right\} + e \quad (3)$$

其中， $n = 1, 2, \dots, N$ 表示每串脉冲中的第 $n$ 个子脉冲， $n_a = 1, 2, \dots, N_a$ 表示方位向的第 $n_a$ 个脉冲组， $\sigma_{k, n_a}$ 表示第 $n_a$ 个脉冲组中第 $k$ 个散射点的强度； $f_c$ 为载频； $\Delta f$ 为载频步进量； $e$ 为噪声； $(x_k, y_k)$ 为散射点在目标坐标系中的坐标， $\Delta \theta$ 为近似转动步长。

本文主要分析SF ISAR的1维高分辨距离成像方法，因此将方位信息以及常数项写成附加相位项，此时第 $n_a$ 组距离像信息(式(3))可以写成

$$s(n; n_a) = \sum_{k=1}^K \sigma_{k, n_a} \cdot \exp \left[ -j \frac{4\pi}{c} (n-1) \Delta f x_{k, n_a} + \theta_{k, n_a} \right] + e \quad (4)$$

其中， $\theta_{k, n_a}$ 为与方位成像有关的相位项， $x_{k, n_a}$ 表示第 $n_a$ 个脉冲组第 $k$ 个散射点的位置信息。

根据SF信号特性，发射 $N$ 个载频步进量为 $\Delta f$ 的子脉冲，经过宽带合成后得到的合成带宽大小为 $N \Delta f$ ，对应的距离分辨率为 $\Delta R = c/2N \Delta f$ ，不模糊距离分辨范围为 $R_u = c/2 \Delta f$ 。因此，式(4)可进一步简化为

$$s(n_a) = \sum_{k=1}^K \sigma'_{k, n_a} \mathbf{a}(f_{k, n_a}, \theta_{k, n_a}) + \mathbf{e} = \mathbf{z} + \mathbf{e} \quad (5)$$

其中， $\mathbf{z} = \sum_{k=1}^K \sigma'_{k, n_a} \mathbf{a}(f_{k, n_a}, \theta_{k, n_a})$ ； $\mathbf{e}$ 为噪声矩阵； $\mathbf{a}(f_{k, n_a}, \theta_{k, n_a})$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(f_{k, n_a}, \theta_{k, n_a}) &= \exp \left[ -j \frac{4\pi}{c} (n-1) \Delta f R_u f_{k, n_a} + \theta_{k, n_a} \right] \\ &= \exp [-j 2\pi (n-1) f_{k, n_a} + \theta_{k, n_a}] \end{aligned} \quad (6)$$

其中， $f_{k, n_a} \in [0, 1]$ ； $\theta_{k, n_a} \in [0, 2\pi)$ 。

根据式(6)，此时的1维距离像合成已经等效为求解系数 $\sigma'_{k, n_a}$ 以及归一化频率 $f_{k, n_a}$ 的问题。而根据原子范数理论，此时第 $n_a$ 组距离像信息求解可以转化为在凸包 $\text{conv}(\mathcal{A})$ 中选取 $K$ 个形式为 $\mathbf{a}(f_{k, n_a}, \theta_{k, n_a})$ 的原子表征问题，其中 $\mathcal{A}$ 表示原子 $\mathbf{a}(f_{k, n_a}, \theta_{k, n_a})$ 对应的原子集合。因此，对SF ISAR的1维距离像估计问题可以转化为原子范数最小化问题进行求解。此时，式(5)对应的原子范数可以表示为

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}(n_a)\|_{\mathcal{A}} &= \inf \{t_{n_a} > 0 : \mathbf{s}(n_a) \in t_{n_a} \cdot \text{conv}(\mathcal{A})\} \\ &= \inf \left\{ \sum_k \sigma'_{k, n_a} : \mathbf{s}(n_a) \right. \\ &= \sum_{k=1}^K \sigma'_{k, n_a} \mathbf{a}(f_{k, n_a}, \phi_{k, n_a}), \sigma'_{k, n_a} \geq 0, \\ &\left. f_{k, n_a} \in [0, 1], \phi_{k, n_a} \in [0, 2\pi) \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

假设距离向为稀疏量测方式，发射的子脉冲个数为 $M$ ， $M \leq N$ ，由 $M$ 个子脉冲序列构成的子集表示为 $\Omega$ ，则 $\Omega \subset [N] \triangleq \{1, 2, \dots, N\}$ ，且 $M = |\Omega| \leq N$ 。此时稀疏采样条件下的ANM问题可表示为

$$\min_{\tilde{\mathbf{z}}_{\Omega}(n_a)} \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{\Omega}(n_a) - \tilde{\mathbf{z}}_{\Omega}(n_a)\|_2^2 + \tau \|\tilde{\mathbf{z}}_{\Omega}(n_a)\|_{\mathcal{A}(\Omega)} \quad (8)$$

