

多频激励忆阻型Shimizu-Morioka系统的簇发振荡及机理分析

李志军* 方思远 周成义

(湘潭大学信息工程学院 湘潭 411105)

摘要: 为了研究忆阻系统的簇发振荡及其形成机理, 该文在Shimizu-Morioka(S-M)系统的基础上引入忆阻器件和两个慢变化的周期激励项, 建立了一种多时间尺度的忆阻型S-M系统。首先研究了单一激励下S-M系统的簇发行为及分岔机制, 得到一种对称型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发模式。然后借助De Moivre公式将多频激励系统转化为单频激励系统, 结合快慢分析法重点分析了附加激励幅度对“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发模式的影响。对应于不同附加激励幅度该文发现了两种新的簇发模式, 即扭曲型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发和嵌套级联型sub-Hopf/sub-Hopf”簇发。借助时序图、分岔图和转换相图分析了相应的簇发机制。最后, 采用Multisim软件搭建电路模型并进行仿真实验, 得到的实验结果与理论分析结果相吻合, 从而实验证明了忆阻型S-M系统的簇发模式。

关键词: 忆阻型S-M系统; 多频慢激励; 扭曲型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发; 级联嵌套型sub-Hopf/sub-Hopf”簇发

中图分类号: TN601

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2020)04-0878-10

DOI: 10.11999/JEIT190855

Bursting Oscillations and Bifurcation Mechanism in Memristor-based Shimizu–Morioka System with Multi-frequency Slow Excitations

LI Zhijun FANG Siyuan ZHOU Chengyi

(College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan, 411105, China)

Abstract: In order to study the bursting oscillations and its formation mechanism of memristor-based system, a multi-timescale memristor-based S-M system is established by introducing a memristor device and two slowly changing periodic excitations into the Shimizu-Morioka (S-M) system. Firstly, the bursting behavior and bifurcation mechanism of S-M system under single excitation are studied, and a symmetric bursting pattern of “sub-Hopf/sub-Hopf” is obtained. Then the multi-frequency excitation system is transformed into single frequency excitation system by using De Moivre formula, and the influence of additional excitation amplitude and frequency on “sub Hopf / sub Hopf” bursting mode is analyzed by using the fast-slow analysis method. As a result, two new bursting patterns named as twisted “sub-Hopf/sub-Hopf” bursting and nested “sub-Hopf/sub-Hopf” are found under different amplitudes of the additional excitation. The corresponding bursting mechanisms are analyzed with time history diagram, bifurcation diagram and transformation phase diagram. Finally, Multisim simulation results, which are in good agreement with the numerical simulation results, are provided to verify the validity of the study.

Key words: Memristor-based Shimizu-Morioka (S-M) system; Multi-frequency slow excitations; Twisted “sub-Hopf/sub-Hopf” bursting; Nested “sub-Hopf/sub-Hopf” bursting

收稿日期: 2019-11-01; 改回日期: 2019-12-27; 网络出版: 2020-01-07

*通信作者: 李志军 lizhijun@xtu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61471310), 国家重点研发项目(2018AAA0103300), 湖南省自然科学基金(2015JJ2142)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61471310), The National Key R&D Program of China (2018AAA0103300), The Natural Science Foundation of Hunan Province (2015JJ2142)

1 引言

多时间尺度系统具有广泛的工程背景, 如神经元放电模式^[1,2]、生物代谢中变构效应^[3]、化学反应中不同数量级的反应速率^[4]等。簇发振荡(Bursting Oscillations, BOs)是多时间尺度系统中普遍存在的一种复杂动力学行为, 表现为随时间演化大幅振荡与小幅振荡交替出现^[5,6]。2000年, 文献^[7,8]提出了快慢分析法, 其主要思想是将多时间尺度系统分解为快、慢两个子系统, 通过研究快子系统的稳定性和分岔模式可以揭示簇发振荡的生成机理。簇发振荡由沉寂态(Quiescent State, QS)和激发态(Spiking state, SP)组成, 当系统状态变量表现为微振幅振荡或几乎不变时, 系统处于沉寂态; 当状态变量表现为大幅振荡时, 系统处于激发态。近年来, 国内外学者借助快慢分析法对自治系统的簇发振荡及其机理进行了深入研究, 取得了丰富的成果。如, Innocenti等人^[9]研究了Hindmarsh-Rose(HR)神经元模型从周期簇发到混沌簇发的转换机制; 而Bao等人^[10]揭示了两快一慢Morris-Lecar(ML)神经元模型的混沌簇发和共存多稳态放电模式及其生成机理, 并通过硬件电路实验验证了系统的簇发行为。对于非自治系统(周期激励系统), 当外部激励频率远小于系统固有频率时, 外部激励可以视为慢子系统, 在此基础上可以得到快子系统关于慢变参数的分岔图, 用于揭示簇发的动力学机制。大量研究表明: 激励幅值和激励频率是影响非自治系统簇发行为的两个重要因素^[11-13]。由于在实际系统中往往存在着多种激励共存的现象, 因此多频激励系统的动力学行为也激起了广泛的兴趣^[14-16]。如, Han等人^[17,18]研究了两个慢变激励下Duffing和Van der Pol系统的不同簇发模式和分岔机制。他们的研究表明, 系统中的两个慢激励在一定条件下可以转化为单一慢变量^[19], 从而可以结合快-慢分析法揭示多频慢激励系统复杂的簇发行为。此外, 最近的研究表明, 当两个激励项存在相位差时, 也可以诱发双稳定性和复杂而有趣的簇发动力学^[20]。

作为第4个基本无源器件, 忆阻器建立磁通和电荷之间的关系, 其瞬时阻值与电压幅度、极性、频率和工作时间相关。由于忆阻器具有独特的“记忆”功能, 采用忆阻器模拟生物突触在硬件神经形态电路中得到了广泛的应用^[21,22]。忆阻型神经元电路中的复杂簇发振荡现象近年来也引起了广大学者的关注^[23-25]。如, Chen等人^[24]采用图解法研究了3阶忆阻型FitzHugh-Nagumo电路的簇发机理; 而在文献^[25]中, Bao等人分析了忆阻型HR神经元模型的隐藏簇发振荡和生成机理; 在基于低通滤波器

