

基于原子范数的MIMO雷达发射波形设计方法

庞晓娇^① 赵永波^{*①②} 徐保庆^① 曹成虎^① 索之玲^①

^①(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

^②(西安电子科技大学信息感知技术协同创新中心 西安 710071)

摘要: 针对现有多输入多输出(MIMO)雷达发射波形设计方法存在运算量高的问题, 该文提出一种基于原子范数的MIMO雷达发射波形设计方法。根据原子范数的信号模型, 该算法首先选择一个具有特殊结构的发射滤波器组以及一组正交信号, 将MIMO雷达发射波形设计问题转化为原子范数最小化问题, 然后采用半正定规划(SDP)对原子范数进行求解, 得到(半)正定Toeplitz矩阵, 并对其进行范德蒙分解实现发射滤波器组的估计, 最后综合发射滤波器组与正交信号获得MIMO雷达的发射波形。理论分析与仿真结果表明, 该算法满足等能量发射准则以及小的峰均功率比(PAPR)。同时, 该算法相比于现有算法有较低的运算量以及良好的匹配性能。

关键词: 多输入多输出雷达; 发射波形设计; 原子范数; 峰均功率比

中图分类号: TN958

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)09-2143-08

DOI: 10.11999/JEIT181107

An Atomic Norm-Based Transmit Waveform Design Method in MIMO Radar

PANG Xiaojiao^① ZHAO Yongbo^{①②} XU Baoqing^①

CAO Chenghu^① SUO Zhiling^①

^①(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

^②(Information Sensing and Understanding, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: For the fact that existing MIMO transmit beampattern design methods suffer from huge computational burden, a novel MIMO transmit beampattern design method based on atomic norm is proposed. According to the signal model of atomic norm, firstly a multi-rank transmit beamformer and a set of orthogonal signals are selected. Then the transmit beampattern matching design problem is formulated into an atomic norm minimization problem. The multi-rank transmit beamformer is achieved by Vandermonde decomposition method of positive semidefinite Toeplitz matrix, which is attained by the solution of the atomic norm minimization problem with Semi-Definite Programming (SDP). Finally, the transmit waveforms can be acquired from the resulting multi-rank transmit beamformer and existing orthogonal waveforms. The theoretical analysis and simulation results verify that the proposed method satisfies the uniform element power constraint and low Peak to Average Power Ratio (PAPR). Simultaneously, compared with current methods, the proposed method has lower computational burden and comparable matching performance.

Key words: MIMO radar; Transmit waveform design; Atomic norm; Peak to Average Power Ratio (PAPR)

1 引言

与传统的相控阵雷达相比, 多输入多输出(MIMO)雷达因其独特的优势正受到越来越多的关注^[1-3]。MIMO雷达根据其阵列结构可分为分布式

MIMO雷达^[2]和集中式MIMO雷达^[3], 而发射波形设计主要针对于集中式MIMO雷达。通过设计发射波形, 集中式MIMO雷达可以获得波形分集, 使集中式MIMO雷达虚拟孔径扩展, 从而提高系统的目标检测、参数估计以及干扰和杂波抑制性能^[4-6]。

传统集中式MIMO雷达发射波形为正交波形, 但正交波形存在发射增益损失, 会导致目标信噪比降低的问题^[7]。为解决这一问题, 大量学者对部分相关波形设计问题展开研究^[8-11]。通过调节发射信号波形的相关性, 可以灵活设计MIMO雷达的发射

收稿日期: 2018-11-29; 改回日期: 2019-03-04; 网络出版: 2019-03-27

*通信作者: 赵永波 ybzhao@xidian.edu.cn

基金项目: 高等学校学科创新引智计划项目(B18039)

Foundation Item: The Fund for Foreign Scholars in University Research and Teaching Programs (B18039)

波形,从而提高系统的性能^[9]。文献^[9]最早对MIMO雷达部分相关波形设计进行研究,其指出发射信号的相关性及发射能量分布图可以由发射波形的相关矩阵刻画。文献^[11]提出了一种基于半正定二次规划(Semi-definite Quadratic Programming, SQP)的MIMO雷达发射波形设计方法。该方法将发射信号相关矩阵设计问题转化为凸优化问题,并采用SQP方法对问题进行求解。一般来说,发射波形的相关矩阵需要满足一定的特性,而且发射波形也需要满足等能量发射准则以及小的峰均功率比(Peak to Average Power Ratio, PAPR)约束,所以MIMO雷达波形设计需要求解带约束的高维优化,其计算复杂度极高,很难满足实际应用中的实时性要求。针对以上MIMO雷达发射波形设计高运算量的问题,许多学者对低运算量的波形设计方法进行研究^[12-14]。文献^[9]提出了一种基于发射滤波器组(Multi-Rank Transmit BeamFormer, MRTBF)的MIMO雷达发射波形设计方法。根据发射波形相关矩阵的Toeplitz性质, Lipor等人^[13]提出了基于FFT的MIMO雷达发射波形设计方法,虽然该方法运算量低,但是其发射能量图匹配性能差,而且该方法仅适用于矩形期望发射能量分布图情况,应用范围相当受限。