其中， $\tau$ 与噪声水平有关，假设噪声服从 $N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$ ，则 $\tau = \sigma \sqrt{N \lg N}$ ； $\mathbf{s}_{\Omega}(n_a)$ 为距离像随机量测数据； $\tilde{\mathbf{z}}_{\Omega}(n_a)$ 为待恢复量测数据。

此时，式(8)可以转化为如式(9)所示的半正定规划问题进行求解<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{z}}_{\Omega}(n_a), x} \left. \frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{\Omega}(n_a) - \tilde{\mathbf{z}}_{\Omega}(n_a)\|_2^2 + \frac{\tau}{2} (t_{n_a} + u_1) \right\} \\ \text{s. t. } \quad Z = \begin{bmatrix} \text{Toep}(\mathbf{u}) & \tilde{\mathbf{z}}(n_a) \\ \tilde{\mathbf{z}}^H(n_a) & t_{n_a} \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

其中， $\tilde{\mathbf{z}}(n_a)$ 为恢复的全数据； $t_{n_a}$ 为常数； $u_1$ 为向量 $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{1 \times N}$ 中第1个元素。

对于式(9)所示的半正定规划问题，可以利用SDPT3, SeDuMi等基于内点法的优化算法进行求解，但上述方法存在运算量大、计算效率低的问题。针对上述优化求解问题，已经提出了较多的快速优化算法<sup>[13, 17, 18]</sup>，其中ADMM在确保重构性能的同时，可以显著降低计算复杂度。为此，本文使用ADMM快速算法实现对式(9)问题的求解，具体实现步骤可以参考文献[13]。通过优化后即可得到最终的 $t$ ， $\text{Toep}(\mathbf{u})$ 以及 $\tilde{\mathbf{z}}$ 。在得到待恢复信号后，可以利用传统IFFT合成方法或者字典离散化CS方法再进行距离像合成，但这将会失去求解原子范数带来的“无网格”优势。

根据Caratheodory定理<sup>[19]</sup>，对于任意一个 $N \times N$ 维的半正定Toeplitz矩阵 $\text{Toep}(\mathbf{u})$ ，若矩阵的秩 $K = \text{rank}(\text{Toep}(\mathbf{u})) < N$ ，则 $\text{Toep}(\mathbf{u})$ 可唯一Vandermonde分解为如式(10)所示的形式

$$\text{Toep}(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^H \quad (10)$$

其中， $\mathbf{A}$ 为Vandermonde矩阵，且其每一列均是由原子 $\mathbf{a}(f_k, \phi_k)$ 构成，即 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}^T(f_{1, n_a}, \phi_{1, n_a}), \mathbf{a}^T(f_{2, n_a}, \phi_{2, n_a}), \dots, \mathbf{a}^T(f_{K, n_a}, \phi_{K, n_a})] \in \mathbb{C}^{N \times K}$ ； $\mathbf{P}$ 为 $K \times K$ 维正定对角矩阵，且 $\mathbf{P} = \text{diag}([\sigma'_{1, n_a}, \sigma'_{2, n_a}, \dots, \sigma'_{K, n_a}])$ 。

$\dots, \sigma'_{K, n_a}]$ ), 因此可以看出, 此时Toep( $\mathbf{u}$ )矩阵的秩 $K$ 表示稀疏信号的稀疏度。

因此, 只要SF ISAR系统满足上述条件(具体分析将在下一节给出), 在得到Toeplitz矩阵Toep( $\mathbf{u}$ )后, 通过对Toep( $\mathbf{u}$ )进行Vandermonde分解即可分别得到系数 $\sigma'_{k, n_a}$ 以及归一化频率 $f_{k, n_a}$ , 从而实现1维高分辨距离像的重构, 其详细的重构过程可以表示为如图1所示。