的忆阻型振荡器中Wu等人^[26]发现由延迟霍普分岔诱导的各种复杂簇发现象。

由于忆阻型系统的簇发研究相对甚少, 特别是针对多频激励下忆阻型系统的簇发研究几乎没有, 为了揭示多频激励忆阻型混沌系统的簇发现象并探讨其分岔机制, 本文在经典Shimizu-Morioka(S-M)系统中引入广义忆阻器和两个慢变激励, 建立了一种新的多频慢激励忆阻型S-M系统。借助快慢分析法本文首先研究了单一激励下S-M系统的簇发行为及分岔机制, 发现了一种对称型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发模式。由于快慢分析法不能直接分析多频激励系统, 本文借助De Moivre公式^[19]将多频激励系统转化为单频激励系统。在此基础上研究了附加激励幅度对“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发的影响, 发现了两种新的簇发模式, 并分析了相应的簇发机制。

2 系统模型

在经典Shimizu-Morioka(S-M)系统^[27]中引入广义忆阻器和两个不同频率和幅度的外激励 $\beta_{1,2}\cos(\omega_{1,2}t)$, 本文得到了一种多频慢激励忆阻型S-M系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - ay - xz + kMy + \beta_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_2 \cos(\omega_2 t) \\ \dot{z} &= -bz + x^2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, x, y, z 是状态变量, a, b, k 是系统参数, $\beta_{1,2}$ 是两个外激励的幅值, $\omega_{1,2}$ 分别表示两个外部激励信号的频率, M 则表示忆阻器, 其赋值关系为^[28]: $M=x^2-2$ 。当外激励信号频率满足 $0 < \omega_{1,2} < 1$ 时, 即外激励频率与系统固有频率之间存在量级差距, 系统式(1)可以视为含多时间尺度的快慢耦合系统。在多频激励的系统中, 由于激励信号之间的相互影响, 不能直接采用快慢分析法分析系统的簇发机理。为了解决这个问题, 本文首先对单频激励忆阻型S-M系统的簇发振荡进行研究, 将激励项 $\beta_1\cos(\omega_1 t)$ 视为快子系统的慢变参数, 采用快慢分析法分析了快子系统的稳定性和分岔集; 然后借助De Moivre公式将另外一个激励项 $\beta_2\cos(\omega_2 t)$ 转化为该慢变参数的函数表达式分析了该系统的多频簇发机制。

3 单频慢激励忆阻型S-M系统的簇发振荡

当 $\beta_2=0$ 时, 系统式(1)为单一慢变激励S-M系统

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - ay - xz + kMy + \gamma \\ \dot{z} &= -bz + x^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $\gamma = \beta_1 \cos(\omega_1 t)$ 为外激励项。根据快慢分析法, 系统式(2)可以看作是快子系统和慢子系统的耦合, 其中慢子系统可以表示为 $\dot{\gamma} = -\beta_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t)$ 。由于慢变参数调控的快子系统的分岔模式决定了系统在沉寂态和激发态的切换机制, 因此研究快子系统的分岔机制对研究簇发机理具有重要的作用。

系统式(2)的平衡点可以表示为 $E_0(x, y, z) = (x_0, 0, x_0^2/b)$, 其中 x_0 由 $x_0^3 - bx_0 - b\gamma = 0$ 决定。在平衡点附近将系统式(2)线性化, 得到雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - \frac{x_0^2}{b} & -a + k(x_0^2 - 2) & -x_0 \\ 2x_0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (3)$$

其特征方程表示为

$$\lambda^3 + \lambda^2[a + b - k(x_0^2 - 2)] + \lambda \left[ab - bk(x_0^2 - 2) - 1 + \frac{x_0^2}{b} \right] - (3x_0^2 - b) = 0 \quad (4)$$

由于慢变参数 γ 的周期性变化影响了系统平衡点的稳定性, 根据Routh-Hurwitz判据可以得到分岔条件

(1) Fold分岔:

$$3x_0^2 - b = 0 \quad (5)$$

此时系统平衡点的轨迹会发生跃迁。

(2) Hopf分岔:

$$[a + b - k(x_0^2 - 2)] \cdot \left[ab - bk(x_0^2 - 2) - 1 + \frac{x_0^2}{b} \right] - (3x_0^2 - b) = 0 \quad (6)$$

此时出现一对纯虚特征值, 系统式(2)将产生周期振荡。

为了揭示系统的簇发机理, 固定参数 $a = 0.8, b = 0.35, k = 0.35, \omega_1 = 0.002$, 采用XPPAUT软件绘制了系统式(2)关于慢变参数 γ 的分岔图, 如图1(a)所示。当外部激励幅度 $\beta_1 = 4$ 时, 系统式(2)展现了簇发振荡, 变量 x 的时序图如图1(c)所示。为了解释该簇发振荡的生成机理, $x-\gamma$ 平面的转换相图和分叉图的叠加图如图1(b)所示。假设轨迹从A点出发, 受到稳定平衡点 E^- 的吸引轨迹严格沿着平衡点曲线前行, 系统表现为沉寂态。当 γ 增大到 sub-Hopf点 ($\gamma = 0.18$) 时, 平衡点 E^- 失去稳定性。由于延迟效应轨迹继续沿不稳定平衡点 E^- 继续前行直到 Fold1点 ($\gamma_{\text{fold}} = 0.24$) 才产生跳变, 受稳定平衡点 E^+ 的吸引轨迹沿平衡点曲线 E^+ 作衰减振荡, 完成了从沉寂态到激发态的转换。当慢变参数 γ 增大到正极值 $\gamma = 4$ 时, 系统恢复到沉寂态。然后慢变参数 γ 由正极值逐渐减小, 类似地, 轨迹从B点严格沿着平衡曲线 E^+ 向左运动直到 Fold2点 ($\gamma_{\text{fold}} = -0.24$) 点才下跳到稳定平衡点 E^- , 然后沿平衡点曲线 E^- 作衰减振荡直至慢变参数达到负极值 $\gamma = -4$, 从而完成了一个周期的运动。由于该簇发振荡的沉

