

基于降维噪声子空间的二维阵列 DOA 估计算法

闫锋刚* 刘 帅 金 铭 乔晓林
(哈尔滨工业大学 哈尔滨 150001)

摘 要: 为提高波达方向(Direction Of Arrival, DOA)的估计速度, 该文基于子空间的正交性原理, 利用噪声子空间及其共轭的交集进行奇异值分解(SVD)实现噪声子空间的降维, 并基于降维噪声子空间与导向矢量及其共轭的双正交性提出一种 2 维阵列快速 DOA 估计算法。理论分析和仿真实验表明: 该算法不受实际阵型的限制, 能将传统 MUSIC 谱的角度范围压缩至原来的一半, 从而将 DOA 估计的计算量降至传统方法的 50%, 并具有与 MUSIC 算法相当的角度分辨率。

关键词: 信号处理; MUSIC; DOA 估计; 降维噪声子空间; 双正交性

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2012)04-0832-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2011.00859

2-D DOA Estimation Method Based on Dimension Descended Noise Subspace

Yan Feng-gang Liu Shuai Jin Ming Qiao xiao-lin
(Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: To improve the speed of the estimation of Direction Of Arrival (DOA), the dimension of the noise subspace is descended by the Singular Value decomposing (SVD) on the intersection of noise subspace and its conjugate one. Then a new method for fast 2-D DOA estimation is proposed based on the double orthogonality of the descended noise subspace to the steering vector and it's conjugate one. Theoretical analysis and experiment results show that the newly developed method can be used without any restriction by the array structure and is capable of compressing the range of the dimension of traditional Multiple Signal Classification (MUSIC) spectrum for 2 times, therefore, the calculation capacity of DOA estimate can be reduced to 50% while the estimation precision is the same as that of MUSIC.

Key words: Signal Processing; Multiple Signal Classification (MUSIC); DOA (Direction Of Arrival) estimation; Descended noise subspace; Double orthogonality

1 引言

波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计是阵列信号处理的重要研究内容之一, 在雷达、声纳、无线通信、无源定位等领域有着重要应用^[1-3]。自发表 MUSIC(Multiple Signal Classification)算法^[4]以来, DOA 估计进入了一个新的超分辨阶段。随着应用的深入, 对 2 维 DOA 进行估计的需求日益迫切, 各种算法也不断被提出^[5-15]。然而, 经典 MUSIC 算法需在参数空间进行极值搜索, 计算量巨大; ESPRIT 算法虽然避免了谱峰搜索, 但需参数配对。因此, 降低计算量的研究成为学者研究的一个热点。文献[10]提出的求根 MUSIC 算法用多项式求根代替了谱峰搜索, 但仅适用于均匀线阵。文献[11]对求根

MUSIC 法进行了改进, 扩展了其应用范围, 但算法比较复杂且精度下降严重。文献[12,13]将 ESPRIT 算法应用于 2 维 DOA 估计, 但需要较高信噪比和快拍数, 且算法计算量依然较大。文献[14]提出的 DOA 矩阵法以及文献[15]推广的 DOA 时空矩阵法充分挖掘了相关矩阵特征向量包含的信息, 降低了计算量, 但算法性能有限且对阵列结构要求十分严格, 不利于工程应用。

对于 2 维 DOA 估计, 在高精度搜索步长下, 谱峰搜索占总计算量的比例大。因此, 减少谱峰搜索次数是降低运算量的关键。本文将 MUSIC 算法原理推广到共轭子空间, 通过对原噪声子空间及其共轭的交集进行奇异值分解(Singular Value Decomposing, SVD), 实现了噪声子空间的降维。接着, 利用降维噪声子空间与导向矢量及其共轭的双正交性提出了一种新的 2 维阵列 DOA 快速估计

2011-08-21 收到, 2011-12-16 改回

2009 航天支撑技术基金资助课题

*通信作者: 闫锋刚 yfglion@163.com

算法。该算法能实现空间谱范围的 2 倍压缩，从而能将 DOA 估计的运算量降低到传统方法的 50%。

2 MUSIC 算法原理

2.1 阵列和数据模型

设 M 个坐标为 $(x_m, y_m, 0), m = 1, 2, \dots, M$ 的阵元位于 XOY 平面，空间有 L 个辐射源 $S_l(t)$ ，定义波达方向 DOA 为 (θ_l, φ_l) ， $l = 1, 2, \dots, L$ 。其中， θ_l 为信号入射方向与 Z 轴的夹角， φ_l 为信号入射方向在 XOY 平面的投影与 X 轴的夹角，如图 1 所示。对于远场窄带信号，阵列一次快拍的接收数据为