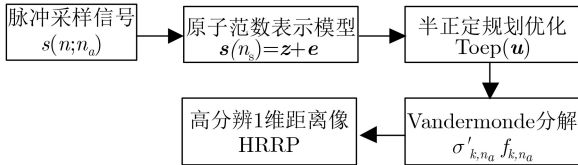


图1 基于原子范数的高分辨距离成像方法流程示意图

## 4 方法性能分析

### 4.1 重构性能分析

本文基于原子范数最小化的高分辨1维距离成像方法利用连续字典替代了传统网格字典, 避免了网格划分带来的距离像失配问题, 具有更好的重构性能。为此, 假设对频率 $\tilde{f}$ 分布区间为 $[0, 1]$ 进行 $N$ 点离散化处理, 得到 $N$ 点离散频率序列 $\tilde{\mathbf{f}} = \{0, 1/N, \dots, (N-1)/N\}$ , 此时其对应的原子集合为 $\mathcal{A}_N(\Omega) = \{\mathbf{a}_\Omega(f, \phi), f \in \tilde{\mathbf{f}}, \phi \in [0, 2\pi)\}$ 。此时对于任意一组回波信号, 其相应的原子范数可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \|\mathbf{s}_\Omega\|_{\mathcal{A}_N(\Omega)} &= \min \sum_k \sigma'_k \\ \text{s.t. } \mathbf{s}_\Omega &= \sum_{k=1}^K \sigma'_k \mathbf{a}_\Omega(\tilde{f}_k, \varphi_k) \\ \sigma'_k &\geq 0, \tilde{f}_k \in [0, 1] \\ \varphi_k &\in [0, 2\pi) = \min \|\mathbf{y}\|_1 \\ \text{s.t. } \mathbf{s}_\Omega &= \mathcal{A}_\Omega \mathbf{y} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{y} = [\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_N]$ ,  $\mathcal{A}_\Omega = [\mathbf{a}_\Omega(\tilde{f}_1, \phi_1), \mathbf{a}_\Omega(\tilde{f}_2, \phi_2), \dots, \mathbf{a}_\Omega(\tilde{f}_N, \phi_N)]$ 为对应的离散量测字典。

可以看出, 当原子集合有限时, 原子范数可以视为稀疏向量的 $\ell_1$ 范数。因此, 当 $N \rightarrow +\infty$ 时, 离散原子集合 $\mathcal{A}_N(\Omega)$ 无限趋近于连续原子集合 $\mathcal{A}(\Omega)$ , 也即是 $\|\mathbf{s}_\Omega\|_{\mathcal{A}_N(\Omega)} \rightarrow \|\mathbf{s}_\Omega\|_{\mathcal{A}(\Omega)}$ 。文献[20]指出, 原子范数与离散条件下的 $\ell_1$ 范数存在如下关系

$$\left(1 - \frac{\pi M}{N}\right) \|\mathbf{s}_\Omega\|_{\mathcal{A}_N(\Omega)} \leq \|\mathbf{s}_\Omega\|_{\mathcal{A}(\Omega)} \leq \|\mathbf{s}_\Omega\|_{\mathcal{A}_N(\Omega)} \quad (12)$$

因此, 相比基于离散字典的 $\ell_1$ 范数, 原子范数具有更好的重构性能。

### 4.2 量测性能分析

对于式(9)所示的半正定优化问题, 影响其求解性能的主要有随机量测数 $M$ 、信号稀疏度 $K$ 。文献[12]指出, 当最小频率间隔满足 $\Delta_f \geq 1/\lfloor N/4 \rfloor$ , 其中 $\Delta_f = \min_{i \neq j} |f_i - f_j|$ 表示归一化频率 $f_k$ 的最小频率间隔, 存在常数 $C$ , 使得随机观测数 $M$ 满足

$$M \geq C \max \left\{ \left( \lg \frac{N}{\delta} \right)^2, K \lg \left( \frac{K}{\delta} \right) \left( \lg \frac{N}{\delta} \right)^2 \right\} \quad (13)$$

时, 通过求解上述半正定优化问题, 即可以以 $1 - \delta$ 的高概率重构出原始信号 $s$ 。文献[13, 21]指出,  $\Delta_f \geq 1/\lfloor N/4 \rfloor$ 这一条件并不是严格的, 在 $\Delta_f = 1/N$ 甚至 $\Delta_f < 1/N$ 的情况下, 仍然能成功实现频率分离, 总的来看, 基于原子范数最小化的优化方法保持了信号的高分辨能力。

另外, 在ANM理论中, 一般要求待恢复信号的稀疏度 $K$ 满足的条件为

$$K < \frac{\text{spark}[\mathcal{A}(\Omega)]}{2} \quad (14)$$

其中,  $\text{spark}[\mathcal{A}(\Omega)]$ 表示原子集合 $\mathcal{A}(\Omega)$ 中用于表征稀疏信号的最少不相关原子个数, 且 $2 \leq \text{spark}[\mathcal{A}(\Omega)] \leq M + 1$ 。

可以看出, 基于原子范数的稀疏信号重构方法, 其可以准确重构的条件与传统离散CS相似。因此, 要保证高概率的重构, 稀疏度 $K$ 需满足式(13), 式(14)的条件, 此时对于式(10)所示的Vandermonde分解, 要求 $K = \text{rank}(\text{Toep}(\mathbf{u})) < N$ 是可以满足的。