近年来,压缩感知和稀疏表示理论正被广泛研究^[15,16],尤其是基于原子范数的稀疏表示方法是最新的研究热点^[17-20]。本文提出一种基于原子范数的MIMO雷达发射波形设计方法。本方法通过求解原子范数最小化问题实现对发射滤波器组的估计,并综合发射滤波器组与预设的正交信号得到最终的MIMO雷达发射波形。仿真结果和相关分析表明,所设计的波形能较好地匹配期望能量分布图,相比于已有方法,计算量和峰均功率比等指标没有明显劣势,所提算法为MIMO雷达波形设计问题提供了一种新的设计思路。

文中常用符号的定义: $(\cdot)^T$, $(\cdot)^H$ 以及 $(\cdot)^*$ 分别表示矩阵或矢量的转置、共轭转置以及共轭, \mathbf{I}_M 表示 $M \times M$ 维的单位矩阵, $(\cdot)^{-1}$ 表示对矩阵求逆, $\|\cdot\|_2$ 表示 l_2 范数, $\text{diag}(\cdot)$ 表示对角化操作, \mathbb{C} 表示复数域。

2 信号模型

假设MIMO雷达的发射阵列为均匀等距线阵,其中发射阵元数为 M , 相邻阵元间距为 d , 且 $d = \lambda/2$, λ 表示信号波长, 令第 m 个发射阵元的发射信号为

$$\mathbf{s}_m = [s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mQ}]^T \quad (1)$$

$\|\mathbf{s}_m\|_2 = 1$, 其中 Q 为发射信号单个脉冲的采样点数, 则 M 个发射阵列的发射信号为

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_M]^T \quad (2)$$

MIMO雷达在 θ 方向上的发射信号可以表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{S} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{j2\pi d \sin(\theta)/\lambda}, \dots, e^{j2\pi(M-1)d \sin(\theta)/\lambda}]^T$ 表示 θ 方向上的导向矢量, 而 θ 方向上发射信号的平均功率为

$$P(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{S} \mathbf{S}^H \mathbf{a}(\theta) = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R} \mathbf{a}(\theta) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{R} = \mathbf{S} \mathbf{S}^H$ 是发射信号的相关矩阵, 矩阵 \mathbf{R} 的第 m 个对角元素表示第 m 个阵元的平均功率。在MIMO雷达发射波形设计中, $P(\theta)$ 又称为发射能量分布图。

MIMO雷达发射波形设计的核心思想是通过设计发射波形使发射能量分布图与期望的发射能量分布图 $P_d(\theta)$ 相匹配。本文采用最小均方准则衡量匹配性能, 则匹配误差可以表示为

$$\begin{aligned} J(\mathbf{R}) &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L [P(\theta_l) - P_d(\theta_l)]^2 \\ &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L [\mathbf{a}^H(\theta_l) \mathbf{R} \mathbf{a}(\theta_l) - P_d(\theta_l)]^2 \end{aligned} \quad (5)$$

其中, L 表示空域采样点个数, $P_d(\theta_l)$ 表示期望方向图在 θ_l 上的值。

由于匹配误差是发射信号相关矩阵的函数, 而发射信号相关矩阵由发射信号决定, 因此设计发射波形时, 首先在某些约束条件下使匹配误差最小得到发射信号相关矩阵, 然后根据得到的相关矩阵对发射信号进行优化。上述设计过程同时考虑了发射信号的时域与空域特性, 增加了发射波形设计的复杂度。根据文献^[9], 设计发射波形时, 可分别考虑发射波形的时域与空域特性, 即首先设计具有良好时域正交性的信号, 然后根据空域发射滤波器对发射信号进行设计。而本文所提算法采用文献^[9]的思想设计发射波形, 在该框架下设计发射波形时, 只需要对MRTBF进行设计。假设存在一组正交信号 $\overline{\mathbf{S}}$, $\overline{\mathbf{S}} = [\overline{\mathbf{s}}_1^T, \overline{\mathbf{s}}_2^T, \dots, \overline{\mathbf{s}}_N^T]^T \in \mathbb{C}^{N \times Q}$, 且 $N \leq M$, $\|\overline{\mathbf{s}}_n\|_2 = 1$, 同时又存在一组空域发射滤波器组 \mathbf{W} , 则MIMO雷达发射的真实信号为

$$\mathbf{S} = \mathbf{W} \overline{\mathbf{S}} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N]$ 为空域发射滤波器组。

