

基于微小频偏的新的四阶累积量 DOA 子空间估计法

刘学斌 季 飞 韦 岗
(华南理工大学电子与信息学院 广州 510640)

摘 要: 在采用基于四阶累积量的子空间法进行 DOA 估计时, 一般要求基带信号独立, 以保证信号四阶不相干, 否则估计性能将下降。该文提出一种新的四阶累积量 DOA 估计法, 解除了对基带信号独立性的要求。该方法对每一个基带信号分配一个基带载波, 基带载波相对射频载波是一个微小偏差。该文推导了在基带信号独立和相关两种情况下, 信号四阶相干性与基带载波频率的关系; 设计出了在基带信号相关情况下, 保证信号四阶不相干的微小频偏集。仿真结果验证了设计的正确性和有效性。

关键词: DOA 估计, 四阶累积量, 微小频偏

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2005)05-0745-04

A New Subspace Method of DOA Estimation with Four-Order Cumulants Based on Small Frequency Offset

Liu Xue-bin Ji Fei Wei Gang
(Dept of Electron. & Info. Eng., South China Univ. of Tech., Guangzhou 510640, China)

Abstract To achieve good performance when applying subspace method based on four-order cumulants in DOA estimation, signals are required to be independent to satisfy non-coherence of four-order. Here, a modified method without independence requirement is proposed. First, the relation between non-coherence of four-order and carrier frequencies of analytical signal is studied with baseband signals independent or not, then a set of small frequencies offset is designed. With the transmitter modulating signals in baseband with the frequencies, the array receiver can achieve good performance of DOA estimation with subspace method based on four-order cumulants whether signals are independent or not. Simulation proves its validity.

Key words DOA estimation, Four-order cumulants, Small frequency offset

1 引言

基于四阶累积量的 DOA 子空间方法是目前智能天线研究中的热点。利用四阶累积量可消除高斯型噪声, 扩展阵列孔径, 增加虚拟阵元, 提高分辨率和增加可估计信号数^[1-4]。但在采用基于四阶累积量的子空间法进行 DOA 估计时, 一般要求信号独立, 以保证信号四阶不相干, 否则估计性能将下降。这里, 信号通常采用基带信号模型。而文献[4,5]从窄带多信号系统出发, 以多个不同频率的单频载波信号为模型, 证明了载波频率在时间平均意义上影响信号的四阶相干性, 并推导出谐波信号广义高阶各态历经性的充要条件。通过对载波频率的约束使得信号满足各态历经性, 进而使得统计

平均意义上满足四阶不相干的信号在时间平均意义上也满足四阶不相干。

基于载波频率在时间平均意义上对信号四阶相干性的影响, 本文在基带信号模型上提出一种新的四阶累积量 DOA 估计法, 解除了对基带信号独立性的要求。该方法对每一个基带信号分配一个基带载波, 基带载波相对于射频载波是一个微小偏差。本文推导了在基带信号独立和相关的两种情况下, 信号四阶相干性与基带载波频率的关系, 并设计出了在基带信号相关情况下, 保证信号四阶不相干的微小频偏集。仿真证明, 微小频偏集能有效地提高基于四阶累积量的 DOA 子空间法在基带信号相关下的估计性能, 准确分辨出各信号的波达方向。

2 信号模型

设复基带调制信号:

$$s_p(t) = g_p(t) \exp(j2\pi f_p t), \quad p \in [1, P] \quad (1)$$

其中 $g_p(t)$ 为平稳、各态历经且为零均值的复基带信号, f_p 为基带载波频率。 $g_p(t)$ 之间互相独立, 则也必然互不相关, 由于 $g_p(t)$ 为零均值, $g_p(t)$ 之间的相关函数为零。