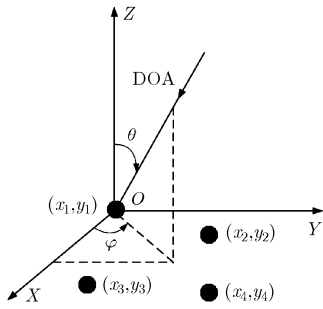


图 1 2 维阵列模型

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta, \varphi)\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$ 是 $M \times 1$ 维接收数据向量； $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_L(t)]^T$ 和 $\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$ 为 $M \times 1$ 维向量，分别表示信号和通道噪声。其中，各通道噪声均为方差为 σ^2 的高斯白噪声； $\mathbf{A}(\theta, \varphi) = [\mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \varphi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_L, \varphi_L)]$ 为大小为 $M \times L$ 的导向矢量矩阵，导向矢量 $\mathbf{a}(\theta, \varphi)$ 为

$$\mathbf{a}(\theta, \varphi) = [\exp(-i\beta_{1,1}), \exp(-i\beta_{1,2}), \dots, \exp(-i\beta_{1,M})]^T \quad (2)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ 为复数单元， λ 为信号波长， $\beta_{l,m}$ 值为

$$\beta_{l,m} = \frac{2\pi}{\lambda}(x_m \sin \theta_l \cos \varphi_l + y_m \sin \theta_l \sin \varphi_l) \quad (3)$$

2.2 MUSIC 算法

设阵列接收数据协方差矩阵 \mathbf{R} ，则由其定义可得

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (4)$$

对 \mathbf{R} 进行特征值分解，有

$$\mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{\Sigma}\mathbf{W}^H = [\mathbf{S}\ \mathbf{G}]\mathbf{\Sigma}[\mathbf{S}^H\ \mathbf{G}^H] \quad (5)$$

式中 $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ 为对角矩阵， \mathbf{R} 的特征值为 $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{M-L+1} = \dots = \lambda_M = \sigma^2$ ，其对应的特征向量为 $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, \dots, M$ 。 \mathbf{W} 为特征向量矩阵。由 $\mathbf{S} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_L]$ 张成的子空间为信号子空间 $\text{span}(\mathbf{S})$ ，而 $\mathbf{G} = [\mathbf{e}_{M-L+1}, \dots, \mathbf{e}_M]$ 张成噪声子空间 $\text{span}(\mathbf{G})$ 且满足 $\text{span}(\mathbf{S}) \perp \text{span}(\mathbf{G})$ 及 $\text{span}(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{S})$ 。于是，可得

$$\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{G} = \mathbf{O}_{M \times 1} \quad (6)$$

由此，可构造 MUSIC 空间谱为

$$p_{\text{MUSIC}}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{G}\mathbf{G}^H\mathbf{a}(\theta, \varphi)} \quad (7)$$

根据子空间正交性原理，在 2 维空间搜索，可得 DOA 为

$$(\theta_l, \varphi_l) = \arg \max_{\theta, \varphi} (p_{\text{MUSIC}}), \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (8)$$

3 基于降维噪声子空间的 DOA 估计算法

3.1 谱函数构造

设辐射源 E 波达角 DOA 为 $(\bar{\theta}, \bar{\varphi})$ ，由三角函数的周期性知 $\forall \bar{\varphi} \in [0, 2\pi]$ ，有 $\sin(\bar{\varphi} - \pi) = \sin(\bar{\varphi} + \pi) = -\sin(\bar{\varphi})$ 以及 $\cos(\bar{\varphi} - \pi) = \cos(\bar{\varphi} + \pi) = -\cos(\bar{\varphi})$ ，因此由式(2)可得

$$\mathbf{a}^*(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) = \exp\left\{\frac{2\pi}{\lambda} \sin \bar{\theta}\right\} \begin{bmatrix} \exp(-i(x_1 \cos(\bar{\varphi} \pm \pi) + y_1 \sin(\bar{\varphi} \pm \pi))) \\ \exp(-i(x_2 \cos(\bar{\varphi} \pm \pi) + y_2 \sin(\bar{\varphi} \pm \pi))) \\ \vdots \\ \exp(-i(x_M \cos(\bar{\varphi} \pm \pi) + y_M \sin(\bar{\varphi} \pm \pi))) \end{bmatrix} = \mathbf{a}(\bar{\theta}, \bar{\varphi} \pm \pi) \quad (9)$$