3 基于原子范数的MIMO雷达发射波形设计方法

3.1 基于原子范数的发射能量图稀疏表示

由式(6)分析知, MIMO雷达实际发射的信号是线性空间 \mathbb{A} 的线性组合, 而发射滤波器组 \mathbf{W} 属于

线性空间 \mathbb{A} ，因此，可以通过选取合适的线性空间 \mathbb{A} 来求解发射滤波器组，进而获得具有良好性能的发射波形。为了避免离散误差引起的失配问题，希望所选取的线性空间是连续的，利用原子范数集合的连续性，本文旨在将原子范数这一思想应用到MIMO雷达发射波形设计中。为了能够更好地将原子范数应用到MIMO雷达发射波形设计中，本文定义发射滤波器组为

$$\mathbf{W} = \overline{\mathbf{W}} \mathbf{\Lambda} \quad (7)$$

其中， $\overline{\mathbf{W}} = [\overline{\mathbf{w}}_1(\theta_1), \overline{\mathbf{w}}_2(\theta_2), \dots, \overline{\mathbf{w}}_N(\theta_N)]$ ， $\overline{\mathbf{w}}_n(\theta_n) = [1, e^{j2\pi d \sin(\theta_n)/\lambda}, \dots, e^{j2\pi(M-1)d \sin(\theta_n)/\lambda}]^T$ ， $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ 。那么，MIMO雷达发射的信号可以再次表示为

$$\mathbf{S} = \overline{\mathbf{W}} \mathbf{\Lambda} \overline{\mathbf{S}} = \sum_{n=1}^N \overline{\mathbf{w}}_n(\theta_n) \alpha_n \overline{\mathbf{s}}_n = \sum_{n=1}^N c_n \overline{\mathbf{w}}_n(\theta_n) \phi_n \quad (8)$$

其中， $c_n = \|\alpha_n \overline{\mathbf{s}}_n\|_2 > 0$ ， $\phi_n = c_n^{-1} \alpha_n \overline{\mathbf{s}}_n$ ， $\|\phi_n\|_2 = 1$ ， $\mathbb{Y}^{2L-1} = \{\phi \in \mathbb{C}^{1 \times L} : \|\phi\|_2 = 1\}$ 表示单位复数球体空间，定义原子范数集合为

$$\mathbb{A} := \{\overline{\mathbf{w}}(\theta, \phi) = \overline{\mathbf{w}}(\theta) \phi : \theta \in [0, 2\pi], \phi \in \mathbb{Y}^{2L-1}\} \quad (9)$$

由式(8)得出，MIMO雷达发射信号 \mathbf{S} 是原子范数集合 \mathbb{A} 中 N 个原子的线性组合。如果 $c_n > 0$ ，且 θ_n 均不一样，则认为式(8)中的发射信号 \mathbf{S} 的分解是 N 阶原子分解。

本文定义MIMO雷达发射信号 \mathbf{S} 的 ℓ_0 -原子范数为原子范数集合 \mathbb{A} 中能够表示发射波形信号 \mathbf{S} 的原子的最小个数，即

$$\|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A},0} = \inf \left\{ K \mid \mathbf{S} = \sum_k^K c_k \overline{\mathbf{w}}(\theta_k, \phi_k), \overline{\mathbf{w}}(\theta, \phi) \in \mathbb{A} \right\} \quad (10)$$

将文献[19]中的基于原子范数的频率估计方法应用到MIMO雷达发射波形设计问题中，本文提出优化方法为

$$\min \|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A},0} \quad (11)$$

而在式(10)中定义的 $\|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A},0}$ 等于以下秩最小化问题的最优值

$$\min_{\mathbf{F}, \mathbf{u}} \text{rank}(\mathbf{T}(\mathbf{u})), \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{S}^H \\ \mathbf{S} & \mathbf{T}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (12)$$

下面证明 $\|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A},0}$ 等于式(12)的最优值。

证明 假设 $\|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A},0} = K$ ，式(12)秩最小化问题的最优解为 r^* ， $\hat{\mathbf{u}}$ 表示式(12)的最优解。一方面， $\|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A},0} = K \leq M$ ，且 $\mathbf{S} = \sum_{k=1}^K c_k \overline{\mathbf{w}}(\theta_k, \phi_k) =$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \overline{\mathbf{w}}_k(\theta_k) \alpha_k \overline{\mathbf{s}}_k, \quad \text{令 } \mathbf{u} = \sum_{k=1}^K q_k \overline{\mathbf{w}}(\theta_k), \\ \mathbf{T}(\mathbf{u}) &= \sum_{k=1}^K q_k \overline{\mathbf{w}}(\theta_k) \overline{\mathbf{w}}^H(\theta_k), \quad q_k = \alpha_k^2 \overline{\mathbf{s}}_k \overline{\mathbf{s}}_k^H, \\ \mathbf{F} &= \sum_{k=1}^K (\overline{\mathbf{s}}_k \overline{\mathbf{s}}_k^H)^{-1} (\overline{\mathbf{s}}_k^H \overline{\mathbf{s}}), \quad \text{那么} \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{S}^H \\ \mathbf{S} & \mathbf{T}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^K q_k \begin{bmatrix} q_k^{-1} \alpha_k^H \overline{\mathbf{s}}_k^H \\ \overline{\mathbf{w}}(\theta_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_k^{-1} \alpha_k \overline{\mathbf{s}}_k & \overline{\mathbf{w}}^H(\theta_k) \end{bmatrix} \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