3 调制信号的四阶相干性讨论

定义^[2]

$$C(s_{k_1}, s_{k_2}^*, s_{k_3}^*, s_{k_4}) = E(s_{k_1} s_{k_2}^* s_{k_3}^* s_{k_4}) - E(s_{k_1} s_{k_2}^*) E(s_{k_3}^* s_{k_4}) - E(s_{k_1} s_{k_3}^*) E(s_{k_2}^* s_{k_4}) - E(s_{k_1} s_{k_4}) E(s_{k_2}^* s_{k_3}^*) \quad (2)$$

为第 k_1, k_2, k_3, k_4 个信号间的四阶累积量, $k_1, k_2, k_3, k_4 \in [1, P]$, $P \geq 2$, $C(\cdot)$ 表示四阶累积量, $E(\cdot)$ 表示期望值, $*$ 表示复共轭。当 k_1, k_2, k_3, k_4 不完全相等, 即包含了 2 个及 2 个以上信号的联合四阶累积量为零时, 则称这些信号是四阶不相干的^[4]。式(2)中有两种二阶矩和一种四阶矩, 由于载波信号与基带信号相互独立, 所以式(2)中的各阶矩可展开为

$$E(s_{k_1} s_{k_2}) = E[g_{k_1}(t) g_{k_2}(t)] \cdot E\{\exp[j2\pi(f_{k_1} + f_{k_2})t]\} \quad (3)$$

$$E(s_{k_1} s_{k_2}^*) = E[g_{k_1}(t) g_{k_2}^*(t)] \cdot E\{\exp[j2\pi(f_{k_1} - f_{k_2})t]\} \quad (4)$$

$$E(s_{k_1} s_{k_2}^* s_{k_3}^* s_{k_4}) = E[g_{k_1}(t) g_{k_2}^*(t) g_{k_3}^*(t) g_{k_4}(t)] \cdot E\{\exp[j2\pi(f_{k_1} - f_{k_2} - f_{k_3} + f_{k_4})t]\} \quad (5)$$

由于已假设信号是各态历经的, 而在实际信号处理中也一般用时间平均代替统计平均。故这里定义 $E[\exp(j2\pi f)] =$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(j2\pi f t) dt, \quad \text{由此定义易知有}$$

$$E[\exp(j2\pi f)] = \begin{cases} 1, & f = 0 \\ 0, & f \neq 0 \end{cases}$$

3.1 基带信号独立时调制信号的四阶相干性

由式(3)~式(5)可知, 只要基带信号各阶矩均为零, 调制信号的四阶矩也一定为零, 则式(2)为零, 调制信号是四阶不相干的。这说明, 只要零均值的基带信号相互独立, 调制信号就能满足四阶不相干, 基带载波的存在并不影响调制信号的四阶不相干性。

3.2 基带信号相关时调制信号的四阶相干性

当基带信号相关时, 其各阶矩不再为零, 这时基带载波将影响调制信号的四阶相干性。

观察式(3), 由于 $f_{k_1} + f_{k_2} > 0$, 则 $E\{\exp[j2\pi(f_{k_1} + f_{k_2})t]\} = 0$, 式(3)为零, 式(2)中的第 4 个因式也为零, 调制信号的四阶累积量公式可简化为

$$C(s_{k_1}, s_{k_2}^*, s_{k_3}^*, s_{k_4}) = E(s_{k_1} s_{k_2}^* s_{k_3}^* s_{k_4}) - E(s_{k_1} s_{k_2}^*) E(s_{k_3}^* s_{k_4}) - E(s_{k_1} s_{k_3}^*) E(s_{k_2}^* s_{k_4}) \quad (6)$$