对式(6)两边同取共轭，得

$$[\mathbf{a}^H(\bar{\theta}, \bar{\varphi})]^* \mathbf{G}^* = [\mathbf{a}(\bar{\theta}, \bar{\varphi} \pm \pi)]^H \mathbf{G}^* = \mathbf{O}_{M \times 1} \quad (10)$$

可见，DOA 为 $(\bar{\theta}, \bar{\varphi})$ 的辐射源 E 存在镜像 E' ，我们不妨称其为虚拟辐射源。若 $\bar{\varphi} \in [0, \pi]$ ，则 E' 的“DOA”为 $(\bar{\theta}, \bar{\varphi} + \pi)$ ；若 $\bar{\varphi} \in [\pi, 2\pi]$ ，则 E' 的“DOA”为 $(\bar{\theta}, \bar{\varphi} - \pi)$ 。图 2 给出了真实辐射源与虚拟辐射源的关系。图中，虚拟辐射源对应的导向矢量取值与真实辐射源的导向矢量取值互为共轭，前者与噪声子空间 \mathbf{G} 正交，而后者则与噪声子空间的共轭 \mathbf{G}^* 正交。因而，若对 MUSIC 谱函数进行改造，在保留噪声子空间 \mathbf{G} 的同时引入 \mathbf{G}^* ，则其将在真实 DOA 及其镜像位置同时产生极值。

由此，定义谱函数为

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{G}\mathbf{G}^H\mathbf{G}^*\mathbf{G}^T\mathbf{a}(\theta, \varphi)} \quad (11)$$

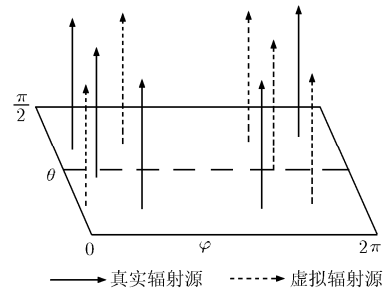


图 2 虚拟辐射源与真实辐射源关系

可见, $\forall \theta \in [0, \pi/2], \varphi \in [0, \pi]$, 有

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi + \pi) &= \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta, \varphi + \pi) \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \mathbf{a}(\theta, \varphi + \pi)} \\ &= \frac{1}{\mathbf{a}^T(\theta, \varphi) \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \mathbf{a}^*(\theta, \varphi)} \\ &= f^T(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (12)$$

同理, $\forall \theta \in [0, \pi/2], \varphi \in [\pi, 2\pi]$, 有

$$f(\theta, \varphi - \pi) = f(\theta, \varphi) \quad (13)$$

将 \mathbf{G} 写为列向量 $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_v], v = M - L$,

则

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^H \mathbf{G}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^H \\ \mathbf{g}_2^H \\ \vdots \\ \mathbf{g}_v^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^* & \mathbf{g}_2^* & \dots & \mathbf{g}_v^* \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_1^* \rangle & \langle \mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_2^* \rangle & \dots & \langle \mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_v^* \rangle \\ \langle \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g}_1^* \rangle & \langle \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g}_2^* \rangle & \dots & \langle \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g}_v^* \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{g}_v^*, \mathbf{g}_1^* \rangle & \langle \mathbf{g}_v^*, \mathbf{g}_2^* \rangle & \dots & \langle \mathbf{g}_v^*, \mathbf{g}_v^* \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)代入式(11), 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(\theta, \varphi)} &= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{a}^H, \mathbf{g}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{a}^H, \mathbf{g}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{a}^H, \mathbf{g}_v \rangle \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \langle \mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_1^* \rangle & \langle \mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_2^* \rangle & \dots & \langle \mathbf{g}_1^*, \mathbf{g}_v^* \rangle \\ \langle \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g}_1^* \rangle & \langle \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g}_2^* \rangle & \dots & \langle \mathbf{g}_2^*, \mathbf{g}_v^* \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{g}_v^*, \mathbf{g}_1^* \rangle & \langle \mathbf{g}_v^*, \mathbf{g}_2^* \rangle & \dots & \langle \mathbf{g}_v^*, \mathbf{g}_v^* \rangle \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{g}_1^T, \mathbf{a} \rangle \\ \langle \mathbf{g}_2^T, \mathbf{a} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{g}_v^T, \mathbf{a} \rangle \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v \langle \mathbf{a}^H, \mathbf{g}_j \rangle \langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_i \rangle \langle \mathbf{g}_i^T, \mathbf{a} \rangle \end{aligned} \quad (15)$$