这说明 (\mathbf{F}, \mathbf{u}) 是式(12)的可行解，则 $r^* \leq \|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A},0} = K$ 。

另一方面， $r^* \leq M$ 。当 $r^* = M$ 时，而 \mathbf{S} 一定满足 $\mathbf{S} = \sum_k^M c_k \overline{\mathbf{w}}(\theta_k, \phi_k)$ ，则 $K \leq r^*$ 。当 $r^* < M$ 时，根据范德蒙矩阵分解定理， $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$ 的范德蒙分解为

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}) = \sum_{k=1}^{r^*} q_k \overline{\mathbf{w}}(\theta_k) \overline{\mathbf{w}}^H(\theta_k) \quad (14)$$

且 \mathbf{S} 位于 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$ 的列空间，也就存在 $\mathbf{S} = \sum_k^{r^*} c_k \overline{\mathbf{w}}(\theta_k, \phi_k)$ ，则 $K \leq r^*$ 。

综上所述， $K = r^*$ ，即 $\|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A},0}$ 等于式(12)的最优值。证毕

$\mathbf{T}(\mathbf{u})$ 为半正定Toeplitz矩阵，且式(12)的最优解 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$ 是MIMO雷达发射信号的相关矩阵。下面证明 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$ 是MIMO雷达发射信号的相关矩阵。

证明 由于 $\|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A},0}$ 等于式(12)的最优值，即 $K = r^*$ ，那么

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{r^*} \mathbf{a}(\theta_i) \tilde{\mathbf{s}}_i = \sum_{i=1}^{r^*} \overline{\mathbf{w}}_i \alpha_i \overline{\mathbf{s}}_i \quad (15)$$

其中， $\overline{\mathbf{w}}_i = \mathbf{a}(\theta_i)$ ， $\tilde{\mathbf{s}}_i = \alpha_i \overline{\mathbf{s}}_i$ ，则式(14)可以再次表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}) &= \sum_{k=1}^{r^*} q_k \overline{\mathbf{w}}(\theta_k) \overline{\mathbf{w}}^H(\theta_k) \\ &= \overline{\mathbf{W}} \text{diag}(\tilde{\mathbf{s}}_1 \tilde{\mathbf{s}}_1^H, \tilde{\mathbf{s}}_2 \tilde{\mathbf{s}}_2^H, \dots, \tilde{\mathbf{s}}_{r^*} \tilde{\mathbf{s}}_{r^*}^H) \overline{\mathbf{W}}^H \\ &= \overline{\mathbf{W}} \mathbf{\Lambda} \overline{\mathbf{S}} \overline{\mathbf{S}}^H \mathbf{\Lambda}^H \overline{\mathbf{W}}^H \\ &= \mathbf{R} \end{aligned} \quad (16)$$

由式(16)可知， $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$ 是MIMO雷达发射信号的相关矩阵。证毕

定理 1 (范德蒙矩阵分解定理)半正定Toeplitz矩阵 $\mathbf{T}(\mathbf{u}) \in \mathbb{C}^{M \times M}$ 如果不满秩时，可以唯一得到 r -原子范德蒙分解为

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^r p_k \overline{\mathbf{w}}(\theta_k) \overline{\mathbf{w}}^H(\theta_k) \quad (17)$$

但式(12)的秩最小化问题是非凸问题, 对其进行求解十分困难, 一般通过松弛算法对其求解。本文定义发射信号 \mathbf{S} 的原子范数为

$$\|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A}} := \inf \left\{ \sum_k |c_k| \left| \mathbf{S} = \sum_k c_k \bar{\mathbf{w}}(\theta_k, \phi_k), \right. \right. \\ \left. \left. \bar{\mathbf{w}}(\theta, \phi) \in \mathbb{A} \right\} \quad (18)$$

尽管式(18)所示的问题是凸的, 但在实际中依然很难实现, 为了更好地求解式(18), 根据**定理2**(具体证明过程可参考文献[19]), 原子范数 $\|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A}}$ 的半正定规划(Semi-Definite Programming, SDP)被引入。