观察式(4)可知, 只要 $f_{k_1} \neq f_{k_2}$, 则式(4)一定为零。观察式(5)可知, 只要满足 $f_{k_1} - f_{k_2} - f_{k_3} + f_{k_4} \neq 0$, 则式(5)一定为零。可见, 只要基带载波频率满足以下条件:

$$f_{k_1} - f_{k_2} - f_{k_3} + f_{k_4} \neq 0 \quad (7)$$

$$f_{k_1} \neq f_{k_2} \quad \text{或} \quad f_{k_3} \neq f_{k_4} \quad (8)$$

$$f_{k_1} \neq f_{k_3} \quad \text{或} \quad f_{k_2} \neq f_{k_4} \quad (9)$$

则式(6)中的每一个因式为零, 式(6)也为零, 调制信号四阶不相干。

考察式(6), 可以发现, 当存在 3 个及 3 个以上信号时, 如果其基带载波频率各不相同, 式(8)和式(9)总能同时满足, 只要对各信号的不同基带载波频率进行适当调整使其满足式(7), 就可保证式(7)~式(9)同时成立。但当只存在 2 个信号时, 在 $k_1 = k_2, k_3 = k_4$ 或 $k_1 = k_3, k_2 = k_4$ 的情况下, 式(7)不能成立, 式(8)和式(9)也不能同时成立。因此, 只有存在 3 个及 3 个以上信号时, 我们才能利用式(7)~式(9)调整基带载波频率, 使调制信号四阶不相干。

4 信号微小频偏即基带载波频率的设计

对 P 个基带载波频率各不相同的信号, 式(7)共有 P^4 种组合, 其中包括 3 个及 3 个以上信号的组合就有 $P^4 - P - 10P(P-1)$ 种, 要使得所有信号在这些组合下都能满足式(7)必须对基带载波频率进行专门设计。

采取递推的方法: 先确定一个最低频率 f_1 作为第一个信号的基带载波频率, 然后依次增加频率, 作为后一个信号的基带载波频率。若设计第 j 个信号的基带载波频率 f_j 满足

$$f_j + f_1 > 2f_{j-1}, \quad j \geq 3 \quad (10)$$

则显然对于此 j 个信号, $k_1, k_2, k_3, k_4 \in [1, j]$, 都满足式(7)的成立。若令

$$f_j + f_1 - 2f_{j-1} = \Delta f \quad (11)$$

其中 Δf 是个合适大小的正值, 则由式(11)递推可得

$$f_j = f_1 + (2^{j-1} - 1)\Delta f, \quad j = 1, \dots, P, \quad P \geq 3 \quad (12)$$

基带载波相对于射频载波是一个微小偏差, 故可看作是信号的微小频偏。不同信号根据式(12)设计微小频偏, 然后对基带信号用微小频偏调制后再在射频端用共同的射频载波调制发射出去, 那么窄带接收系统接收的射频信号虽然频率相近却满足四阶不相干, 而去掉射频载波后得到的信号也满足四阶不相干。此时利用四阶累积量方法便可获得良好的估计性能。

5 基于四阶累积量估计 DOA 的 MUSIC-like 算法

令 P 个窄带信号 $s_p(t)$, $p \in [1, P]$, 以 $\theta_p \in [-\pi/2, \pi/2]$ 的角度入射到一个 M 阵元的一维线阵上, 各阵元全向一致, 各阵元通道响应特性也一致。以第一个阵元为参考阵元, 各阵元半波长归一化位置可表示为 $[d_1, d_2, \dots, d_M]$, 这里的波长是信号射频载波的波长, d_m 表示第 m 个阵元到参考阵元的半波长归一化距离, $d_1 = 0$, 则第 m 个阵元的输出为

$$x_m(t) = \sum_{p=1}^P s_p(t) \exp(-j\pi d_m \sin \theta_p) + n_m(t) \quad (13)$$

其中 $n_m(t)$ 是第 m 个阵元的加性高斯噪声, 相互独立且独立于窄带信号。

在 MUSIC-like 算法中^[3], 定义第 k_1, k_2, k_3, k_4 个阵元输出之间的四阶累积量:

$$C(x_{k_1}, x_{k_2}^*, x_{k_3}^*, x_{k_4}) = E\{x_{k_1} x_{k_2}^* x_{k_3}^* x_{k_4}\} - E\{x_{k_1} x_{k_2}^*\} \cdot E\{x_{k_3}^* x_{k_4}\} - E\{x_{k_1} x_{k_3}^*\} \cdot E\{x_{k_2}^* x_{k_4}\} \quad (14)$$