由式(6)及式(15), 可得

$$\frac{1}{f(\theta, \varphi)} = \begin{cases} 0, & (\theta, \varphi) = (\bar{\theta}, \bar{\varphi}) \text{ 或 } (\bar{\theta}, \bar{\varphi} \pm \pi) \\ K > 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (16)$$

上述分析表明: $f(\theta, \varphi)$ 关于 $\varphi = \pi$ 对称, 并在辐射源及其镜像位置同时产生极值, 因而实现了 MUSIC 谱的压缩, 因此我们将其称为 MUSIC 对称压缩谱 (MUSIC Symmetrical Compressed Spectrum, MSCS)。传统 MUSIC 谱覆盖整个 2 维空间, 而 MSCS 将 DOA 估计的谱范围压缩至原来的一半, 因而总体运算速度也将提高约 1 倍。

3.2 噪声子空间降维及谱函数化简

本文在构造共轭噪声空间 \mathbf{G}^* 的同时, 等效于在原辐射源 E 的镜像位置增加了一个虚拟辐射源 E' 。若辐射源个数为 L , 则 MSCS 等效地在空间新增加

了 L 个虚拟辐射源。因而, 信号子空间被升高了 L 维; 相应地, 噪声子空间被降低了 L 维。

设升维后的信号子空间为 $\text{span}(\mathbf{R})$, 降维后的噪声子空间为 $\text{span}(\mathbf{N})$ 。则 $\text{span}(\mathbf{N})$ 应为原噪声子空间 $\text{span}(\mathbf{G})$ 和新增噪声子空间 $\text{span}(\mathbf{G}^*)$ 的交集, 而 $\text{span}(\mathbf{R})$ 则由原信号子空间 $\text{span}(\mathbf{S})$ 与新增信号子空间的和构成。由 $\mathbf{G} \mathbf{G}^H + \mathbf{S} \mathbf{S}^H = \mathbf{I}$, 得 $\mathbf{G}^* \mathbf{G}^T + \mathbf{S}^* \mathbf{S}^{*T} = \mathbf{I}$ 。因此, 新增信号子空间即为 $\text{span}(\mathbf{S}^*)$ 。所以,

$$\left. \begin{aligned} \text{span}(\mathbf{R}) &= \text{span}(\mathbf{S}) \oplus \text{span}(\mathbf{S}^*) \\ \text{span}(\mathbf{N}) &= \text{span}(\mathbf{G}) \cap \text{span}(\mathbf{G}^*) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

为了解 $\text{span}(\mathbf{N})$, 我们给出如下定理:

定理 令 $\Psi = \mathbf{I} - \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T$, 设 Ψ 零空间为 $v(\Psi)$, 那么有

$$\text{span}(\mathbf{N}) = v(\Psi) \quad (18)$$

证明 设向量 $\gamma \in \text{span}(\mathbf{N})$, 则 $\mathbf{S} \mathbf{S}^H \gamma = \mathbf{O}_{M \times 1}$, 从而,

$$\gamma = \gamma - \mathbf{S} \mathbf{S}^H \gamma = (\mathbf{I} - \mathbf{S} \mathbf{S}^H) \gamma = \mathbf{G} \mathbf{G}^H \gamma \quad (19)$$

同理 $\gamma = \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \gamma$, 故 $\gamma = \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \gamma$ 。从而,

$$(\mathbf{I} - \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T) \gamma = \Psi \gamma = \mathbf{O}_{M \times 1} \quad (20)$$

所以 $\gamma \in v(\Psi)$, 这表明:

$$\text{span}(\mathbf{N}) \subseteq v(\Psi) \quad (21)$$

反之, 若 $\gamma \in v(\Psi)$, 则

$$\gamma = \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \gamma \in \text{span}(\mathbf{G}) \quad (22)$$

由于 $\mathbf{G}^* \mathbf{G}^T$ 为 $\text{span}(\mathbf{G}^*)$ 的投影矩阵, 故

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \gamma + \mathbf{S}^* \mathbf{S}^{*T} \gamma \\ \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \gamma &\perp \mathbf{S}^* \mathbf{S}^{*T} \gamma \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