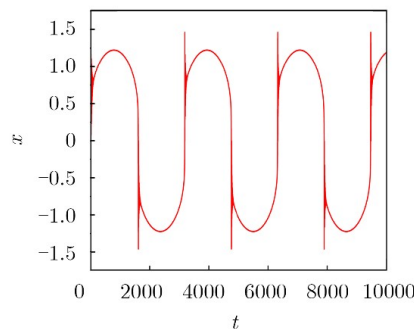
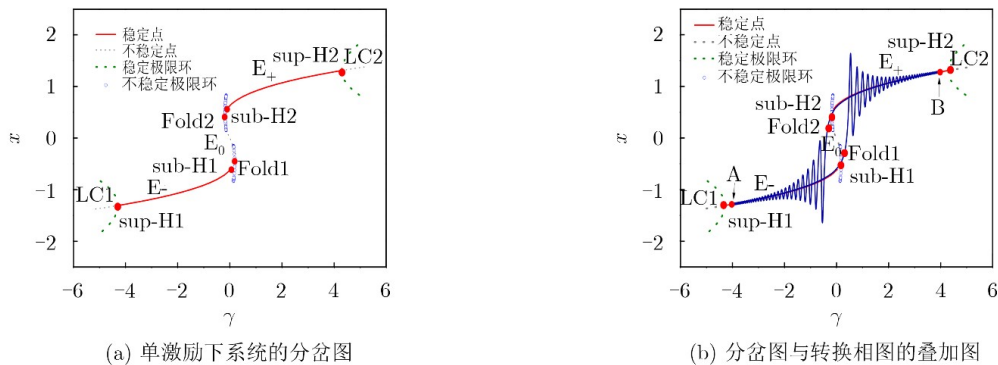


图1 单激励下系统的动力学行为分析

寂态和激发态之间的转换是由sub-Hopf分岔引起的，且具有对称结构，因此这种簇发模式可以称为对称型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发。

4 双频慢激励忆阻型S-M系统的簇发振荡

引入激励 $\beta_2\cos(\omega_2t)$ 后，系统式(1)中存在两个慢变激励。因此，无法用常规的快慢分析法系统的簇发行为。为了解决这个问题，本文借鉴文献[19]的方法，采用De Moivre公式对系统式(1)进行转化，转换过程如下。

对于两个激励频率 ω_1 和 ω_2 ，假设其比例关系为 $m:n$ ，则频率 $\omega_{1,2}$ 可以分别表示为 $\omega_1=\varepsilon p\text{gcd}(m:n)$ ， $\omega_2=\varepsilon q\text{gcd}(m:n)$ ，其中 $0<\varepsilon\ll 1$ ， $\text{gcd}(m:n)$ 表示 m 和 n 的最大公约数(gcd)， p 和 q 是互质数。因此两个激励可以分别写成 $\omega_1=\varepsilon q\text{gcd}(m:n)$ ， $\omega_2=\varepsilon p\text{gcd}(m:n)$ ，则系统式(1)可以转换为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - ay - xz + kMy + \beta_1 f_p^*(g(t)) + \beta_2 f_q^*(g(t)) \\ \dot{z} &= -bz + x^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中， $g(t)$ 可以视为系统的慢变量，可以表示为 $g(t)=\cos(\varepsilon\text{gcd}(m:n)t)$ ， $f_p^*(g(t))$ 和 $f_q^*(g(t))$ 分别表示 $\cos(\omega_1t)$ 和 $\cos(\omega_2t)$ 的三角多项式，其通式 f_n^* 为

$$f_n^*(x) = C_n^0 x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - \dots + i^m C_n^m x^{n-m}(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \quad (8)$$

其中， i 为虚数。从数学角度看，这样的变换对于系统的动力学行为没有任何影响，然而经过变换以后，双频激励系统中只存在一个慢变量 $g(t)$ 了，因而可以采用快慢分析法对系统的簇发机制进行分析。简单起见，本文仅考虑 ω_2 为 ω_1 的整数倍情况，即 $\omega_2=k\omega_1$ ，则 $g(t)=\cos(\omega_1t)$ ，那么双频激励系统可以简化为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - ay - xz + kMy + \beta_1 g(t) + \beta_2 f_n^*(g(t)) \\ \dot{z} &= -bz + x^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

下面本文将结合式(9)和快慢分析法分两种情况研究附加激励项 $\beta_2\cos(\omega_2t)$ 对系统簇发振荡的影响：(1) $\beta_1>\beta_2$ ；(2) $\beta_1<\beta_2$ 。

4.1 $\beta_1>\beta_2$ ：扭曲型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡

保持系统其他参数不变，取 $\beta_1=5$ ， $\beta_2=1$ ， $\omega_1=0.002$ ，图2(a)–图2(c)分别给出了 $k=5$ ，9和13时，即 $\omega_2=0.010$ ， $\omega_2=0.018$ 和 $\omega_2=0.026$ 的状态 x 的时序图。从图2可以看出，系统式(1)在 $\beta_1>\beta_2$ 的情况下展现出一种特殊的簇发行为。与图1的“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发不同的是，在任意两

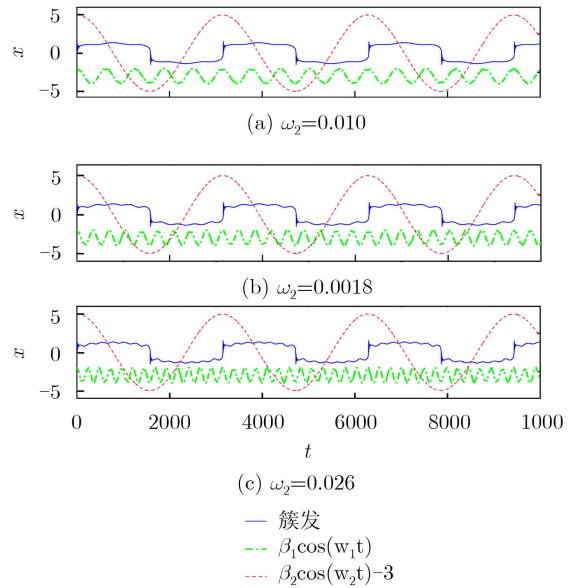


图2 扭曲型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡的时序图

个相邻的激发态之间，即沉寂态，系统展现出小幅振荡，且振荡的频率随激励频率 ω_2 的增加而增加，并与激励频率 ω_2 保持严格相等。

为了揭示这种特殊的簇发现象，本文绘制了快子系统关于慢变参数的分岔图、分岔图和转移相图的叠加图，分别如图3(a)–图3(f)所示。从快子系统的分岔图可以看出，附加激励 $\beta_2\cos(\omega_2t)$ 使原本光滑的稳定平衡点分支发生了扭曲变形，导致系统的平衡点曲线出现了极值点，并且极值点的数量随激励频率 ω_2 增加而增加。当 $\omega_2=0.010$ 时快子系统的平衡点分支由于扭曲变形出现了4个极值点；当 $\omega_2=0.018$ 时，出现了8个极值点；而当 $\omega_2=0.026$ 时出现了12个极值点。

