

## 基于波束域导向矢量估计的稳健自适应波束形成方法

杨涛\* 苏涛 何学辉

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 针对导向矢量失配和样本协方差矩阵估计误差导致自适应波束形成性能下降的问题, 该文提出一种基于波束域导向矢量估计的稳健方法。该方法首先利用期望信号角度失配区域的补集构造波束域转换矩阵, 克服了当样本协方差矩阵中存在期望信号分量时现有算法出现有用信号对消的缺点。其次推导出波束域导向矢量估计方法, 并将其转化为包含恒模约束的非凸二次约束二次规划问题, 然后采用半正定松弛规划估计实际的波束域导向矢量。计算机仿真验证了该文所提方法的有效性。

**关键词:** 信号处理; 自适应波束形成; 波束域; 导向矢量; 稳健性; 半正定松弛

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2013)11-2758-06

DOI: 10.3724/SP.J.1146.2012.01334

## Robust Adaptive Beamforming Based on Beamspace Steering Vector Estimation

Yang Tao Su Tao He Xue-hui

(National Key Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of performance degradation due to the imprecise knowledge of the array steering vector and inaccurate estimation of the sample covariance matrix. A new approach based on beamspace steering vector estimation for robust adaptive beamforming is presented in this paper. Firstly, by using the complementary set of the spatial sector in which the actual steering vector lies, beamspace transformation matrix can be constructed to ensure that the signal of interest is removed from the sampling covariance matrix. Then a method for beamspace steering vector estimation is derived, and mathematically expressed as the nonconvex Quadratically Constrained Quadratic Programs (QCQP) problem with one non-convex quadratic equality constraint, which can be successfully solved by using SemiDefinite Relaxation (SDR) techniques. Simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** Signal processing; Adaptive beamforming; Beamspace; Steering vector; Robust; SemiDefinite Relaxation (SDR)

### 1 引言

传统的自适应波束形成方法对目标导向矢量失配和阵列误差比较敏感<sup>[1-3]</sup>, 要获得较高的性能, 需要精确知道期望信号导向矢量与干扰加噪声的协方差矩阵。在实际场景中, 期望信号的假定导向矢量与实际导向矢量之间往往存在失配<sup>[2-7]</sup>, 并且在被动无源定位、移动通信等实际应用情况中, 训练样本数据中不可避免地包含期望信号分量, 导向矢量失配与训练样本中包含期望信号分量, 都会造成自适应波束形成性能急剧下降<sup>[1,4,8]</sup>, 因此研究具有稳健性能的自适应波束形成算法是工程应用中必须解决的问题。

目前存在多种方法用于改善自适应波束形成算法的稳健性。文献[3]采用对角加载采样协方差矩阵求逆方法(diagonally Loaded SMI, LSMI)提高直接采样协方差矩阵求逆(Sample Matrix Inversion, SMI)<sup>[1]</sup>波束形成的稳健性, LSMI通过控制对角加载量增加人为白噪声的方差, 缓解有用信号的自相消问题, 适用于不同类型的失配情况, 但是该方法存在一个明显的不足是对角加载量难以确定。文献[2]针对导向矢量失配提出了具有模不等式约束的稳健波束形成算法, 该方法通过对导向矢量的不确定集进行建模, 获得与不确定集参数有关的稳健自适应算法, 该方法需要合适的参数选择才能保证其稳健性。文献[5]研究了最差性能情况下的稳健自适应波束形成算法(Worst case based RAB, WC-RAB), 在假设失配量的模上限已知的情况下, 得到了最优加载量的近似解析式, 而实际中失配量的模上限是无

2012-10-17 收到, 2013-05-21 改回

国家自然科学基金(60902079)资助课题

\*通信作者: 杨涛 taoyang@mail.xidian.edu.cn

法获知的。文献[6]和文献[9]对文献[5]进行了改进，在假定目标信号所在的空域范围利用低分辨率方法获知的情况下，利用迭代序列二次规划(Sequential Quadratic Programming, SQP)方法估计实际导向矢量，然而由于未考虑训练样本中期望信号分量的影响，当信噪比增大时，其输出信干噪比的增加会出现瓶颈。