### 4.3 复杂度分析

对于本文所提基于原子范数最小化(ANM)的稀疏重构方法, 其计算复杂度来自对式(9)所示优化问题的求解, 主要与矩阵 $Z$ 的维度有关。基于内点法(如SDPT3)的优化方法, 其计算复杂度可以表示为 $O((N+1)^6)$ , 当数据量较大时, 运算量将会急剧增加。而基于ADMM的快速优化方法, 通过对优化问题的分解并依次迭代求解, 可以使得计算复杂度降为 $O((N+1)^3)$ [22]。相比于内点法, 大大降低了运算复杂度, 更加适合于高数据量条件下的快速重构。为比较本文方法的运算量水平, 给出传统基于离散网格的压缩感知方法(OMP算法)的复杂度, 其运算量主要来自矩阵求逆, 计算复杂度约为 $O(KMN)$ 。而文献[11]所提的网格失配优化方法(OGSBI算法), 其复杂度约为 $O(M^2N + M^3)$ 。由于 $K < M \leq N$ , 可以总结上述4种方法的复杂度排序为: ANM-SDPT3方法大于ANM-ADMM方法近似OGSBI算法大于OMP算法。可见, 本文所提方法在运算量上并没有显著优势, 在利用ADMM

快速优化方式进行求解时，其复杂度约与文献[11]所提方法处于同一量级。

### 5 仿真分析与验证

本节通过仿真对基于ANM的SF ISAR距离高分辨成像方法进行验证。首先给出本文的仿真参数说明：重构误差计算方式为  $Er = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_F / \|\mathbf{x}\|_F$ ，其中  $\mathbf{x}$  为原始信号， $\hat{\mathbf{x}}$  为估计信号。仿真所用SF信号其载频  $f_c$  为10 GHz，载频步进量  $\Delta f$  为5 MHz，子脉冲个数  $N$  为50个，合成带宽为250 MHz。信号采样率设置为  $\alpha = M/N$ 。所有仿真均是基于Matlab R2012b仿真平台，所用计算机处理器Intel酷睿 i7-6700HQ，主频2.6 GHz，内存8 GB。

为更好地全面分析方法性能，本节主要从量测值大小、信噪比高低以及运算量3个方面来分析验证算法重构性能。为综合比较分析，采用传统基于离散网格划分的CS方法(OMP算法)、文献[11]所提OGSBI算法作为对比算法(迭代次数设置为500次)，本文所提基于ANM的1维高分辨距离成像方法简称为ANM算法，并分别给出基于SDPT3以及ADMM方法进行重构的结果，其中ADMM方法中的参数  $\rho$  设置为1，最大迭代次数设置为500次。

#### 5.1 仿真数据验证

##### 仿真1 重构精度仿真对比

首先验证所提方法在目标散射点与距离网格匹配以及失配条件下的重构性能。仿真生成4个散射点目标，其位置与幅度均随机产生(网格匹配目标位置设置在网格点上)，信噪比设置为20 dB。图2为利用不同重构方法得到的1维高分辨距离成像结果示意。

从图2的仿真结果可以看出，在网格匹配的条件下，3种方法均可以得到正确的距离像合成结果。而当存在网格失配时，OMP方法存在较多的虚假重构，OGSBI方法由于具有误差修正能力，重构结果的误差相对于OMP方法来说有所降低。而本文所提的ANM方法(不论是基于SDPT3还是ADMM的重构方法)，由于在连续域直接进行重构，因此可以完美重构出正确的位置，显示出在网格失配条件下优良的性能。

##### 仿真2 不同条件下性能对比

本仿真主要验证该方法在不同量测值以及不同信噪比条件下的重构性能。在相同的参数条件下，设置不同的信号量测值，信噪比设置为20 dB。图3为不同量测数  $M$  以及不同信噪比条件下(设置不同的信号信噪比，量测值设置为40)不同方法稀疏重构结果对比。此处主要以支撑集(即正确距离像位置集合)估计精度来对算法估计性能进行评价。