当两个外激励同时作用于系统时，整个激励项可表示为 $g(T)=\beta_1\cos(\omega_1t)+\beta_2\cos(\omega_2t)$ 。由于 $\beta_1>\beta_2$ ，且 $\omega_1<\omega_2$ ，在整个激励项中 $\beta_1\cos(\omega_1t)$ 占了主导地位， $\beta_2\cos(\omega_2t)$ 仅导致整个激励 $g(T)$ 沿 $\beta_1\cos(\omega_1t)$ 作小幅波动。当慢变量 $\cos(0.002t)$ 对快子系统进行调制时，慢变量会周期性的经过sub-Hopf点和Fold点，从而使得系统激发态出现的频率与主导激励 $\beta_1\cos(\omega_1t)$ 的频率相同。而在主导激励 $\beta_1\cos(\omega_1t)$ 的一个信号周期内，附加激励信号 $\beta_2\cos(\omega_2t)$ 会振荡 k 次，致使光滑的平衡点分支产生扭曲，出现 $k-1$ 个极值点，因而小幅振荡的频率与附加激励频率相同。根据图3(d)–图3(f)的转移相图和分叉图的叠加图可知，当慢变量 $\cos(\omega_1t)$ 由小到大会经过sub-Hopf-点和Fold-点时，轨迹会上跳变到稳定点平衡点分支E+并展现出簇发行为。由于受稳定平衡点E+的吸引，振荡幅度逐渐衰减最后

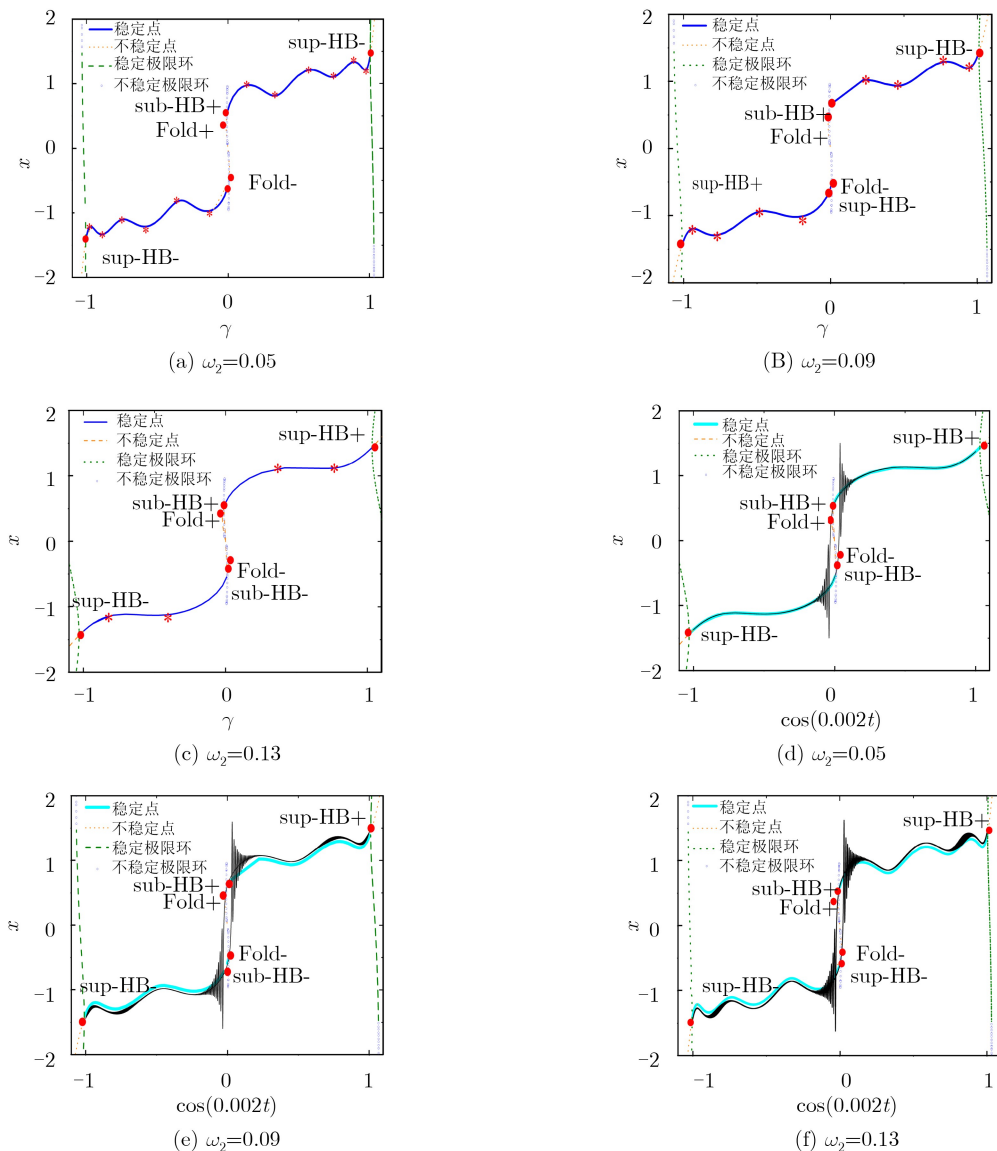


图3 扭曲型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡的平衡点分布曲线及和转换相图的叠加图

轨迹稳点在平衡点分支E+。由于受附加激励项 $\beta_2 \cos(\omega_2 t)$ 的影响，平衡点分支E+虽然产生了扭曲和变形，但不会改变平衡点分支E+的稳定性。因此轨迹会严格遵循扭曲的稳定平衡点分支E+运动直到慢变参数达到最大值，从而使得系统在沉寂态期间表现出小幅振荡。当慢变量 $\cos(\omega_1 t)$ 由大到小经过sub-Hopf+点和Fold+点时，轨迹会下跳变到稳定点平衡点分支E-并产生簇发振荡，同样由于附加激励项 $\beta_2 \cos(\omega_2 t)$ 的影响，平衡点分支E-也产生了扭曲和变形，从而使得系统沿平衡点分支E-运动时也会产生小幅振荡。由于这种簇发振荡沉寂态和激发态之间的转换是由sub-Hopf分岔引起的，并且在沉寂态期间由于附加激励项的影响使得系统表现出小幅振荡行为，因此这种簇发模式可以称之为扭曲型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发。

4.2 $\beta_1 < \beta_2$: 嵌套级联型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡

从4.1节分析可知，小幅度附加激励项 $\beta_2 \cos(\omega_2 t)$ 会使系统的稳定平衡点分支产生扭曲和变形，从而使得系统在沉寂态期间表现出小幅振荡行为。在本节本文主要讨论当 $\beta_2 > \beta_1$ 时，激励项 $\beta_1 \cos(\omega_1 t)$ 和 $\beta_2 \cos(\omega_2 t)$ 如何共同影响忆阻型S-M系统的簇发行为。