事实上，合理地利用目标信号所在的角度区域信息是可以消除训练样本受污染的影响。本文利用期望信号角度失配区域的补集构造波束域转换矩阵，将阵元域训练样本数据变换到波束域，消除了训练样本中的期望信号分量，并给出波束域导向矢量估计方法，采用半正定松弛规划求解具有恒模约束的二次约束二次规划(Quadratically Constrained Quadratic Programs, QCQP)问题。

## 2 信号模型

假设  $M$  元线阵工作于远场模式，接收一个目标信号和  $p$  个干扰信号( $M \geq P+1$ )，各信源间互不相关。假设空间噪声为相互独立的零均值高斯白噪声，与信号不相关。阵列在时刻  $t$  接收的数据矢量表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_0), \mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)]$  是由所有  $P+1$  个接收信源的导向矢量组成， $\mathbf{s}(t) = [s_0(t), s_1(t), \dots, s_P(t)]$ ， $s_0(t)$  是期望信号， $s_i(t)$  ( $i = 1, \dots, P$ ) 是干扰信号， $\mathbf{n}(t)$  是噪声分量。自适应波束形成器的输出为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(t) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$  是波束形成权值复向量， $(\cdot)^T$  和  $(\cdot)^H$  分别代表矩阵的转置和共轭转置。理想情况下，Capon 波束形成算法可以保证期望信号无失真输出的条件下，使阵列输出的干扰加噪声功率最小，最大限度地提高输出信干噪比。其数学表达式为

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \quad (3)$$

式中  $\mathbf{a}(\theta_0)$  是假定的期望信号导向矢量， $\mathbf{R}_{i+n}$  是干扰加噪声协方差矩阵。Capon 波束形成的最优权矢量是

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \frac{\mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \quad (4)$$

由于实际场景中无法获得  $\mathbf{R}_{i+n}$ ，通常用采样协方差矩阵  $\mathbf{R}_x$  的估计值代替，即  $\mathbf{R}_x = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{X}(t) \cdot \mathbf{X}^H(t)$ ，阵列输出信干噪比(Signal-to-Interference-Noise Ratio, SINR)为

$$\text{SINR} = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_s \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w}} = \frac{\sigma_s^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0)|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w}} \quad (5)$$

文献[4,10]指出对于训练样本受到目标信号污染的采样协方差矩阵求逆的自适应波束形成算法，当信噪比较大时，会造成期望信号方向上也可能形成零陷，导致输出 SINR 严重下降；文献[11,12]指出有限的样本数造成的采样协方差矩阵误差可以等效于导向矢量失配，因此本文关注导向矢量失配和训练样本受到目标信号污染二者同时存在的情况。

## 3 基于波束域导向矢量估计的算法

本文提出的算法是基于文献[6]对于期望目标角域由低分辨率方法获知的前提下，首先利用期望信号角度区域的补集构造波束域转换矩阵，然后在波束域推导期望目标导向矢量的估计算法，并且求解出波束域波束形成权值，最后将波束域波束形成权值反变换到阵元域，可获得对于导向矢量失配和训练样本受污染两种情况下，均具备稳健性能的自适应波束形成权值。

### 3.1 波束域 Capon 波束形成

波束域矢量  $\mathbf{x}_b(t)$  是阵元域数据快拍  $\mathbf{x}(t)$  的线性变换，波束域转换过程表示为  $\mathbf{x}_b(t) = \mathbf{B}^H \mathbf{x}(t)$ ，其中  $\mathbf{B}$  是  $M \times M'$  波束域转换矩阵。为了使受目标信号污染的训练快拍数据  $\mathbf{x}(t)$  经过波束域变换后， $\mathbf{x}_b(t)$  中消除了目标信号分量，而仅包含干扰和噪声分量，下面利用目标信号及干扰的空域特性设计波束域变换矩阵  $\mathbf{B}$ 。 $\Theta = [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$  表示期望信号角域，即  $\Theta$  是以假定的期望信号方向为中心的邻域，且  $\Theta$  中不包含任何的干扰信号。 $\bar{\Theta}$  是  $\Theta$  的互补集合，包含所有干扰信号方向。采用基于离散长球序列构造波束域转换矩阵  $\mathbf{B}^{[1]}$ ，其本质是最大化目标区域波束域能量与总波束域能量的比值  $\alpha_i$ 。

$$\alpha_i = \frac{\int_{\bar{\Theta}} |\mathbf{b}_i \mathbf{a}(\theta)|^2 d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\mathbf{b}_i \mathbf{a}(\theta)|^2 d\theta}, \quad i = 1, 2, \dots, M' \quad (6)$$