所以, 有

$$\begin{aligned} \|\gamma\|^2 &= \|\mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \gamma\|^2 + \|\mathbf{S}^* \mathbf{S}^{*T} \gamma\|^2 \\ &= \|\mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \gamma\|^2 \leq \|\mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \gamma\|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

于是, 得 $\|\mathbf{S}^* \mathbf{S}^{*T} \gamma\|^2 = 0$, 所以 $\gamma \in \text{span}(\mathbf{G}^*)$, 结合式(22)有 $\gamma \in \text{span}(\mathbf{N})$, 故

$$v(\Psi) \subseteq \text{span}(\mathbf{N}) \quad (25)$$

由式(21)和式(25)知定理成立。证毕

上述定理表明, 降维噪声子空间 $\text{span}(\mathbf{N})$ 与矩阵 Ψ 的零空间相同。前文中, 我们实质上是基于矩阵 $(\mathbf{I} - \Psi)$ 的非简化列空间(列向量线性相关)构造了 MSCS, 因而存在计算上的冗余。

对 Ψ 进行 SVD, 可得

$$\Psi = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^H \quad (26)$$

其中对角阵 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$ 。由于: $\text{rank}(\mathbf{G} \mathbf{G}^H) = \text{rank}(\mathbf{G}^* \mathbf{G}^T) = M - L$, 故 $\text{rank}(\Psi) = 2L$ 。因此,

Λ 的对角元素满足:

$$\sigma_1 = \cdots = \sigma_{2L} = 1 > \sigma_{2L+1} = \cdots = \sigma_M = 0 \quad (27)$$

从而,

$$\mathbf{V} = [\mathbf{\Phi}_{2L}, \tilde{\mathbf{\Phi}}_{M-2L}], \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2L \times 2L} & \mathbf{O}_{2L \times (M-2L)} \\ \mathbf{O}_{(M-2L) \times 2L} & \mathbf{O}_{(M-2L) \times (M-2L)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中 $\mathbf{\Phi}_{M-2L}$ 为 \mathbf{V} 的 $(M-2L)$ 个零奇异值对应的向量组成的矩阵; $\tilde{\mathbf{\Phi}}_{2L}$ 为其余 $2L$ 个非零奇异值对应的向量组成的矩阵。由矩阵列空间理论知, $\mathbf{\Phi}_{M-2L}$ 可作为 $v(\Psi)$ 的标准正交基^[16], 即

$$\text{span}(\mathcal{N}) = v(\Psi) = \text{span}(\mathbf{\Phi}_{M-2L}) \quad (29)$$

于是, 我们就得到了 MSCS 的简洁形式为

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta, \varphi) \mathbf{\Phi}_{M-2L} \mathbf{\Phi}_{M-2L}^H \mathbf{a}(\theta, \varphi)} \quad (30)$$

综上所述, 本文提出的基于降维噪声子空间的 DOA 快速估计算法步骤如下:

步骤 1 计算矩阵 Ψ 并对其进行奇异值分解得到降维噪声子空间的标准正交基 $\mathbf{\Phi}_{M-2L}$;

步骤 2 利用 $\mathbf{\Phi}_{M-2L}$ 构造 MSCS, 并在其半谱内搜索, 给出 DOA 信息 (θ_l, φ_l) 或其镜像 $(\theta_l, \varphi_l \pm \pi), l = 1, 2, \dots, L$;

步骤 3 在 MUSIC 谱 $(\theta_l, \varphi_l \pm \pi), l = 1, 2, \dots, L$ 的邻近小区域进行极值检验, 存在极值的位置即为真实 DOA。

从上述步骤可见, 如果真实辐射源位置本身对称, 由于本文算法在“步骤 3”中对 MUSIC 谱的对称位置邻域进行了极值检验, 因此不会丢失真实 DOA 信息。

3.3 算法性能分析

设特征值分解得信号、噪声子空间估计值分别为 $\hat{\mathbf{S}}$ 和 $\hat{\mathbf{G}}$, 设本文所得到的信号、噪声子空间为 $\hat{\mathbf{S}}_{\text{new}}$ 和 $\hat{\mathbf{G}}_{\text{new}}$ 。为了评价子空间的估计性能, 引入信号、噪声子空间估计误差函数 $C(\hat{\mathbf{S}})$ 和 $C(\hat{\mathbf{G}})$, 其定义分别为

$$C(\hat{\mathbf{S}}) \triangleq \|\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \hat{\mathbf{S}}\|_{\text{F}}^2 \quad (31)$$

$$C(\hat{\mathbf{G}}) \triangleq \|\hat{\mathbf{G}}^H \mathbf{A}\|_{\text{F}}^2 \quad (32)$$