保持系统其他参数不变，取 $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\omega_1 = 0.01$, 图4给出了 ω_2 分别为 $\omega_2 = 0.02$, $\omega_2 = 0.03$, $\omega_2 = 0.04$ 时变量 x 的时序图。本文发现，随着 ω_2 的增加，在激励项 $\beta_1 \cos(\omega_1 t)$ 的每个周期内会产生越来越多的沉寂态和激发态。图5给出了快子系统的分岔图及其与转换相图的叠加图。从图5(a)–图5(c)可以看出，附加激励项 $\beta_2 \cos(\omega_2 t)$ 的引入使系统平衡点分支上产生了额外的Hopf分岔点和Fold分岔

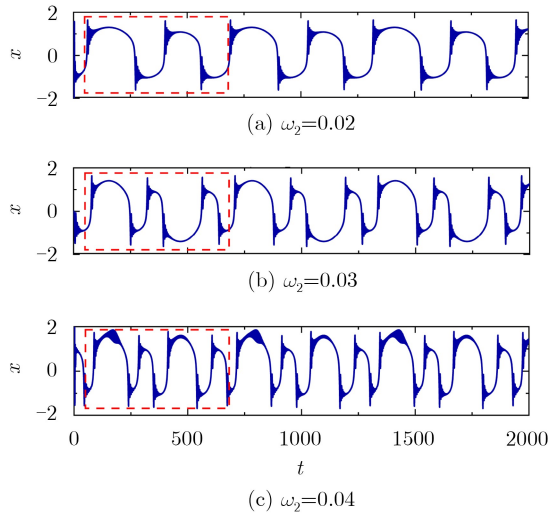


图4 级联型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡的时序图

点，这意味着在激励项 $\beta_1 \cos(\omega_1 t)$ 的1个周期出现了多次簇发模式的级联。这是由于 $\beta_2 > \beta_1$ ，在整个激

励项 $g(T) = \beta_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_2 \cos(\omega_2 t)$ 中， $\beta_2 \cos(\omega_2 t)$ 占了主导地位，且由于 $\omega_2 = k\omega_1$ 保持不变，这意味着在一个 $\beta_1 \cos(\omega_1 t)$ 的振荡周期内， $\beta_2 \cos(\omega_2 t)$ 振荡 k 次。因此在一个 $\beta_1 \cos(\omega_1 t)$ 的振荡周期内，整个激励项 $g(T)$ 分别通过sub-Hopf-点和Fold-, sub-Hopf+点和Fold+分岔点 k 次，从而可以得到 k 级“sub-Hopf/sub-Hopf”级联簇发振荡。

从图5(d)可以看出，当 $\omega_1 = 0.01$ ， $\omega_2 = 0.02$ 时，慢变量 $\cos(\omega_1 t)$ 由负到正变化时，轨迹沿稳定平衡点曲线向右运动，系统在这个阶段表现为沉寂态。当慢变量减小至sub-H1点时，sub-Hopf导致平衡点失稳。由于延迟效应，轨迹在经过Fold1点后产生下跳变并沿稳定平衡点作衰减振荡，实现了从沉寂态到激发态的转换。由于受稳定平衡点的吸引，随后轨迹稳定在平衡点曲线并继续沿平衡点曲线向右运动。当慢变量继续增加至sub-H4和Fold4时，平衡点分支失稳，受稳点平衡点的吸引，轨迹产生上