$\mathbf{b}_i$  是  $\mathbf{B}$  的列矢量， $i = 1, 2, \dots, M'$ ，并且是正交归一的。 $\alpha_i$  的分子和分母分别表示为  $\mathbf{b}_i \mathbf{A} \mathbf{b}_i^H$  和  $2\pi \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^H$ ，其中  $\mathbf{A} \triangleq \int_{\bar{\Theta}} \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) d\theta$ ，式(6)可以代换为  $\alpha_i = \frac{\mathbf{b}_i \mathbf{A} \mathbf{b}_i^H}{2\pi \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^H}$ ， $i = 1, 2, \dots, M'$ ，最大化  $\alpha_i$  的问题即等价于求解矩阵  $\mathbf{A}$  中的  $M'$  个最大特征值对应的特征矢量。因此  $\mathbf{B} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{M'}]_{M \times M'}$ ，其中  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{M'}$  是  $\mathbf{A}$  的  $M'$  个主特征向量。

$M' \times M'$  的波束域协方差矩阵表示为

$$\mathbf{R}_b = \mathbf{B}^H \mathbf{R}_x \mathbf{B} \quad (7)$$

阵元域导向矢量  $\mathbf{a}(\theta)$  经过波束域变换后表示为

$$\mathbf{a}_b(\theta) = \mathbf{B}^H \mathbf{a}(\theta) \quad (8)$$

其中  $\mathbf{a}_b(\theta)$  表示波束域导向矢量。Capon 波束形成的波束域形式可以写为

$$\min_{\mathbf{w}_b} \mathbf{w}_b^H \hat{\mathbf{R}}_b \mathbf{w}_b, \quad \text{s.t. } \mathbf{w}_b^H \mathbf{a}_b(\theta) = 1 \quad (9)$$

类比式(4), 波束域 Capon 波束形成器的最优权矢量和输出功率分别为

$$\mathbf{w}_b = \frac{\hat{\mathbf{R}}_b^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_b(\theta_s)}{\tilde{\mathbf{a}}_b^H(\theta_s) \hat{\mathbf{R}}_b^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_b(\theta_s)} \quad (10)$$

$$P_b = \mathbf{w}_b^H \hat{\mathbf{R}}_b \mathbf{w}_b = \frac{1}{\mathbf{a}_b^H \hat{\mathbf{R}}_b^{-1} \mathbf{a}_b} \quad (11)$$

### 3.2 波束域导向矢量估计

由于实际波束域导向矢量  $\mathbf{a}_b(\theta)$  与假定的波束域导向矢量  $\tilde{\mathbf{a}}_b(\theta)$  存在误差, 因此有  $P(\mathbf{a}_b(\theta)) \geq P(\tilde{\mathbf{a}}_b(\theta))$ , 可以通过最大化波束域 Capon 波束形成的输出功率, 等价于最小化式(11)的分母, 估计未知的实际波束域导向矢量  $\mathbf{a}_b(\theta)$ , 此过程通过式(12)~式(14)的优化问题求解:

$$\min_{\tilde{\mathbf{a}}_b} \tilde{\mathbf{a}}_b^H \hat{\mathbf{R}}_b^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_b \quad (12)$$

$$\text{s.t. } \|\tilde{\mathbf{a}}_b\| \leq \max_{\theta \in \Theta} \|\tilde{\mathbf{a}}_b(\theta)\|, \quad \theta \in \Theta \quad (13)$$

$$\|(B\mathbf{B}^H)^{-1} B\tilde{\mathbf{a}}_b\| = \sqrt{M} \quad (14)$$

式(13)右边的  $\max_{\theta \in \Theta} \|\tilde{\mathbf{a}}_b(\theta)\|$ , 表示目标区域波束域导向矢量的模值最大值。根据  $\|\tilde{\mathbf{a}}_b\| \leq \max_{\theta \in \Theta} \|\tilde{\mathbf{a}}_b(\theta)\|$ , 将  $\tilde{\mathbf{a}}_b$  的求解范围限定在期望目标区域, 避免估计出的实际导向矢量  $\hat{\mathbf{a}}$  收敛到干扰目标的导向矢量。式(14)中加等式约束的目的在于使估计的导向矢量与假定的导向矢量具有同样的模。