定理 2 在式(18)中定义的原子范数 $\|\mathbf{S}\|_{\mathbb{A}}$ 等于式(19)半正定规划问题的最优值

$$\min_{\mathbf{F}, \mathbf{u}} \{ \text{tr}(\mathbf{F}) + \text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{u})) \}, \text{ s.t. } \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{S}^{\text{H}} \\ \mathbf{S} & \mathbf{T}(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (19)$$

然而在实际应用中, 还需要使设计的MIMO雷达发射波形的匹配误差尽可能的小, 式(19)可再次表示为

$$\min_{\mathbf{u}} \left\| \mathbf{a}^{\text{H}}(\theta) \mathbf{T}(\mathbf{u}) \mathbf{a}(\theta) - P_d(\theta) \right\|_2^2 + \text{tr}(\mathbf{T}(\mathbf{u})), \\ \text{ s.t. } \mathbf{T}(\mathbf{u}) \succeq 0 \quad (20)$$

3.2 发射滤波器组设计

通过工具箱SeDuMi^[21]对优化问题式(20)求解, 得到最优解 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$, 当 $\text{rank}(\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})) = M$ 时, 对 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$ 进行特征值分解, 得到

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{V} \mathbf{\Gamma} \mathbf{V}^{\text{H}} \quad (21)$$

其中, \mathbf{V} 表示的特征向量矩阵, $\mathbf{\Gamma}$ 表示特征值矩阵。因为 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$ 是发射信号的相关矩阵, 且预先设计好的正交信号 $\bar{\mathbf{S}}$ 满足 $\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{S}}^{\text{H}} = \mathbf{I}_N$, 所以

$$\mathbf{V} \mathbf{\Gamma} \mathbf{V}^{\text{H}} = (\bar{\mathbf{W}} \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{S}}) (\bar{\mathbf{W}} \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{S}})^{\text{H}} \\ = \bar{\mathbf{W}} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^{\text{H}}) \bar{\mathbf{W}}^{\text{H}} \quad (22)$$

由式(22)可知, $\mathbf{V} = \bar{\mathbf{W}}$, $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^{\text{H}}$, 那么, 根据式(7)可知, 发射滤波器组 \mathbf{W} 可以表示为

$$\mathbf{W} = \mathbf{V} \mathbf{\Gamma} \frac{1}{2} \quad (23)$$

当 $\text{rank}(\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})) < M$ 时, 根据**定理1**, 可以对 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$ 进行范德蒙分解, 得到

$$\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^{\text{H}} = \sum_{i=1}^{r^*} p_i \mathbf{u}(\varphi_i) \mathbf{u}^{\text{H}}(\varphi_i) \quad (24)$$

其中, $\mathbf{u}(\varphi_i) = [1, e^{j2\pi d \sin(\varphi_i)/\lambda}, \dots, e^{j2\pi(M-1)d \sin(\varphi_i)/\lambda}]^{\text{T}}$,

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\hat{N}}), \quad \boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\hat{N}}], \\ \mathbf{U} = [\mathbf{u}(\varphi_1), \mathbf{u}(\varphi_2), \dots, \mathbf{u}(\varphi_{\hat{N}})] \text{ 为范德蒙矩阵, 那么} \\ \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^{\text{H}} = (\bar{\mathbf{W}} \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{S}}) (\bar{\mathbf{W}} \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{S}})^{\text{H}} = \bar{\mathbf{W}} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^{\text{H}}) \bar{\mathbf{W}}^{\text{H}} \quad (25)$$

由式(25)可得, $\mathbf{U} = \bar{\mathbf{W}}$, $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^{\text{H}}$, 也就意味着, 发射滤波器组 \mathbf{W} 可以表示为

$$\mathbf{W} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \frac{1}{2} \quad (26)$$

由于在天线阵列结构确定的情况下, 矩阵 \mathbf{U} 的列向量 $\mathbf{u}(\varphi_i)$ 由 φ_i 确定, 根据列向量 $\mathbf{u}(\varphi_i)$ 的形式, 可以通过求根-MUSIC方法^[22]对 φ_i 进行求解, 从而得到矩阵 \mathbf{U} 。根据矩阵 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$ 的Toeplitz性质对向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 求解。对于Toeplitz矩阵 $\mathbf{T}(\hat{\mathbf{u}})$, 可以由第1列元素 $\hat{\mathbf{u}}$ 完全确定, 根据式(24)可知, $\hat{\mathbf{u}}$ 可以表示为

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{r^*} p_i \mathbf{u}(\varphi_i) = \mathbf{U} \boldsymbol{\sigma} \quad (27)$$

根据矩阵 \mathbf{U} 和向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的特性, 可通过构造式(28)对矢量 $\boldsymbol{\sigma}$ 求解

$$\tilde{\mathbf{U}} \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{u}} \quad (28)$$