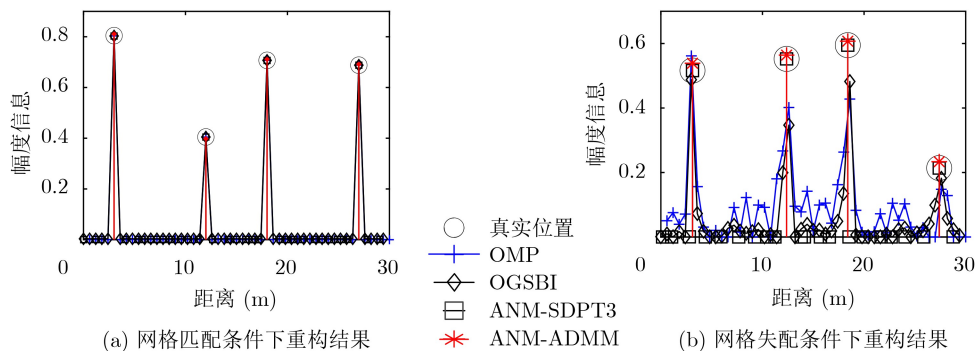


图2 不同算法1维距离像重构结果对比示意图

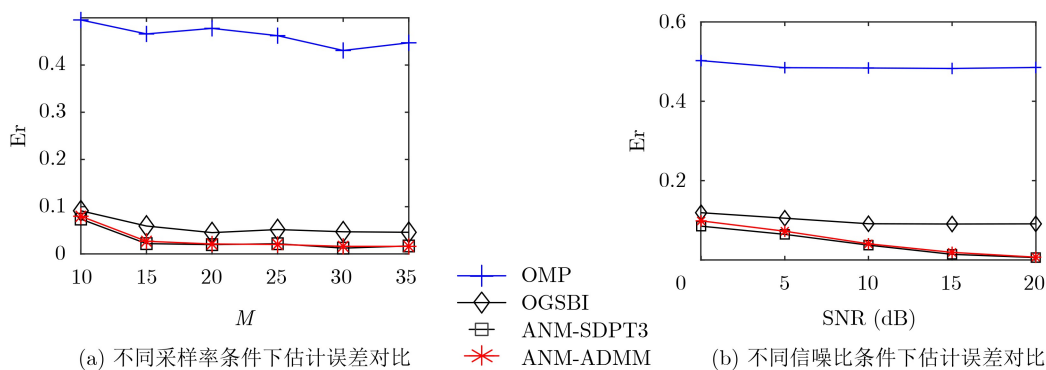


图3 不同条件下支撑集估计精度对比示意图

从图3(a)可以看出,在不同的量测值条件下,OMP算法具有较差的估计精度,这是由于在网格失配条件下其支撑集估计误差是始终存在的,OGSBI算法具有网格失配修正功能,因此估计精度有较大提升。而本文基于ANM的方法由于在连续域直接进行重构,因而具有最好的支撑集估计精度。相比较而言,基于SDPT3的ANM重构方法在低量测值条件下性能略好于基于ADMM方法的重构结果,但结果相差较小。从图3(b)可以看出,在不同的信噪比条件下,本文基于ANM的方法同样具有最好的支撑集估计精度,且不论是基于SDPT3方法还是基于ADMM方法,均具有较高的估计精度,显示出较强的鲁棒性。

另外,为进一步对比不同方法在处理时间上的差异,以上述信号参数(发射信号子脉冲个数为30个)为例且保持算法设置参数不变,此时OMP算法需要的处理时间约为0.08 s,OGSBI方法的处理时间约为0.45 s,ANM-SDPT3方法的处理时间约为2.1 s,而ANM-ADMM方法的处理时间约为0.5 s。从上述结果可以看出,OMP算法具有最少的运算量,基于ADMM的ANM重构方法约与OGSBI算法处于同一运算量级,而基于SDPT3的ANM方法具有较长的运算时间,上述结果也验证了理论分析结论的正确性。

## 5.2 MIG-25数据验证分析

进一步采用MIG-25数据验证本文基于ANM算法的有效性,该数据发射信号为步进频率波形,其载频为9 GHz,共发射64个子脉冲,合成带宽为512 MHz,相应的子脉冲带宽为8 MHz,方位向共有512组子脉冲,脉冲重复频率为15 kHz,在成像时间内目标转动角速度近 $10^{\circ}/s$ ,已经经过运动补偿。由于无法事先知道正确距离像结果,因此找不出合适的衡量距离成像质量的指标。但是,在ISAR成像中,距离像成像质量会对最终的2维成像结果产生影响。为此,本实验中同时给出了距离像合成结果以及最终的2维ISAR成像结果,并利用衡量ISAR成像质量的熵值(Entropy)以及对比度(Contrast)来比较不同算法的重构性能。其中,距离像合成采用本文4种不同的重构算法,方位向均利用FFT方法进行处理。在仿真实验中,选取前第128组子脉冲进行2维成像结果重构,并设置采样率为0.5,即随机选择32个方位向子脉冲进行处理,利用不同方法得到的距离合成结果以及最终ISAR成像结果如图4所示。其中图4(a)、图4(c)、

图4(e)、图4(g)为距离像合成结果,图4(b)、图4(d)、图4(f)、图4(h)为ISAR成像结果。

从图4的实验结果可以看出,利用OMP算法得出的距离像合成结果具有较多的虚假重构。OGSBI算法距离像合成结果稍好于OMP算法。相比较而言,本文方法的距离像合成结果虚假重构点较少,因而性能最好,也进一步验证了本文方法的有效性。从ISAR成像结果也可以看出,由于距离像合成结果影响到最终的ISAR成像质量,因此OMP算法以及OGSBI算法的2维成像质量虚假散射点较多,成像质量较差。而本文基于ANM的稀疏重构方法(基于SDPT3方法以及基于ADMM方法)得到的ISAR成像结果聚焦性最好,虚假散射点也最少,也证实了本文所提方法的优势。