式(12)~式(14)是一个包含等式约束的非凸 QCQP 问题, 下面采用半正定松弛(SDR)算法<sup>[11]</sup>对非凸优化问题予以近似。利用  $\tilde{\mathbf{a}}_b^H \hat{\mathbf{R}}_b^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_b = \text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}_b^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{a}}_b \tilde{\mathbf{a}}_b^H)$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}_b^H \tilde{\mathbf{a}}_b = \text{Tr}(\tilde{\mathbf{a}}_b \tilde{\mathbf{a}}_b^H)$  以及  $\mathbf{Z}_b = \tilde{\mathbf{a}}_b \tilde{\mathbf{a}}_b^H$ , 式(12)~式(14)重写为

$$\min_{\mathbf{Z}_b} \text{Tr}(\hat{\mathbf{R}}_b^{-1} \mathbf{Z}_b) \quad (15)$$

$$\text{s.t. } \text{Tr}((B\mathbf{B}^H)^{-1} B\mathbf{Z}_b B^H ((B\mathbf{B}^H)^{-1})^H) = M \quad (16)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{Z}_b) \leq \delta_0 \quad (17)$$

$$\mathbf{Z}_b \succeq 0 \quad (18)$$

$$\text{rank}(\mathbf{Z}_b) = 1 \quad (19)$$

由于式(19)秩为 1 的限制, 式(15)~式(19)最优优化问题不具备凸规划性质。根据半正定松弛理论, 放宽  $\text{rank}(\mathbf{Z}_b) = 1$  的限制, 将其转换成半正定规划问题, 可以通过内点法有效获取最优解  $\mathbf{Z}_b$ 。求解得到的  $\mathbf{Z}_b$  并不一定满足秩为 1 的要求, 采用高斯随机化算法<sup>[13]</sup>可以得到性能满意的近似解。

### 3.3 基于波束域导向矢量估计的稳健波束形成算法

基于波束域导向矢量估计的稳健波束形成算法步骤如下:

(1) 根据低分辨方法划分目标空域范围  $\Theta$  和干扰目标空域  $\bar{\Theta}$ ;

(2) 计算  $\mathbf{A} = \int_{\bar{\Theta}} \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) d\theta$ ,  $\mathbf{A}$  的主特征向量个数  $M'$  由最小描述长度准则(MDL)方法<sup>[14]</sup>得出。构造波束域转换矩阵  $\mathbf{B} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{M'}]_{M \times M'}$ , 其中  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^{M'}$  是  $\mathbf{A}$  的  $M'$  个主特征向量;

(3) 根据式(7)计算波束域协方差矩阵  $\mathbf{R}_b = \mathbf{B}^H \mathbf{R}_x \mathbf{B}$ , 利用 CVX 求解式(15)~式(18), 得到最优解  $\hat{\mathbf{Z}}_b$ ;

(4) 随机产生  $L$  个服从零均值高斯分布的矢量  $\xi_l \sim N(0, \hat{\mathbf{Z}}_b)$ ,  $l = 1, \dots, L$ , 对其进行归一化得到  $\tilde{\mathbf{a}}_l = \xi_l / \|\xi_l\|$ , 选取的最优波束域导向矢量  $\tilde{\mathbf{a}}_b = \tilde{\mathbf{a}}_l^*$  满足  $l^* = \arg \min_{l=1, \dots, L} \tilde{\mathbf{a}}_l^H \hat{\mathbf{R}}_b^{-1} \tilde{\mathbf{a}}_l$ ;

(5) 在获得了最优估计波束域导向矢量  $\hat{\mathbf{a}}_b$  后, 利用式(10)求解出波束域 Capon 权矢量  $\mathbf{w}_{b\_opt}$ ;

(6) 最后利用波束域 Capon 权矢量和阵元域 Capon 权矢量之间的转换关系  $\mathbf{w}_{opt} = (B\mathbf{B}^H)^{-1} \cdot B\mathbf{w}_{b\_opt}$ , 求解出阵元域 Capon 自适应权矢量  $\mathbf{w}_{opt}$ 。