其中 $k_1, k_2, k_3, k_4 \in [1, M]$, 相应阵列输出向量 X 的四阶累积量矩阵:

$$C_X = E\{(X \otimes X^*) \otimes (X \otimes X^*)^H\} - E\{X \otimes X^*\} E\{(X \otimes X^*)^H\} - E\{XX^H\} \otimes E\{(XX^H)^*\} \quad (15)$$

其中 $\otimes$ 为 Kronecker 积, H 为复共轭转置, C_X 中第 $(k_1 - 1)M + k_2$ 行 $(k_3 - 1)M + k_4$ 列元素为 $C(x_{k_1}, x_{k_2}^*, x_{k_3}^*, x_{k_4})$ 。四阶累积量对高斯噪声不敏感。若各 $s_p(t)$ 四阶不相干, 则式(15)变为

$$C_X = (A \otimes A^*) C_S (A \otimes A^*)^H = \sum_{p=1}^P (a(\theta_p) \otimes a^*(\theta_p)) \kappa_p (a(\theta_p) \otimes a^*(\theta_p))^H = B \Sigma_S B^H \quad (16)$$

其中 $\kappa_p = C(s_p, s_p^*, s_p^*, s_p)$ 为 $s_p(t)$ 的四阶累积量, $\Sigma_S = \text{diag}\{\kappa_1, \dots, \kappa_P\}$ 为对角阵; B 是 $M^2 \times P$ 的矩阵, $B = [b(\theta_1), \dots, b(\theta_P)]$, 而 $b(\theta) = a(\theta) \otimes a^*(\theta)$, 代表信号子空间。

对 C_X 进行特征值分解, 获得信号子空间和噪声子空间, 进而通过正交投影后搜索谱峰获得 DOA 估计正如各。 $s_p(t)$ 满足二阶不相关将保证基于二阶协方差矩阵的 MUSIC 算法

取得良好的 DOA 估计性能一样, 满足四阶不相干的各 $s_p(t)$ 可保证基于四阶累积量的 MUSIC-like 算法取得良好的 DOA 估计性能。

6 Monte-Carlo 仿真

假设 4 阵元的均匀线阵, 其阵元间距为射频载波波长的二分之一。此时利用 MUSIC-like 可最多估计出 6 个空间信号。这里设有 6 个空间窄带信号, 方向角为 $[-40^\circ, -21^\circ, -4^\circ, 15^\circ, 32^\circ, 50^\circ]$ 。由于射频载波不包含信息, 接收信号处理前先去掉射频载波 f_c 。令 $F = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6]$ 为基带载波频率, 各 f_p 根据式(12)设计。取 $f_1 = 1000$, $\Delta f = 5$, 单位为赫兹, 则 $F = [1000, 1005, 1015, 1035, 1075, 1155]$ 。此外, 在此频率范围内分别随机取得一组频率 $F_1 = [1000, 1049, 1050, 1051, 1135, 1155]$, 等距取一组频率 $F_2 = [1000, 1031, 1062, 1093, 1124, 1155]$ 以及取一组同频基带载波 $F_3 = [1000, 1000, 1000, 1000, 1000, 1000]$ 。

实验 1 当各信号相互独立时, 对各信号不作基带载波调制与作基带载波调制后的估计比较。信噪比 20dB, 快拍数为 5000。运用 MUSIC-like 仿真, 结果如图 1 所示。图 1(a) 是无基带载波调制的情形, 图 1(b), 1(c), 1(d), 1(e) 是有基带载波调制的情形, 分别对应基带载波 F, F_1, F_2, F_3 。图中的 * 点代表信号的真实方向, 下同。仿真结果说明, 在各信号相互独立的情况下, 对信号不作基带载波调制与作基带载波调制的估计效果基本上是一样的。