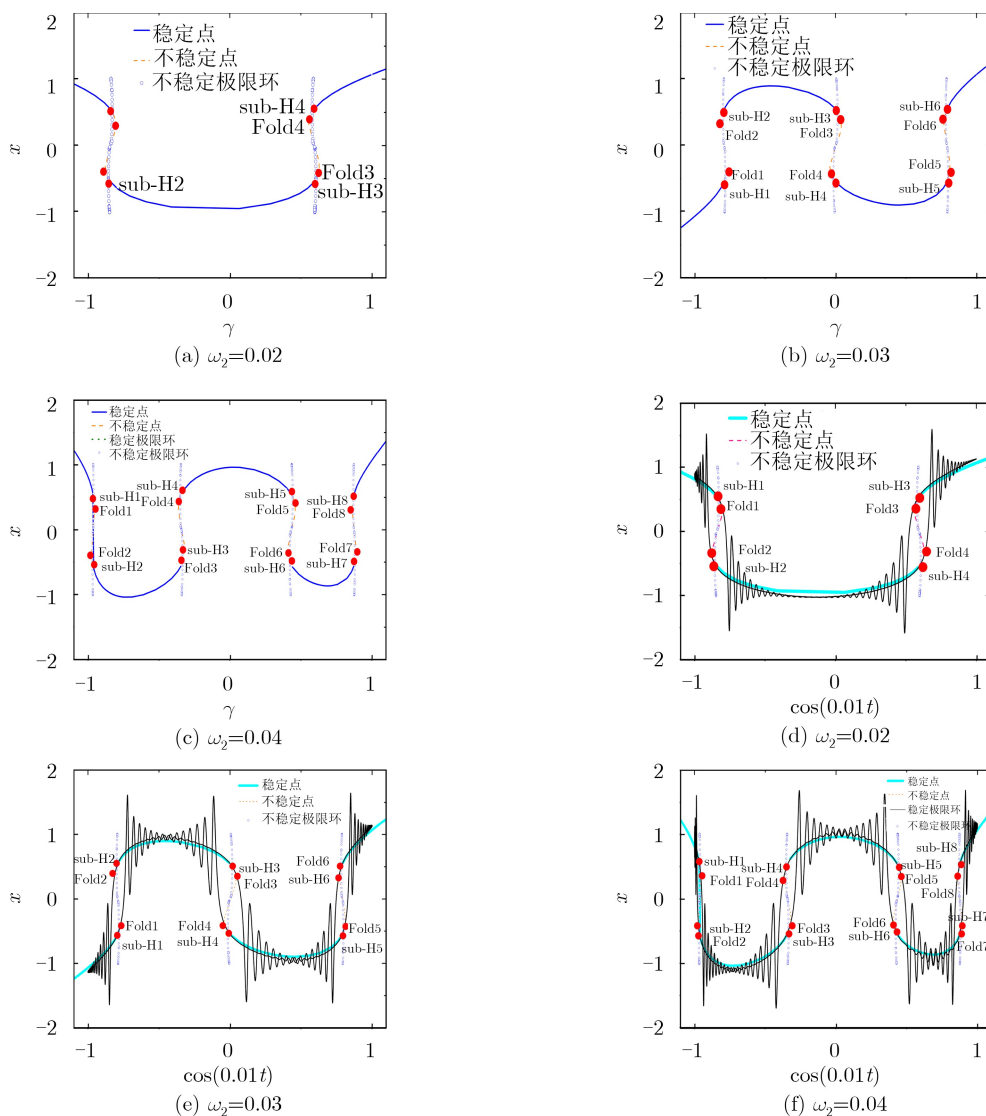


图5 级联型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡的平衡点分布曲线及和转换相图的叠加图

跳变并沿其作衰减振荡，系统又从沉寂态切换到激发态。随后在外部信号的激励下，慢变量由正到负变化，轨迹一直沿稳定平衡点曲线向左运动直至慢变参数减小至sub-H3和Fold3时，轨迹产生下跳变并沿平衡点曲线作衰减振荡，系统第3次从沉寂态切换到激发态。然后轨迹沿稳定平衡点继续向左运动，当慢变量减小至sub-H3和Fold3时，轨迹产生上跳变并展现出大幅度的簇发脉冲，系统第4次实现沉寂态到激发态的切换。随后轨迹沿稳定平衡点曲线返回到起点，从而完成了1个周期的运动。从上述分析过程可以看出，在1个慢变量的变化周期内，系统4次实现了沉寂态和激发态的相互切换，从而实现了一种两级“sub-Hopf /sub-Hopf”嵌套级联簇发振荡。当 ω_2 增加时，则级联的级数增加，系统的动力学行为将变得更加复杂。图5(e)和图5(f)分别为 $\omega_2=0.03$ 和0.04时，系统展现出复杂的3级“sub-Hopf /sub-Hopf”嵌套级联簇发振荡和4级“sub-Hopf /sub-Hopf”嵌套级联簇发振荡。

5 电路仿真

为了揭示多频激励忆阻型S-M系统的簇发振荡行为，本文采用了模块化电路设计方法构建了系统式(1)的整体实现电路如图6所示，其中 $V_{1,2}=A_{1,2}\sin(2\pi f_{1,2}t)$ 是幅值为 $A_{1,2}$ 和频率 $f_{1,2}$ 的交流电压；运算放大器UA741实现积分运算和比例运算，模拟乘法器AD633JN实现非线性项，所有的有源器件均采用 $\pm 15V$ 电源供电。根据基尔霍夫定理本文可以得到相应的电路方程为

$$\left. \begin{aligned} C_1 \frac{dv_x}{dt} &= \frac{1}{R_1} v_y \\ C_2 \frac{dv_y}{dt} &= \frac{1}{R_4} v_x - \frac{1}{R_5} v_y - \frac{1}{10VR_6} v_x v_z \\ &\quad + \left(\frac{1}{100VR_8} v_x^2 - \frac{1}{R_7} v_y \right) + \frac{1}{R_9} A_1 \cos(2\pi f_1 t) V \\ &\quad + \frac{1}{R_{10}C_2} A_2 \cos(2\pi f_2 t) V \\ C_3 \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{1}{R_{12}} v_z + \frac{1}{100VR_{13}} v_x^2 \end{aligned} \right\} (10)$$

其中， v_x, v_y, v_z 分别对应电容 C_1, C_2, C_3 的端电压。引入时间转换因子 $t=\tau/RC=\tau_0\tau$ 和归一化变量 $X=v_x/1V, Y=v_y/1V$ 和 $Z=v_z/1V$ ，系统式(10)可以转换成无量纲形式

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= \frac{R}{R_1} Y \\ \dot{Y} &= \frac{R}{R_4} X - \frac{R}{R_5} Y - \frac{R}{10R_6} XZ \\ &\quad + \frac{R}{100R_8} \left(X^2 - \frac{100R_8}{R_7} \right) Y \\ &\quad + \frac{R}{R_9} A_1 \cos\left(\frac{2\pi f_1 t}{\tau_0}\right) \\ &\quad + \frac{R}{R_9} A_2 \cos\left(\frac{2\pi f_2 t}{\tau_0}\right) \\ \dot{Z} &= -\frac{R}{R_{12}} Z + \frac{R}{10R_{13}} X^2 \end{aligned} \right\} (11)$$

比较系统方程式(1)和电路方程式(11)，当电路参数与系统参数满足式(12)的关系

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{R_1} &= \frac{R}{R_4} = \frac{R}{R_9} = \frac{R}{10R_6} = \frac{R}{10R_{13}} = 1 \\ \frac{R}{R_5} &= a \\ \frac{R}{100R_8} &= k \\ \frac{100R_8}{R_7} &= 2 \\ \frac{R}{R_{12}} &= b \\ \omega_1 &= \frac{2\pi f_1}{\tau_0} \\ \omega_2 &= \frac{2\pi f_2}{\tau_0} \end{aligned} \right\} (12)$$

则图6实现的电路能正确模拟系统式(1)的动力学行为。取系统参数分别为 $a=0.8, b=0.4, k=0.35, \tau_0=1000$ ，则相应的电路参数为

$$\begin{aligned} C &= C_1 = C_2 = C_3 = 10 \text{ nF}, \\ R &= R_1 = R_4 = R_9 = 100 \text{ k}\Omega, \\ R_6 &= R_{13} = R_2 = R_3 = 10 \text{ k}\Omega, \\ R_{10} &= R_{11} = R_{14} = R_{15} = 10 \text{ k}\Omega, \\ R_5 &= 125 \text{ k}\Omega, R_8 = 285.7 \text{ k}\Omega, \\ R_7 &= 1.43 \text{ M}\Omega, R_{12} = 250 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