与文献[5]方法相比, 本文方法不需要对导向矢量失配误差进行模上限约束, 避免了对导向矢量失配量模上限的建模。与文献[6]的方法相比, 虽然都属于导向矢量估计类稳健自适应算法, 但是本文方法由于合理利用了目标信号及干扰的空域信息, 因此本文方法消除了训练样本中包含期望信号的影响。另外, 由于非均匀线阵的导向矢量较均匀线阵的导向矢量更通用, 并且本文构造波束域转换矩阵的方法和估计波束域导向矢量过程中的约束条件对于阵列类型没有限制, 因此本文方法对非均匀线阵也是适用的。

### 3.4 收敛性能分析

采用不同方法计算自适应权值, 其归一化 SINR 也不同, 归一化 SINR 表示为

$$\rho = \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)|^2}{(\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}) \text{SINR}_{opt}} \quad (20)$$

其中  $\text{SINR}_{opt} = \mathbf{a}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}$ ,  $\text{SINR}_{opt}$  是针对给定的干扰场景, 采用最优权矢量所获得的性能。SMI 方法的归一化 SINR 服从参数为  $(2(M-1), 2(N-M+1))$  的  $\beta$  分布<sup>[10]</sup>, 当快拍数  $N$  超过  $2M-3$  时, 自适应波束形成的归一化 SINR 较最优值的损失小于 3 dB。对于基于特征向量投影的自适应波束形成方法(Eigenvector Projection Method, EPM), EPM 方法

的归一化 SINR 服从参数为  $(2(N - P + 1), 2P)$  的  $\beta$  分布<sup>[15]</sup>。当快拍数  $N$  超过  $2P - 1$  时 ( $P$  为干扰源数目), EPM 方法的归一化 SINR 较最优值的损失小于 3 dB。

对于本文提出的波束域导向矢量估计方法, 根据算法步骤 (6) 中的  $\mathbf{w}_{\text{opt}} = (\mathbf{B}\mathbf{B}^H)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{w}_{b_{\text{opt}}}$  和  $\text{SINR}_{\text{opt}_b} = \mathbf{a}_b^H \mathbf{R}_b^{-1} \mathbf{a}_b$ , 其归一化 SINR 表示为

$$\rho_b = \frac{|\mathbf{a}_b(\theta)|^2}{(\mathbf{w}_b^H \mathbf{R}_b \mathbf{w}_b) \text{SINR}_{\text{opt}_b}} \quad (21)$$

对比式 (21) 和式 (20), 可以看出式 (21) 可以由式 (20) 通过变量替换获得 ( $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}_b, \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w}_b, \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_b$ ), 因此  $\rho_b$  是服从参数为  $(2(N - M' + 2), 2(M' - 1))$  的  $\beta$  分布, 其概率密度函数对应

$$f(\rho_b) = \frac{N!}{(N - M' + 1)!(M' - 2)!} \rho_b^{N - M' + 1} (1 - \rho_b)^{M' - 2} \quad (22)$$

其中  $0 \leq \rho_b \leq 1, N \geq M', M' > 2$ 。性能损失的期望为

$$\bar{\rho}_b = E[\rho_b] = \frac{N - M' + 2}{N + 1} \quad (23)$$

因此本文提出的算法逼近 3 dB 最优输出 SINR 所需要的快拍数仅为  $N_{3\text{dB}} = 2M' - 3$ 。需要区分的是, EPM 算法的干扰源个数是由采样协方差矩阵的主特征值得出, 而本文算法中  $\mathbf{R}_b$  的维数是矩阵  $\mathbf{A}$  的主特征值个数。此外, SMI 方法和 EPM 方法的收敛速度的结论均是在假定训练样本中无有用信号条件下推导得出, 而本文算法则没有此限制条件。