实验 2 当各信号互相相关时, 对各信号不作基带载波调制和作基带载波调制下的估计比较。信噪比 20dB, 快拍数为 9000。运用 MUSIC-like 仿真, 结果如图 2 所示。图 2(a) 是无基带载波调制的情形, 图 2(b), 2(c), 2(d), 2(e) 是有基带载波调制的情形, 分别对应基带载波 F, F_1, F_2, F_3 。仿真结果说明, 在各信号互相相关的情况下, 对信号不作基带载波调制与作基带载波调制的估计效果是有很大大差别的。不作基带载波调制的完全不能估计出信号的波达方向, 而利用了本文设计的基带载波调制的, 则可正确地估计出所有信号来, 利用了基带载波调制但是频率选择不当的也不能作出正确估计。

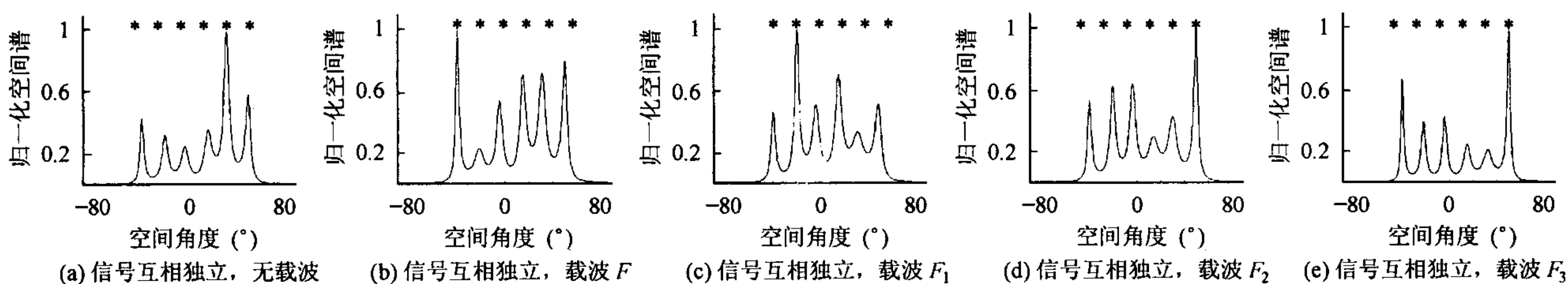


图 1 信号相互独立下不同微小频偏的 MUSIC-like 估计 DOA 比较

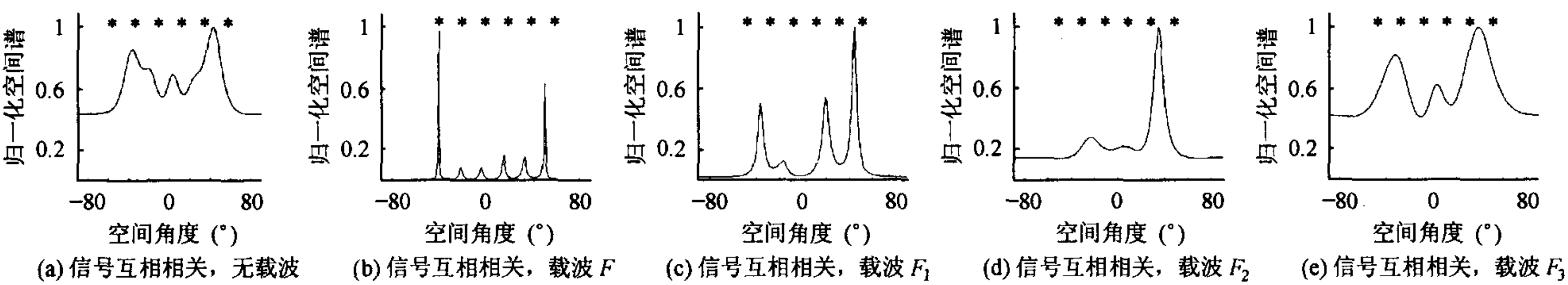


图 2 信号相互相关下不同微小频偏的 MUSIC-like 估计 DOA 比较

在[1000,1155]内多次随机取微小频偏进行仿真，大多数情况下估计性能得不到保证。在信号基带相关的情况下，利用本文方法设置各信号的微小频偏可保证良好的估计性能。

调整 f_1 和 Δf 作多次仿真后发现， Δf 相对于 f_1 的比值越大时估计性能越好，但为了节省带宽 Δf 不应太大，仿真证明 Δf 也无需很大，大概不小于 f_1 的 0.5% 就可实现正确估计。

7 结束语

本文提出一种新的四阶累积量 DOA 估计法，解除了对基带信号独立性的要求。该方法对每一个基带信号分配一个基带载波，基带载波相对于射频载波是一个微小偏差。本文推导了在基带信号独立和相关两种情况下信号四阶相干性与基带载波频率的关系，设计出了在基带信号相关情况下保证信号四阶不相干的微小频偏集。仿真证明，在基带信号相关的情况下，微小频偏集能有效提高基于四阶累积量的 DOA 子空间法在基带信号相关下的估计性能，准确地分辨出各信号波达方向，而没有利用基带载波频率调制或基带载波频率选择不当的都不能取得正确估计。

如文中所述，基带相关的两信号经过不同的基带载波频率调制后得到的调制信号却是不相干的，故通过设置不同的基带载波频率还有利于改善基于二阶相关函数的 DOA 子空间估计方法的性能。此外，各信号载波频率不同也导致其循环频率的不同，故还可以利用循环平稳特性估计信号^[6-8]，作者将在另外一篇文章中作相应研究。

参 考 文 献