其中 $\mathbf{A}^\dagger \triangleq (\mathbf{A} \mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{A}^H$ 为矩阵 Moore-Penrose 逆; $\|\cdot\|_{\text{F}}$ 为矩阵 Frobenius 范数。 $C(\hat{\mathbf{S}})$ 和 $C(\hat{\mathbf{G}})$ 反映了估计的子空间对真实子空间的逼近程度, 常被用来对估计子空间准确性评价^[17,18]。

图 3 和图 4 分别给出了 $M = 16$ 时, 不同 L 下 MUSIC 和 MSCS 子空间准确度对比关系。由图可见: 当 L 较小时, MSCS 噪声子空间和信号子空间准确度均比 MUSIC 略差。随着 L 增大, MSCS 噪

声子空间与 MUSIC 噪声子空间差异变小; 而在 L 的整个变化过程中, MSCS 信号子空间准确度都较 MUSIC 略差, 且随 L 增加而更甚。这是容易理解的, 因为 MSCS 比 MUSIC 多了 L 维“镜像”信号, 从而累积了子空间的估计误差, 这使得其总体误差较大。

但是, 这里需要强调的是: 本文算法由于在得到“镜像”信号后, 又在最后一步对 MUSIC 谱对称位置进行了峰值检验, 故其估计精度与 MUSIC 算法一致。因此, 本文算法在提高 DOA 估计速度的同时, 保持了估计精度未下降。

采用式(7)和式(30)计算一个谱值点分别需要 $3M^2 - 2ML$ 和 $3M^2 - 4ML$ 次复数乘法。若 DOA 搜索步长为 δ , 则 MUSIC 算法的计算量为 $\pi(3M^2 - 2ML)/\delta$ 。本文构造 MSCS 时, 矩阵 Ψ 奇异值分解运算量^[16]为 $M(M+1)^2 + 17(M+1)^3/3 \approx 6M^3$, 故本文算法总运算量为 $6M^3 + \pi(3M^2 - 4ML)/2\delta$ 。通常 $\delta \ll \pi$, 故 $\pi(3M^2 - 4ML)/\delta \gg 6M^3$ 。因而, 相比于 MUSIC 算法, 本文算法将 DOA 估计速度提高为原来的 2 倍左右。

4 仿真及分析

实验设置阵元数 $M = 16$, 阵元间距为半个波长, 快拍数 $N = 200$, Monte-Carlo 实验次数均为 200 次。

图 5 和图 6 给出了 $\text{SNR} = 20$ dB 时, MUSIC 谱与本文谱函数 MSCS 的对比关系, 其中真实 DOA 为 $(\theta_1, \varphi_1) = (50^\circ, 20^\circ)$ 及 $(\theta_2, \varphi_2) = (50^\circ, 210^\circ)$ 。由图可见: MSCS 良好地保持了 DOA 信息, 在 $(\theta_1, \varphi_1) = (50^\circ, 20^\circ)$, $(\theta_2, \varphi_2) = (50^\circ, 210^\circ)$ 及镜像位置 $(\theta'_1, \varphi'_1) = (50^\circ, 200^\circ)$, $(\theta'_2, \varphi'_2) = (50^\circ, 30^\circ)$ 同时产生了峰值。因此, 只需在 MSCS 半谱内搜索给出波达角或其镜像; 之后, 在 MUSIC 谱得对称位置邻域进行极值判断即能得到真实 DOA。

为了对比 MSCS 与 MUSIC 谱的差异, 选取二者空间谱的公共部分进行 DOA 估计实验。实验中, L 增加时, 增加的辐射源均非相干。

图 7 和图 8 给出了以 $L(L < M/2)$ 为参变量, 采用 MUSIC 和 MSCS 进行 DOA 估计的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)和成功概率与 SNR 的关系。其中, RMSE 定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(\hat{\theta}_i - \theta)^2 + (\hat{\varphi}_i - \varphi)^2]} \quad (33)$$