#### 4 仿真分析

下面通过计算机仿真实验验证本文方法的有效性。假设接收阵列为均匀线阵, 阵元数  $M=20$ , 阵元间距为半波长。假设两个干扰源分别从  $30^\circ$  和  $50^\circ$  入射, 干噪比均为 30 dB, 期望信号的实际入射角为  $\theta_p = 5^\circ$ , 空间噪声为零均值的高斯白噪声。所有仿真结果均由 200 次 Monte-Carlo 实验统计得到, 训练快拍数据中始终包含期望信号分量。把本文提出的算法 (BS-RAB) 与 SMI<sup>[1]</sup>, LSMI<sup>[8]</sup>, WC-RAB<sup>[5]</sup> 以及 SQP-RAB<sup>[6]</sup> 进行比较。对于 BS-RAB 和 SQP-RAB, 期望信号的角域区间  $\Theta$  假定为  $\Theta = [\theta_p - 5^\circ, \theta_p + 5^\circ]$ , 矩阵  $\mathbf{A}$  的主特征值个数  $M' = 8$ , 本文算法的理论  $N_{3\text{dB}} = 13$ 。SQP-RAB 的松弛变量  $\delta = 0.1$ 。WC-RAB 算法中导向矢量失配量的模上限设置为  $\varepsilon = 0.3M$ , LSMI 算法的对角加载因子设置为噪声功率的两倍<sup>[3]</sup>。

**仿真实验 1** 存在方向失配的情况下, 比较 BS-RAB, SMI, LSMI, WC-RAB 以及 SQP-RAB 算法的性能。假定的导向矢量由  $(\theta_p + \theta_e)$  计算得到,  $\theta_e$

是观察方向失配误差, 实验中设定  $\theta_e$  均匀分布于  $[-5^\circ, 5^\circ]$ 。

设定单个阵元的信噪比为  $\text{SNR}=10$  dB, 比较 5 种算法输出 SINR 随训练快拍数的变化关系, 如图 1 所示。可以看出, WC-RAB 和 SQP-RAB 在快拍数小于 30 条件下, 具有接近的输出 SINR, 快拍数大于 30 条件下, SQP-RAB 输出 SINR 优于 WC-RAB, 而本文算法 BS-RAB 输出 SINR 在快拍数为 20 时已经基本达到收敛值。可见算法不仅在小样本快拍时具有较大的性能优势, 而且整体输出 SINR 远高于其它 4 种算法。

快拍数设定为 100, 比较 5 种算法输出 SINR 随输入 SNR 变化关系如图 2 所示。可以看出, 在输入 SNR 近似小于 20 dB 时, SQP-RAB 的输出 SINR 高于 WC-RAB, 在输入 SNR 近似大于 20 dB 时, WC-RAB 的输出 SINR 高于 SQP-RAB, 但是 SINR 随输入 SNR 增加均出现瓶颈, 而 BS-RAB 的输出 SINR 具有接近最优 SINR 的性能, 可见 BS-RAB 对信号方向失配误差有很强的稳健性能, 输出 SINR 优于其它几种算法。

**仿真实验 2** 在构造波束域转换矩阵过程中利用了期望目标角域  $\Theta$  和无扰动的阵元位置信息。期望目标角域是目标方向的失配区域, 选取准则是只包含有用信号而不包含任何的干扰方向。计算矩阵  $\mathbf{A} \triangleq \int_{\Theta} \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) d\theta$ , 需要阵列的位置信息, 而由于阵列校准不理想, 通常精确的阵列位置信息并不能获得, 因此需要分析由于阵元位置扰动因素造成的导向矢量失配对构造波束域转换矩阵的影响。

对构造波束域转换矩阵的影响的直观表现是对波束域导向矢量的影响。假定由天线位置误差引起的阵元扰动在  $[-\kappa\lambda, \kappa\lambda]$  内均匀分布,  $\lambda$  为波长。图 3 给出了阵元无扰动和阵元扰动为  $\kappa = 0.25$  时, 波束域导向矢量的模值随角度的变化曲线。图中的横线  $\max_{\theta \in \Theta} \|\tilde{\mathbf{a}}_b(\theta)\|$  是由阵元无扰动假定的导向矢量计算所得, 矩形条标记的是假定角域  $\Theta$ , 从图中可以看出在角域  $\Theta$  内,  $\|\tilde{\mathbf{a}}_b(\theta)\|$  均小于  $\Theta$  外的值, 因此, 利用约束式 (13) 可以避免期望信号的波束域导向矢量收敛到干扰或干扰的线性组合。由于  $\max_{\theta \in \Theta} \|\tilde{\mathbf{a}}_b(\theta)\|$  一定出现在  $\Theta$  的边界处, 而  $\Theta$  左右边界的  $\|\tilde{\mathbf{a}}_b(\theta)\|$  值并不一定相同, 这就使得实际约束的区域要大于假定的角域  $\Theta$ 。假定阵元无扰动的实际约束区域为  $\hat{\Theta}$ , 阵元有扰动的实际约束区域为  $\hat{\Theta}_\kappa$ , 从图中可以看出  $\hat{\Theta}_\kappa > \hat{\Theta}$ 。图 4 给出了约束区域  $\hat{\Theta}_\kappa$  偏离  $\hat{\Theta}$  程度 (即  $(\hat{\Theta}_\kappa - \hat{\Theta})/\hat{\Theta}$ ) 随  $\kappa$  的变化曲线,  $\kappa$  从 0 增加到 0.25。从图中可以看出在阵元存在扰动情况下, 引起的  $\hat{\Theta}_\kappa$  偏差