为进一步衡量不同算法的性能,图5给出了不同距离向采样率条件下的2维ISAR成像结果的熵值以及对比度曲线。可以看出,本文方法在低距离向采样率条件下的成像熵值均低于其他两种方法,成像对比度均高于另外两种,也有利地验证了本文方法在低采样率条件下的重构性能。另外,可以看出,不论是基于SDPT3方法还是基于ADMM方法的ANM稀疏重构算法,均具有相似的成像结果,成像质量均较好。

此外,在上述信号参数条件下,对不同算法实现距离像合成的总运算时间进行了统计对比,基于本仿真平台,本文所提基于SDPT3的ANM方法实现128组距离像合成需要约343.93 s,而相同情况下基于ADMM的ANM距离像合成方法需要约104.20 s,OGSBI方法需约108.79 s,而OMP算法仅需约2.86 s,可以看出,虽然利用了ADMM的快速求解方法,其运算效率仍有较大的改进空间。但随着现代超级计算机运算性能的急速提升,复杂度并非首要考虑的因素。

## 6 结束语

本文提出了一种基于原子范数最小化的SF ISAR高分辨1维距离像合成方法,通过将距离成像问题转化为原子范数最小化问题,在连续域上实现了1维高分辨距离成像,并利用ADMM方法实现了快速稀疏重构。与传统离散化方法相比,在网格失配、低量测数据条件下重构性能好的优点,且保持了高的距离分辨能力。但是,本文方法同时存在运算量较大的缺点,这也是下一步需要着重研究与加以解决的问题。