其中, $\tilde{\mathbf{U}} = [\mathbf{U}^{\text{T}} \quad \mathbf{U}_{-1}^{\text{H}}]^{\text{T}}$, $\tilde{\mathbf{u}} = [\hat{\mathbf{u}}^{\text{T}} \quad \hat{\mathbf{u}}_{-1}^{\text{H}}]^{\text{T}}$, \mathbf{U}_{-1} 与 $\hat{\mathbf{u}}_{-1}$ 分别表示由矩阵 \mathbf{U} 与向量 $\hat{\mathbf{u}}$ 除去第1行元素构成的矩阵与向量, 根据式(28), 可获得向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 为

$$\boldsymbol{\sigma} = (\tilde{\mathbf{U}}^{\text{H}} \tilde{\mathbf{U}})^{-1} \tilde{\mathbf{U}}^{\text{H}} \tilde{\mathbf{u}} \quad (29)$$

根据得到的发射滤波器组 \mathbf{W} , 则MIMO雷达发射信号可以表示为

$$\mathbf{S} = \mathbf{W} \bar{\mathbf{S}} \quad (30)$$

3.3 MIMO雷达发射波形PAPR分析

本节对所提算法的发射波形的PAPR以及各阵元发射信号的能量进行分析。根据式(30), MIMO雷达第 m 个发射阵元的发射信号为

$$s_m = \mathbf{w}_{rm} \bar{\mathbf{S}} \quad (31)$$

其中, \mathbf{w}_{rm} 表示矩阵 \mathbf{W} 的第 m 行, 那么第 m 个发射阵元的发射信号的平均功率为

$$P_{a,m} = \frac{1}{Q} \mathbf{w}_{rm} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{S}}^{\text{H}} \mathbf{w}_{rm}^{\text{H}} = \frac{\|\boldsymbol{\sigma}\|_1}{Q} \quad (32)$$

由式(32)可知, 本文所提算法设计的发射波形, 各发射阵元的发射信号的平均功率同阵元序号无关, 各阵元发射的平均功率相等, 即所提算法设计的波形满足等能量发射准则。根据PAPR的定义, 所提算法的发射信号的PAPR可以表示为

$$\text{PAPR}_m = \frac{\max |s_{m,l}|^2}{Q P_{a,m}} \quad (33)$$

其中, $s_{m,l}$ 表示MIMO雷达第 m 阵元的发射信号的第 l 个元素, 且

$$\begin{aligned}
|s_{m,l}|^2 &= \mathbf{w}_{rm} \bar{\mathbf{s}}_{cl} \bar{\mathbf{s}}_{cl}^H \mathbf{w}_{rm}^H \\
&= \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \sqrt{\sigma_k} \sqrt{\sigma_n} \bar{s}_{cl}(k) \bar{s}_{cl}^*(n) \\
&\quad \cdot e^{j2\pi(m-1)d(\sin(\varphi_k) - \sin(\varphi_l))/\lambda} \\
&\leq \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N \sqrt{\sigma_k} \sqrt{\sigma_n} = N \|\boldsymbol{\sigma}\|_1 \quad (34)
\end{aligned}$$

其中, $\bar{\mathbf{s}}_{cl}$ 表示正交波形矩阵 $\bar{\mathbf{S}}$ 的第 l 列, $\bar{s}_{cl}(k)$ 与 σ_k 分别表示 $\bar{\mathbf{s}}_{cl}$ 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 的第 k 个元素。将式(32)与式(34)代入式(33), 得到MIMO雷达第 m 个阵元的发射信号的PAPR满足

$$\text{PAPR}_m = \frac{\frac{1}{Q} \max |s_{m,l}|^2}{P_{a,m}} \leq N \leq M - 1 \quad (35)$$

3.4 计算量分析

本节将对所提算法的运算量进行分析。本文所提算法的计算量主要集中于式(20)的求解, 其计算复杂度为 $O(M^{3.5})$ 。基于FFT的算法的计算复杂度为 $O(M \lg(M) + QM)$, 因此, 所提算法的运算量要大于基于FFT算法的运算量。而基于SQP算法为得到发射信号的相关矩阵 \mathbf{R} , 然后根据得到的相关矩阵 \mathbf{R} , 利用循环算法对发射波形进行求解所需的总运算量为 $O(M^{3.5} + IQM^2 + IQ)$, 其中 I 为循环算法的循环次数。一般情况, 循环次数的值为几十次以上, 因而所提算法的运算量低于基于SQP算法的运算量。

4 仿真实验

本节进行以下仿真实验来验证所提算法的有效性。本文将所提算法与基于FFT算法以及基于SQP算法进行比较。假设本文算法与基于FFT算法设计发射波形所需的正交波形是从 64×64 阶的Hadamard矩阵中提取的, 而基于SQP算法的发射信号长度设定为64且其允许的真实信号的PAPR设定为2, 循环算法的循环次数设定为50。以下仿真实验针对不同雷达工作模式, 对各方法所设计的发射波形的性能进行比较。