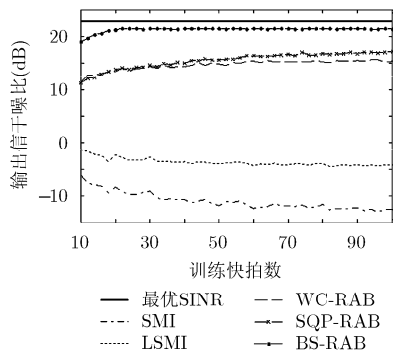


图1 方向失配情况下 OSINR 随快拍数变化曲线

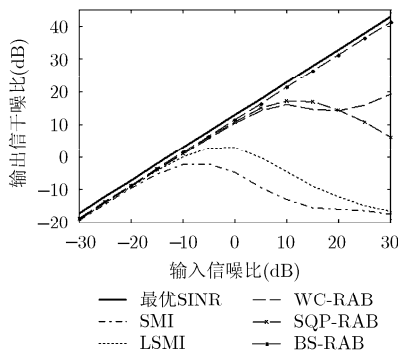


图2 方向失配情况下性能比较

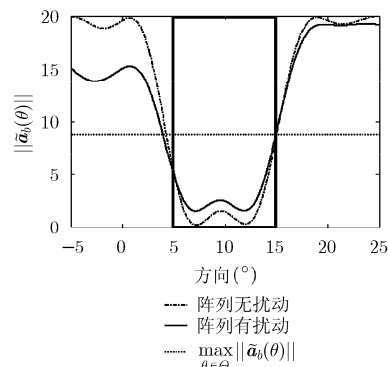


图3 阵元扰动对波束域导向矢量的影响

均低于4%，阵元扰动对 $\hat{\theta}_k$ 偏差的影响并不大。虽然利用无阵列位置扰动的导向矢量与存在阵元位置扰动的导向矢量计算矩阵 $\mathbf{A}$ 会有所不同，但是只要得到的角域 $\hat{\theta}_k$ 中只包含期望信号而不包含任何干扰信号，约束式(13)就是成立的。因此，可以通过假定阵元无扰动导向矢量计算波束域转换矩阵。

**仿真实验3** 同时考虑信号方向失配和阵元位置扰动情况下，比较 BS-RAB, SMI, LSMI, WC-RAB 以及 SQP-RAB 算法的性能。假设每个阵元和理想位置之间的误差在区间 $[-0.15\lambda, 0.15\lambda]$ 内均匀分布， $\lambda$ 是波长，其它仿真条件与仿真实验1中设置相同。图5为存在信号方向失配和阵元位置误差情况下输出 SINR 随样本快拍数变化曲线，图6给出了输出 SINR 随输入 SINR 变化关系。仿真实验

表明，本文方法适用于小样本快拍情况，并且较其它算法具有较大的性能优势。

## 5 结论

本文提出了一种训练样本受污染情况下基于波束域导向矢量估计的稳健自适应波束形成方法(BS-RAB)。该方法利用期望信号角度失配集的正交投影构造波束域转换矩阵，将阵元域训练样本数据变换到波束域，消除了训练样本中的期望信号分量，并给出波束域导向矢量估计方法，采用半正定松弛规划求解具有恒模约束的 QCQP 问题。所提方法在训练样本受污染情况及导向矢量失配下可以有效地改善自适应波束形成输出 SINR 的稳健性能，使输出 SINR 达到近似最优 SINR，并且适用于小采样快拍情况，最后通过计算机仿真验证了该算法的有效性。