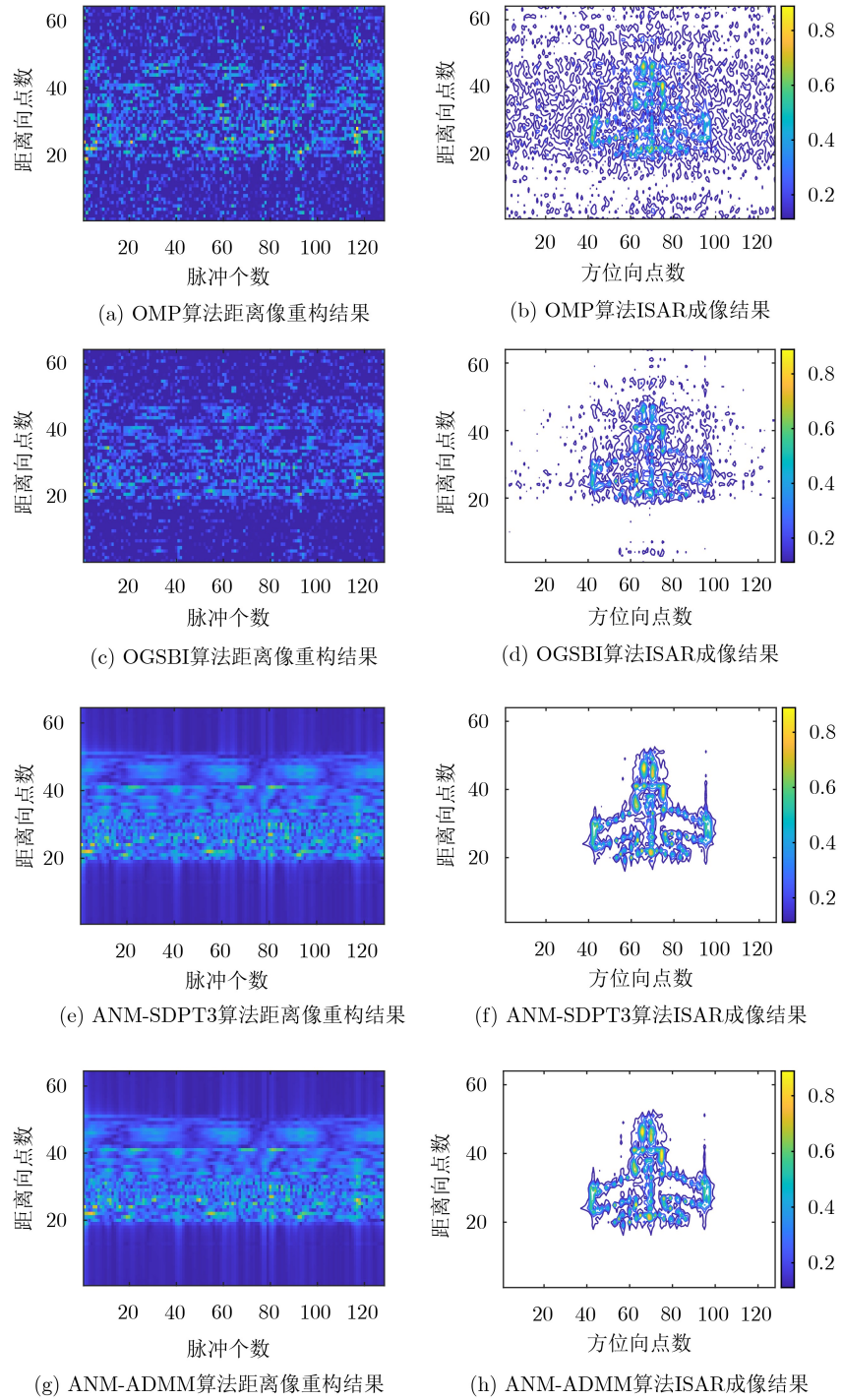


图4 不同算法重构结果对比示意图

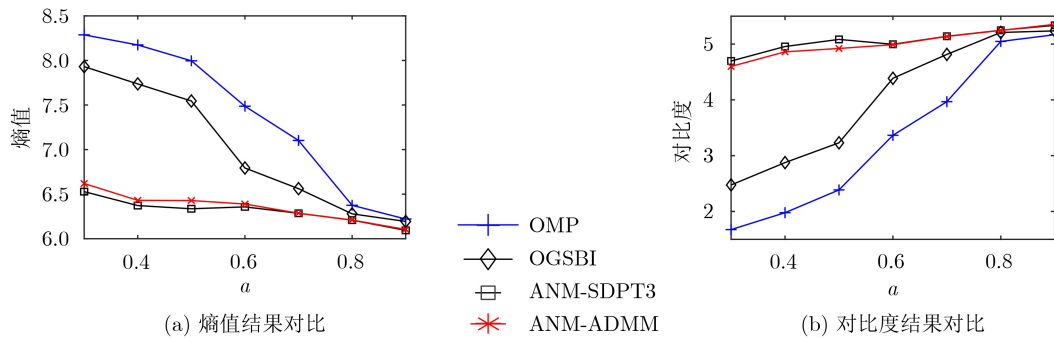


图5 不同算法重构性能对比示意图

## 参考文献

- [1] WANG Lei, HUANG Tianyao, and LIU Yimin. Phase compensation and image autofocusing for randomized stepped frequency ISAR[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2019, 19(10): 3784–3796. doi: [10.1109/JSEN.2019.2897014](https://doi.org/10.1109/JSEN.2019.2897014).
- [2] 陈怡君, 李开明, 张群, 等. 稀疏线性调频步进信号ISAR成像观测矩阵自适应优化方法[J]. *电子与信息学报*, 2018, 40(3): 509–516. doi: [10.11999/JEIT170554](https://doi.org/10.11999/JEIT170554).  
CHEN Yijun, LI Kaiming, ZHANG Qun, *et al.* Adaptive measurement matrix optimization for ISAR imaging with sparse frequency-stepped chirp signals[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(3): 509–516. doi: [10.11999/JEIT170554](https://doi.org/10.11999/JEIT170554).
- [3] 龙腾, 丁泽刚, 肖枫, 等. 星载高分辨频率步进SAR成像技术[J]. *雷达学报*, 2019, 8(6): 782–792. doi: [10.12000/JR19076](https://doi.org/10.12000/JR19076).  
LONG Teng, DING Zegang, XIAO Feng, *et al.* Spaceborne high-resolution stepped-frequency SAR imaging technology[J]. *Journal of Radars*, 2019, 8(6): 782–792. doi: [10.12000/JR19076](https://doi.org/10.12000/JR19076).
- [4] GHAFARI M, SABAH M F, and ZHANG Zhenkai. Difference set coding in stepped frequency radar[C]. 6th Iranian Conference on Radar and Surveillance Systems, Isfahan, Iran, 2019: 1–6. doi: [10.1109/ICRSS48293.2019.9026562](https://doi.org/10.1109/ICRSS48293.2019.9026562).
- [5] WEI Shaopeng, ZHANG Lei, MA Hui, *et al.* Sparse frequency waveform optimization for high-resolution ISAR Imaging[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2020, 58(1): 546–566. doi: [10.1109/TGRS.2019.2937965](https://doi.org/10.1109/TGRS.2019.2937965).
- [6] GANGULY S, GHOSH I, RANJAN R, *et al.* Compressive sensing based off-grid DOA estimation using OMP algorithm[C]. The 6th International Conference on Signal Processing and Integrated Networks (SPIN), Noida, India, 2019. doi: [10.1109/SPIN.2019.8711677](https://doi.org/10.1109/SPIN.2019.8711677).
- [7] HU Lei, SHI Zhiguang, ZHOU Jianxiong, *et al.* Compressed sensing of complex sinusoids: An approach based on dictionary refinement[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(7): 3809–3822. doi: [10.1109/TSP.2012.2193392](https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2193392).
- [8] 王伟, 胡子英, 龚琳舒. MIMO雷达三维成像自适应Off-grid校正方法[J]. *电子与信息学报*, 2019, 41(6): 1294–1301. doi: [10.11999/JEIT180145](https://doi.org/10.11999/JEIT180145).  
WANG Wei, HU Ziyang, and GONG Linshu. Adaptive off-grid calibration method for MIMO radar 3D imaging[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(6): 1294–1301. doi: [10.11999/JEIT180145](https://doi.org/10.11999/JEIT180145).
- [9] EKANADHAM C, TRANCHINA D, and SIMONCELLI E P. Recovery of sparse translation-invariant signals with continuous basis pursuit[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(10): 4735–4744. doi: [10.1109/TSP.2011.2160058](https://doi.org/10.1109/TSP.2011.2160058).
- [10] HUANG Limei, ZONG Zhulin, HUANG Libing, *et al.* Off-grid sparse stepped-frequency SAR imaging with adaptive basis[C]. 2019 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, Yokohama, Japan, 2019: 2925–2928. doi: [10.1109/IGARSS.2019.8898543](https://doi.org/10.1109/IGARSS.2019.8898543).