式中 $(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$ 为估计值, (θ, φ) 为真实值; 当相邻的两个角度 (θ_1, φ_1) , (θ_2, φ_2) 的谱值 f 满足下式时, 则认为分辨成功。

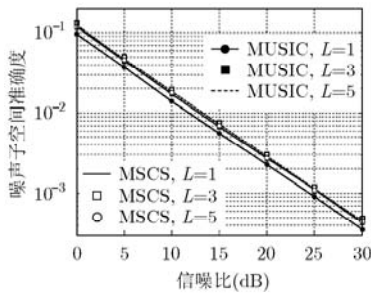


图3 噪声子空间准确度

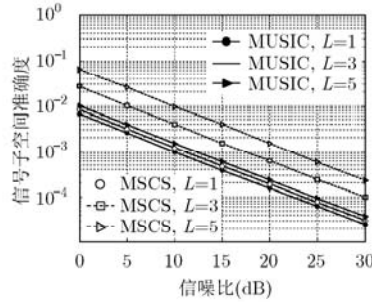


图4 信号子空间准确度

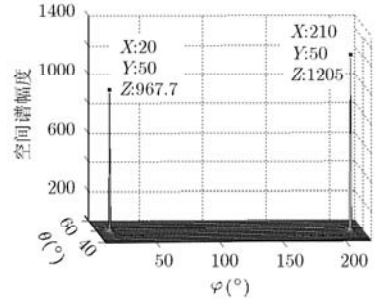


图5 MUSIC 空间谱

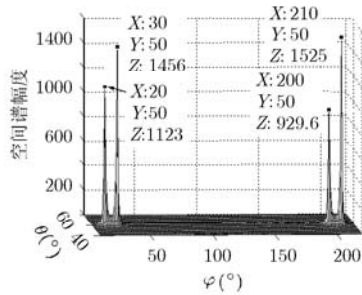


图6 MSCS 空间谱

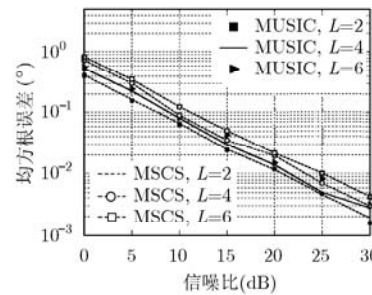


图7 DOA 估计均方根误差

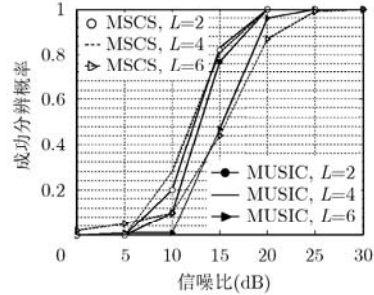


图8 DOA 估计成功概率

$$\frac{f(\theta_1, \varphi_1) + f(\theta_2, \varphi_2)}{2} > f\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (34)$$

由图可见：当 $L = 2$ 时，MSCS 与 MUSIC 的估计误差相当，随着 L 增大，MSCS 的估计误差较 MUSIC 略差。这与性能分析部分 MSCS 子空间估计精度的现象也保持一致。然而，在整个 L 的变化过程中，MSCS 的 DOA 估计成功概率均略优于 MUSIC，这是因为 MSCS 噪声子空间的维度下降而使得其空间谱变得更为“尖锐”了的缘故。

表 1 给出了不同 SNR 下，采用 MUSIC 算法和本文算法进行 DOA 估计所需时间的对比关系。实验中，采用 Matlab7.0 自带的“cputime”命令记录程序运行时间，DOA 估计的范围为 $40^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ ， $10^\circ \leq \varphi \leq 220^\circ$ 。由表 1 可见：MUSIC 算法 DOA 估计的时间约为 0.1205 s；而本文算法则需要约 0.0601 s。这说明本文算法能将 DOA 估计的速度提高约 2 倍。

5 结论

波达方向估计是空间谱估计的重要研究内容。

表 1 DOA 估计用时比较 (s)

算法	SNR(dB)					
	0	5	10	15	20	25
MUSIC 算法	0.1206	0.1198	0.1211	0.1198	0.1203	0.1216
本文算法	0.0634	0.0580	0.0552	0.0625	0.0601	0.0614