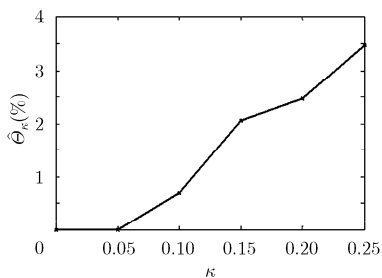
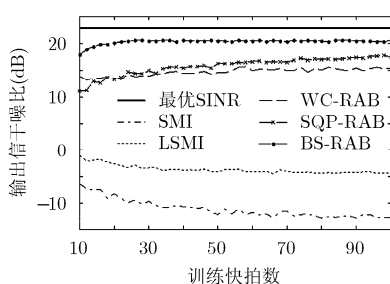
图4  $\hat{\theta}_k$  偏差随阵元扰动程度变化曲线

图5 信号方向失配和阵元位置误差情况下输出 SINR 随快拍数变化曲线

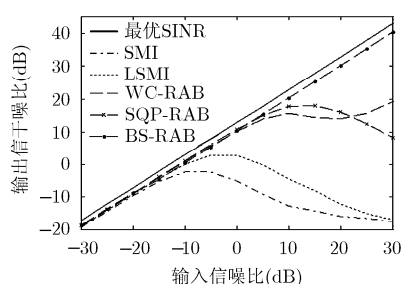


图6 信号方向失配和阵元位置误差情况下性能比较

## 参考文献

- [1] Van Trees H. Optimum Array Processing[M]. New York: Wiley, 2002: 552-560.
- [2] Lie J P, Ser W, and See C M S. Adaptive uncertainty based iterative robust Capon beamformer using steering vector mismatch estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(9): 4483-4488.
- [3] Li J, Stoica P, and Wang Z. On robust Capon beamforming and diagonal loading[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(7): 1702-1715.
- [4] Cox H, Zeskind R, and Owen M. Robust adaptive beamforming[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1987, 35(10): 1365-1376.
- [5] Vorobyov S A, Gershman A B, and Luo Z Q. Robust adaptive beamforming using worst-case performance optimization: a solution to the signal mismatch problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(3): 313-324.

- [6] Hassanien A, Vorobyov S A, and Wong K M. Robust adaptive beamforming using sequential quadratic programming: an iterative solution to the mismatch problem[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2008, 15: 733–736.
- [7] Khabbazibasmenj A, Vorobyov S A, and Hassanien A. Robust adaptive beamforming based on steering vector estimation with as little as possible prior information[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(6): 2974–2987.
- [8] Nai S E, Ser W, and Yu Z L. Iterative robust minimum variance beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(4): 1601–1611.
- [9] 邹翔, 张旻, 钟子发. 基于失配误差正交分解的稳健自适应波束形成[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(10): 2320–2323.  
Zou Xiang, Zhang Min, and Zhong Zi-fa. Robust adaptive beamforming based on mismatch errors orthogonal decomposition[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2010, 32(10): 2320–2323.
- [10] Reed I S, Mallett J D, and Brennan L E. Rapid convergence rate in adaptive arrays[J]. *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems*, 1974, 10(6): 853–863.
- [11] Somasundaram S D and Parsons N H. Evaluation of robust capon beamforming for passive sonar[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2011, 36(4): 686–695.
- [12] Vorobyov S A. Principles of minimum variance robust adaptive beamforming design[J]. *Signal Processing*, 2012, <http://dx.doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.10.021>.
- [13] Luo Z Q, Ma W K, and Zhang S. Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2010, 27(3): 20–34.
- [14] 王永良, 陈辉, 彭应宁. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 40–43.  
Wang Yong-liang, Chen Hui, and Peng Ying-ning. Theory and Algorithm of Spatial Spectrum Estimation[M]. Beijing: Publishing House of Tsinghua University, 2004: 40–43.
- [15] Feldman D D and Griffiths L J. A projection approach for robust adaptive beamforming[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(4): 867–876.
- 杨 涛: 男, 1985 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、MIMO 雷达等.
- 苏 涛: 男, 1968 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事高速实时信号处理、阵列信号处理的研究工作.
- 何学辉: 男, 1979 年生, 副教授, 主要从事阵列信号处理、最优化方法的研究工作.