实验1 MIMO雷达工作模式为搜索模式

当雷达工作在搜索模式下, 待检测目标的方向未知, 此时希望雷达系统可以照射较大空域范围。根据上述情况下, 本仿真实验设定期望能量方向图为波束指向为 -30° 以及波束宽度为 40° 的非对称等幅宽波束。假设发射阵列为由16个阵元构成的均匀等距线阵, 其中阵元间距为半波长, 采用上述各方法对发射波形进行设计, 分别得到各方法设计波形的发射能量分布图及期望发射能量分布图, 如图1

所示。从图1可以看出, 除基于FFT的算法外, 其它算法设计的发射波形所对应的发射能量分布图同期望发射能量分布图均有良好的匹配性能。

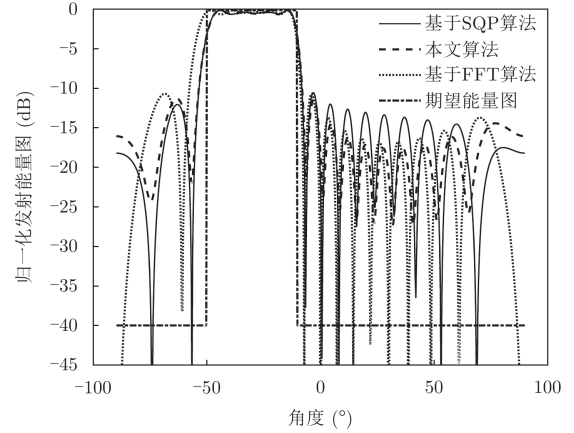


图1 各方法发射能量图匹配结果

同时对各方法设计波形的发射能量图的匹配误差进行分析。首先固定发射阵元个数为16, 而期望方向图是波束指向为 -30° , 波束宽度为 $30^\circ \sim 60^\circ$ 变化的非对称宽波束, 得到如图2所示的各方法设计波形的匹配误差随波束宽度的变化图。然后固定期望方向图的波束宽度为 40° , 发射阵元个数从10~30变化, 得到如图3所示的各方法设计波形的匹配误差随阵元个数的变化图。从图2与图3可以看出, 本文算法的发射波形匹配性能接近于基于SQP算法的匹配性能, 却明显优于基于FFT算法的匹配性能。

为验证本文算法设计波形性能的好坏, 本实验对各方法所设计波形的PAPR以及各方法的计算量进行比较, 图4表示各方法所设计波形的PAPR随发射阵元的变化图, 图5表示各方法运算时间随发射阵元个数的变化图。从图4可以看出, 本文算法所设计的波形满足小的PAPR。从图5可以看出, 本文算法的计算量大于基于FFT算法, 但小于基于SQP算法的运算量。虽然本文算法的运算量大于基于FFT算法的运算量, 但本文算法的匹配性能更优。本文算法的匹配性能虽略差于基于SQP算法, 但有更低的运算量, 因而本文算法有更好的综合性能。

实验2 MIMO雷达工作模式为多强目标跟踪模式

当雷达工作在多强目标跟踪模式时, 此时希望雷达可以同时辐射多个窄波束用以对多个目标进行跟踪, 所以本实验设计的期望发射能量方向图包含3个窄波束, 其中波束指向分别为 $-40^\circ, 0^\circ, 40^\circ$, 波束宽度均为 20° , 其它仿真条件同仿真实验1, 得到如图6所示的发射能量分布图, 同时比较各算法得到的发射波形的PAPR, 如图7所示。从图6看