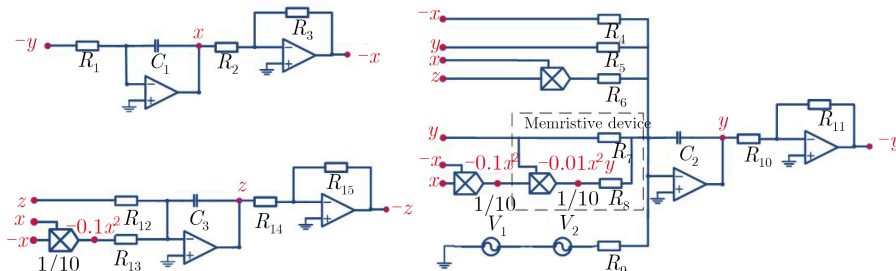


图6 双频激励下忆阻型S-M系统的电路原理图

本文基于Multisim平台对多频激励忆阻型S-M电路的簇发振荡进行了仿真分析和验证。在验证扭曲型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡时,取激励信号 V_1 和 V_2 的幅度 $A_1=5$ V和 $A_2=1$ V,并保持激励频率 $f_1=0.32$ Hz不变,调节 V_2 的激励频率分别为 $f_2=1.6$ Hz, $f_2=2.9$ Hz, $f_2=4.2$ Hz时得到的仿真结果如图7所示。限于篇幅,本文仅给出了 v_x 关于慢变量的转换相图。从图7可以看出,附加激励信号 V_2 的引入使得系统原本光滑的平衡点分支产生了扭曲和变形,并且随着激励频率 f_2 的增加,平衡点分支的极值点也按比例的增加。从而导致电路不但能展现尖峰振荡,而且在沉寂态期间展现出微幅振荡行为。由于图7的电路仿真结果与图3的理论分析结

果完全一致,从而本文从电路上验证了系统式(1)的扭曲型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发模式。

保持电路其他参数不变,取 $A_1=1$ V, $A_2=2$ V, $f_1=1.6$ Hz,调节激励频率 f_2 得到的 v_x 关于慢变量的转换相图分别如图8所示。由于附加激励频率 f_2 的影响使得慢变参数通过sub-Hopf分岔点的次数增加,从而导致了电路产生复杂的“sub-Hopf/sub-Hopf”级联簇发振荡。图8(a)和图8(b)分别为3级“sub-Hopf/sub-Hopf”嵌套级联簇发振荡和4级“sub-Hopf/sub-Hopf”嵌套级联簇发振荡的仿真结果,与图5的数值分析结果完全一致,从而有效地验证了系统的复杂“sub-Hopf/sub-Hopf”嵌套级联簇发模式。

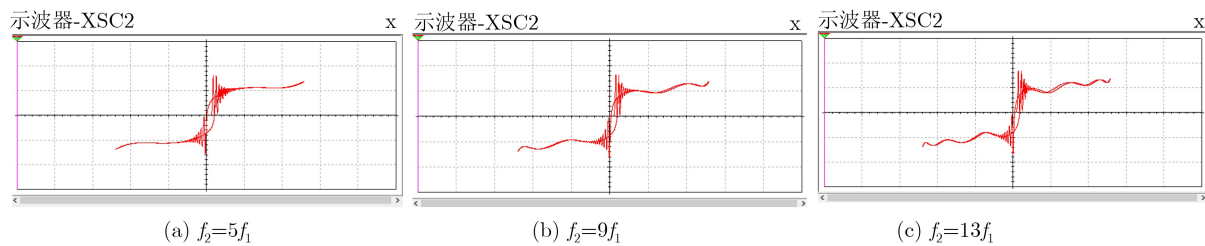


图7 扭曲型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡的仿真结果

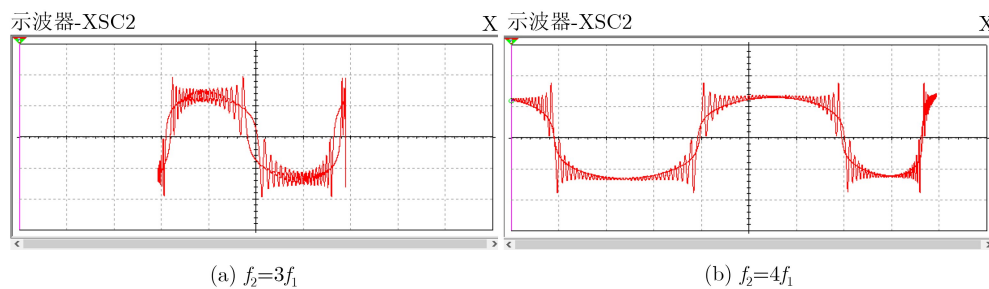


图8 嵌套级联型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡的仿真结果

6 结束语

本文分析了双频激励下忆阻型S-M系统复杂的簇发行为和分岔机制。与单一激励相比,多频慢激励下忆阻型S-M系统表现出更丰富的簇发动力学。根据De Moivre公式将双频频激励忆阻S-M系统转化为单频激励系统,采用快慢分析法分析转化后的单频激励系统本文发现:激励幅值之间的大小关系对系统簇发振荡有重要影响。当 $\beta_1 > \beta_2$ 时, $\beta_2 \cos(\omega_2 t)$ 的存在使平衡点曲线发生扭曲变形,导致系统在沉寂态期间展现出小幅振荡,从而产生了一种扭曲型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡;当 $\beta_1 < \beta_2$ 时,平衡点曲线上会出现许多额外的分岔点,从而产生了一种嵌套级联型“sub-Hopf/sub-Hopf”簇发振荡。本文采用模块化设计方法搭建了系统的具体实现并采用Multisim进行了仿真分析,

仿真结果与理论分析结果完全一致,从而从电路实验上有效地验证了系统复杂的簇发行为。本文首次对多频激励忆阻型系统的簇发行为进行了研究,发现了两种新的簇发模式,进一步丰富了忆阻型系统的簇发路径。

参考文献

- [1] ZHANG Zhengdi, LI Yanyan, and BI Qinsheng. Routes to bursting in a periodically driven oscillator[J]. *Physics Letters A*, 2013, 377(13): 975–980. doi: 10.1016/j.physleta.2013.02.022.
- [2] LIEPELT S, FREUND J A, SCHIMANSKY-GEIER L, et al. Information processing in noisy burster models of sensory neurons[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2005, 237(1): 30–40. doi: 10.1016/j.jtbi.2005.03.029.
- [3] BRONS M and KAASEN R. Canards and mixed-mode oscillations in a forest pest model[J]. *Theoretical Population*