传统 MUSIC 算法需在 2 维空间进行峰值搜索，计算量巨大。本文从等效添加虚拟辐射源的角度入手，提出了一种基于降维噪声子空间的 2 维阵列快速 DOA 估计算法，在保持 DOA 估计精度不下降的同时将计算量降低了约 50%，并经过适当变换能适用于任意阵型，具有较大的理论和应用价值。

参考文献

- [1] Wan F, Zhu W P, and Swamy M N S. Spatial extrapolation based blind DOA estimation approach for closely spaced sources[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, 46(2): 569-582.
- [2] Chen F J, Kwong S, and Kok C W. Esprit like two dimensional DOA estimation for coherent signals[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, 46(3): 1477-1484.
- [3] Yo Han Ko, et al. 2-D DOA estimation with cell searching for a mobile relay station with uniform circular array[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2010, 58(10): 2805-2809.
- [4] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276-280.
- [5] Mathews C and Zoltowski M D. Eigenstructure techniques for 2-D angle estimation with uniform circular array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(9): 2395-2404.
- [6] Wang Guang-min, Xin Jin-ming, Zheng Nan-ning, et al. Computationally efficient subspace-based method for

- two-dimensional direction estimation with L-shaped array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(7): 3197-3212.
- [7] Tayem N and Kwon H. L-shape 2-dimensional arrival angle estimation with propagator method[J]. *IEEE Transactions on Antennas Propagation*, 2005, 53(5): 1622-1630.
- [8] 顾陈, 何劲, 李彧晟, 等. 基于扩展孔径波达方向矩阵法的高精度二维 DOA 估计[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(12): 2879-2883.
- Gu Chen, He Jin, Li Yu-sheng, *et al.*. Extended aperture DOA matrix method for high accurate 2D direction estimation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(12): 2879-2883.
- [9] 艾名舜, 马红光, 刘刚. 基于噪声子空间解析形式的快速 DOA 估计算法[J]. *电子与信息学报*, 2010, 32(5): 1071-1075.
- Ai Ming-shun, Ma Hong-guang, and Liu Gang. DOA estimation algorithm base on analytical solution of noise subspace[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(5): 1071-1075.
- [10] Barabell A J. Improving the resolution performance of eigenstructure based direction finding algorithms [C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Boston, 1983: 336-339.
- [11] Rubsamen M and Gershman A B. Direction-of-arrival estimation for nonuniform sensor arrays: from manifold separation to Fourier domain music methods[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(2): 588-599.
- [12] Roy R and Kailath T. ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984-995.
- [13] Jian C, Wang S, and Lin L. Two-dimensional DOA estimation of coherent signals based on 2D unitary ESPRIT method [C]. *The 8th International Conference on Signal Processing*, Beijing, 2006: 16-20.
- [14] 季飞, 余华, 谢泽明, 等. 基于DOA矩阵法的矢量传感器阵列二维波达方向估计[J]. *电子与信息学报*, 2008, 30(8): 1886-1889.
- Ji Fei, Yu Hua, Xie Ze-ming, *et al.*. A DOA matrix algorithm for 2-D direction finding estimation with electromagnetic vector sensor arrays[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(8): 1886-1889.
- [15] Du Rui-yan, Wang Jin-kuan, and Liu Fu-lai. Space-time matrix method for joint frequency and 2-D DOA estimation [C]. *The 1st International Conference on Information Science and Engineering*, Qinhuangdao, China, 2009: 671-674.
- [16] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004, 9: 611-613.
- [17] 张立杰, 黄建国, 史文涛, 等. 正交投影阵列信号子空间估计方法[J]. *系统工程与电子技术*, 2009, 31(9): 2063-2066.
- Zhang Li-jie, Huang Jian-guo, Shi Wen-tao, *et al.*. Orthogonal projection method for array signal subspace estimation[J]. *Systems Engineering and Electronic*, 2009, 31(9): 2063-2066.
- [18] Huang Lei, Wu Shunjun, Feng Dazhang, *et al.*. Low complexity method for signal subspace fitting [J]. *Electronics Letters*, 2004, 40(14): 847-848.
- 闫锋刚: 男, 1982年生, 工程师, 博士生, 研究方向为阵列信号处理及统计性能分析、空间谱估计等。
- 刘 帅: 男, 1980年生, 讲师, 研究方向为极化信号处理、空间谱估计。
- 金 铭: 男, 1968年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为雷达信息处理及电子对抗等。
- 乔晓林: 男, 1948年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为极化信号处理、电子对抗、末制导雷达等。