- [11] YANG Zai, XIE Lihua, and ZHANG Cishen. Off-grid direction of arrival estimation using sparse Bayesian inference[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(1): 38–43. doi: [10.1109/TSP.2012.2222378](https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2222378).
- [12] TANG Gongguo, BHASKAR B N, SHAH P, *et al.* Compressed sensing off the grid[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(11): 7465–7490. doi: [10.1109/TIT.2013.2277451](https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2277451).
- [13] YANG Zai and XIE Lihua. Continuous compressed sensing with a single or multiple measurement vectors[C]. 2014 IEEE Workshop on Statistical Signal Processing, Gold Coast, Australia, 2014: 288–291. doi: [10.1109/SSP.2014.6884632](https://doi.org/10.1109/SSP.2014.6884632).
- [14] CHANDRASEKARAN V, RECHT B, PARRILO P A, *et al.* The convex algebraic geometry of linear inverse problems[C]. The 48th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Allerton, USA, 2010: 699–703. doi: [10.1109/ALLERTON.2010.5706975](https://doi.org/10.1109/ALLERTON.2010.5706975).
- [15] 吕明久, 陈文峰, 夏塞强, 等. 基于联合块稀疏模型的随机调频步进ISAR成像方法[J]. *电子与信息学报*, 2018, 40(11): 2614–2620. doi: [10.11999/JEIT180054](https://doi.org/10.11999/JEIT180054).  
LÜ Mingjiu, CHEN Wenfeng, XIA Saiqiang, *et al.* Random chirp frequency-stepped signal ISAR imaging algorithm based on joint block-sparse model[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(11): 2614–2620. doi: [10.11999/JEIT180054](https://doi.org/10.11999/JEIT180054).
- [16] BHASKAR B N, TANG Gongguo, and RECHT B. Atomic norm denoising with applications to line spectral estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(23): 5987–5999. doi: [10.1109/TSP.2013.2273443](https://doi.org/10.1109/TSP.2013.2273443).
- [17] HANSEN T L and JENSEN T L. A fast interior-point method for atomic norm soft thresholding[J]. *Signal Processing*, 2019, 165: 7–19. doi: [10.1016/j.sigpro.2019.06.023](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.06.023).
- [18] BOYD S, PARIKH N, CHU E, *et al.* Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 2011, 3(1): 1–122. doi: [10.1561/2200000016](https://doi.org/10.1561/2200000016).

- [19] GEORGIOU T T. The Carathéodory-Fejér-Pisarenko decomposition and its multivariable counterpart[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(2): 212–228. doi: [10.1109/TAC.2006.890479](https://doi.org/10.1109/TAC.2006.890479).
- [20] YANG Zai and XIE Lihua. On gridless sparse methods for line spectral estimation from complete and incomplete data[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(12): 3139–3153. doi: [10.1109/tsp.2015.2420541](https://doi.org/10.1109/tsp.2015.2420541).
- [21] ZHANG Zhe, WANG Yue, and TIAN Zhi. Efficient two-dimensional line spectrum estimation based on decoupled atomic norm minimization[J]. *Signal Processing*, 2019, 163: 95–106. doi: [10.1016/j.sigpro.2019.04.024](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2019.04.024).
- [22] LI Yinchuan, WANG Xiaodong, and DING Zegang. Multi-dimensional spectral super-resolution with prior knowledge via frequency-selective Vandermonde decomposition and ADMM[EB/OL]. <https://arxiv.org/abs/1906.00278>, 2019.
- 吕明久：男，1985年生，讲师，主要研究方向为压缩感知在雷达成像中的应用。
- 陈文峰：男，1989年生，讲师，主要研究方向为双基地ISAR成像及压缩感知。
- 徐 芳：女，1985年生，讲师，主要研究方向为研究计算机技术与运用。
- 赵 欣：男 1981年生，讲师，主要研究方向为装备运用技术。
- 杨 军：男，1973年生，教授，主要研究方向为雷达系统、雷达信号处理与检测理论。
- 责任编辑：陈 倩