- Biology*, 2010, 77(4): 238–242. doi: [10.1016/j.tpb.2010.02.003](https://doi.org/10.1016/j.tpb.2010.02.003).
- [4] PROSKURKIN I S and VANAG V K. New type of excitatory pulse coupling of chemical oscillators via inhibitor[J]. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2015, 17(27): 17906–17913. doi: [10.1039/C5CP02098K](https://doi.org/10.1039/C5CP02098K).
- [5] HAN Xiuqing, YU Yue, and ZHANG Chun. A novel route to chaotic bursting in the parametrically driven Lorenz system[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88(4): 2889–2897. doi: [10.1007/s11071-017-3418-0](https://doi.org/10.1007/s11071-017-3418-0).
- [6] WU Huagan, BAO Bocheng, LIU Zhong, *et al.* Chaotic and periodic bursting phenomena in a memristive Wien-bridge oscillator[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 83(1/2): 893–903.
- [7] IZHIKEVICH E M. Neural excitability, spiking and bursting[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10(6): 1171–1266. doi: [10.1142/S0218127400000840](https://doi.org/10.1142/S0218127400000840).
- [8] IZHIKEVICH E M, DESAI N S, WALCOTT E C, *et al.* Bursts as a unit of neural information: Selective communication via resonance[J]. *Trends in Neurosciences*, 2003, 26(3): 161–167. doi: [10.1016/S0166-2236\(03\)00034-1](https://doi.org/10.1016/S0166-2236(03)00034-1).
- [9] INNOCENTI G, MORELLI A, GENESIO R, *et al.* Dynamical phases of the Hindmarsh-Rose neuronal model: Studies of the transition from bursting to spiking chaos[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2007, 17(4): 043128. doi: [10.1063/1.2818153](https://doi.org/10.1063/1.2818153).
- [10] BAO Bocheng, YANG Qinfeng, ZHU Lei, *et al.* Chaotic bursting dynamics and coexisting multistable firing patterns in 3D autonomous Morris-Lecar model and microcontroller-based validations[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, 29(10): 1950134. doi: [10.1142/S0218127419501347](https://doi.org/10.1142/S0218127419501347).
- [11] LI Xianghong and HOU Jingyu. Bursting phenomenon in a piecewise mechanical system with parameter perturbation in stiffness[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016, 81: 165–176. doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2016.01.014](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.01.014).
- [12] RINZEL J. Discussion: Electrical excitability of cells, theory and experiment: Review of the Hodgkin-Huxley foundation and an update[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1990, 52(1/2): 5–23.
- [13] MA Xindong, and CAO Shuqian. Pitchfork-bifurcation-delay-induced bursting patterns with complex structures in a parametrically driven Jerk circuit system[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2018, 51(33): 335101. doi: [10.1088/1751-8121/aace0d](https://doi.org/10.1088/1751-8121/aace0d).
- [14] TEKA W, TABAK J, and BERTRAM R. The relationship between two fast/slow analysis techniques for bursting oscillations[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2012, 22(4): 043117. doi: [10.1063/1.4766943](https://doi.org/10.1063/1.4766943).
- [15] YU Yue, ZHANG Zhengdi, and HAN Xiuqing. Periodic or chaotic bursting dynamics via delayed pitchfork bifurcation in a slow-varying controlled system[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2018, 56: 380–391. doi: [10.1016/j.cnsns.2017.08.019](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.08.019).
- [16] ZHANG Hao, CHEN Diyi, XU Beibei, *et al.* The slow-fast dynamical behaviors of a hydro-turbine governing system under periodic excitations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(4): 2519–2528. doi: [10.1007/s11071-016-3208-0](https://doi.org/10.1007/s11071-016-3208-0).
- [17] HAN Xiuqing, ZHANG Yi, BI Qinsheng, *et al.* Two novel bursting patterns in the Duffing system with multiple-frequency slow parametric excitations[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2018, 28(4): 043111. doi: [10.1063/1.5012519](https://doi.org/10.1063/1.5012519).
- [18] HAN Xiuqing, YU Yue, ZHANG Chun, *et al.* Turnover of hysteresis determines novel bursting in Duffing system with multiple-frequency external forcings[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, 89: 69–74. doi: [10.1016/j.ijnonlinmec.2016.11.008](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2016.11.008).
- [19] HAN Xiuqing, BI Qinsheng, JI Peng, *et al.* Fast-slow analysis for parametrically and externally excited systems with two slow rationally related excitation frequencies[J]. *Physical Review E*, 2015, 92(1): 012911. doi: [10.1103/PhysRevE.92.012911](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.012911).
- [20] WEI Mengke, HAN Xiuqing, ZHANG Xiaofang, *et al.* Bursting oscillations induced by bistable pulse-shaped explosion in a nonlinear oscillator with multiple-frequency slow excitations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 99(2): 1301–1312. doi: [10.1007/s11071-019-05355-1](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05355-1).
- [21] BAO Bocheng, LIU Zhong, and XU Jianping. Transient chaos in smooth memristor oscillator[J]. *Chinese Physics B*, 2010, 19(3): 030510. doi: [10.1088/1674-1056/19/3/030510](https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/3/030510).
- [22] 李志军, 曾以成. 基于文氏振荡器的忆阻混沌电路[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(1): 88–93.
- LI Zhijun and ZENG Yicheng. A memristor chaotic circuit based on Wien-bridge oscillator[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(1): 88–93.
- [23] BAO Bocheng, WU Pingye, BAO Han, *et al.* Chaotic bursting in memristive diode bridge-coupled Sallen-key lowpass filter[J]. *Electronics Letters*, 2017, 53(16): 1104–1105. doi: [10.1049/el.2017.1647](https://doi.org/10.1049/el.2017.1647).
- [24] CHEN Mo, QI Jianwei, XU Quan, *et al.* Quasi-period, periodic bursting and bifurcations in memristor-based FitzHugh-Nagumo circuit[J]. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2019, 110: 152840.

- [25] BAO Han, HU Aihuang, LIU Wenbo, *et al.* Hidden bursting firings and bifurcation mechanisms in memristive neuron model with threshold electromagnetic induction[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, 31(2): 502–511. doi: [10.1109/TNNLS.2019.2905137](https://doi.org/10.1109/TNNLS.2019.2905137).
- [26] WU Huagan, YE Yi, CHEN Mo, *et al.* Extremely slow passages in low-pass filter-based memristive oscillator[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(4): 2339–2353. doi: [10.1007/s11071-019-05131-1](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05131-1).
- [27] SHIMIZU T and MORIOKA N. On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model[J]. *Physics Letters A*, 1980, 76(3/4): 201–204.
- [28] FENG Wei, HE Yigang, LI Chunlai, *et al.* Dynamical behavior of a 3D jerk system with a generalized Memristive device[J]. *Complexity*, 2018: 5620956.
- 李志军: 男, 1973年生, 教授、研究生导师, 研究方向为非线性电路与系统、数模混合集成电路.
- 方思远: 男, 1997年生, 硕士生, 研究方向为多时间尺度非线性系统动力学.
- 周成义: 男, 1993年生, 硕士生, 研究方向为多时间尺度非线性系统动力学.