[1] 张贤达. 时间序列分析——高阶统计量方法[M]. 北京：清华大学出版社，1996，第11章.

[2] Dogan M C, Mendel J M. Applications of cumulants to array processing-Part I: Aperture extension and array calibration[J]. *IEEE Trans. on SP*, 1995, 43(5): 1200 – 1216.

[3] Porat B, Friedlander B. Direction finding algorithms based on high-order statistics [J]. *IEEE Trans. on SP*, 1991, 39(9): 2016 – 2023.

[4] 魏平, 肖先赐. 基于四阶累积量的阵列扩展[J]. *电子科学学科*, 1997, 19(6): 745 – 750.

[5] 魏平, 肖先赐. 谐波过程的高阶广义各态历经性的分析与应用 [J]. *电子与信息学报*, 2003, 25(3): 333 – 339.

[6] Cui Jian, Falconer D D, Sheikh A U H, Blind adaptation of antenna arrays using a simple algorithm based on small frequency offsets [J]. *IEEE Trans. on Communications*, 1998, 46(1): 62 – 70.

[7] Shamsunder S, Giannakis G B. Signal selective localization of nonGaussian cyclostationary sources[J]. *IEEE Trans. on SP*, 1994, 42(10): 2860 – 2864.

[8] 张贤达, 保铮. 非平稳信号分析和处理[M]. 北京：国防工业出版社，1998，第10章.

刘学斌：男，1978 年生，博士生，主要研究方向为智能天线的设计、算法、性能分析以及应用。

季 飞：女，1970 年生，副教授，主要研究方向为电磁场数值计算、智能天线、移动通信等。

韦 岗：男，1963 年生，博士生导师，国家自然科学基金委员会电子与信息学科评委，中国航空学会通信理论委员会委员，中国电子学会高级会员，国际电子电气工程师协会会员，主要研究方向有现代通信理论与技术、多媒体信息处理、模式识别、神经网络。