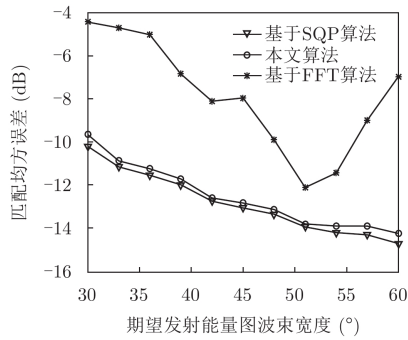


图2 匹配均方误差随期望发射能量图波束宽度的变化曲线图

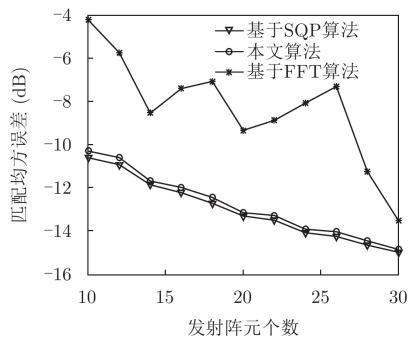


图3 匹配均方误差随发射阵元个数的变化曲线图

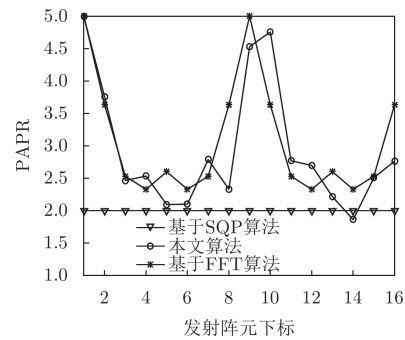


图4 各方法所设计波形的PAPR

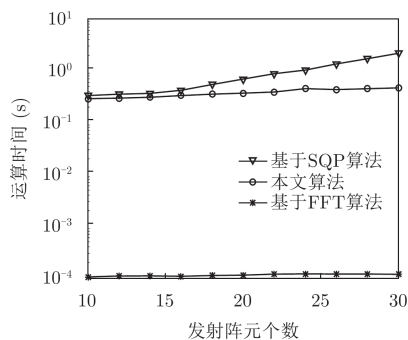


图5 各方法运算时间随发射阵元个数的变化曲线

出，本文算法设计的发射波形的匹配性能接近于基于SQP算法的匹配性能，但优于基于FFT算法的匹配性能。图7的仿真结果表明，本文算法设计的发射波形满足小的PAPR。

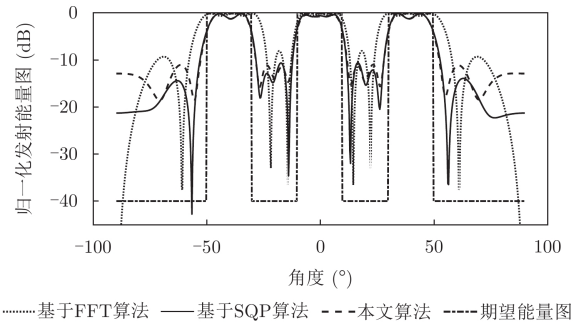


图6 各方法发射能量图匹配结果

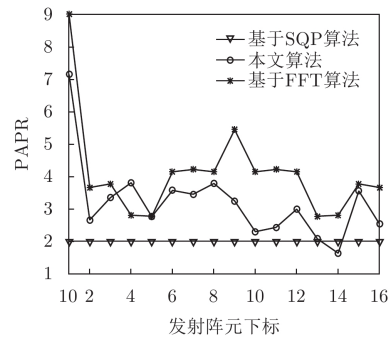


图7 各方法所设计波形的PAPR

实验3 MIMO雷达工作模式为同时跟踪多个不同回波能量的目标

在实际雷达系统中，不同目标的反射截面积之间存在较大差异，为了使雷达能更好地检测到低回波信号能量的雷达目标，需向弱目标所在方向辐射更多的能量。本实验中，假设发射阵列为由24个阵元构成的均匀等距线阵，其中阵元间距为半波长，为了能够很好跟踪不同回波能量的目标，期望方向图设定如式(36)

$$P_d(\theta) = \begin{cases} 0.1(\cos(n_1\theta) + 1), & \theta \in [\theta_1 - B_1/2, \theta_1 + B_1/2] \\ \cos(n_2\theta) + 1, & \theta \in [\theta_2 - B_2/2, \theta_2 + B_2/2] \\ 0.5(\cos(n_3\theta) + 1), & \theta \in [\theta_3 - B_3/2, \theta_3 + B_3/2] \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (36)$$

其中， θ_i 与 B_i 分别表示期望发射能量方向图第 $i(i=1,2,3)$ 个主瓣的波束指向与波束宽度，其具体参数为 $[\theta_1, \theta_2, \theta_3] = [-50^\circ, -10^\circ, 65^\circ]$, $[B_1, B_2, B_3] = [20^\circ, 25^\circ, 18^\circ]$, $n_i = \text{fix}(360/B_i)$ 表示控制第 i 个主瓣形状的参数。当理想期望方向图在不同方向的能量分布差异较大时，基于FFT算法的性能急剧恶化，所以本实验仅采用所提算法以及基于SQP的算法设计发射波形，得到如图8所示的发射能量分布图，同时比较各算法得到的发射波形的PAPR，如图9所示。从图8可知，所提算法依然有良好的波形匹

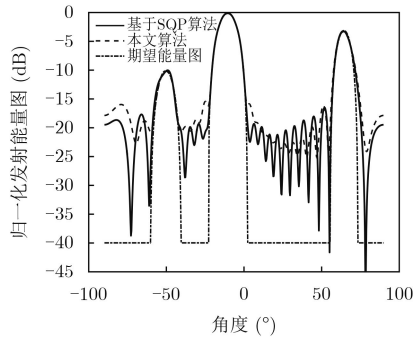


图8 各方法发射能量图匹配结果

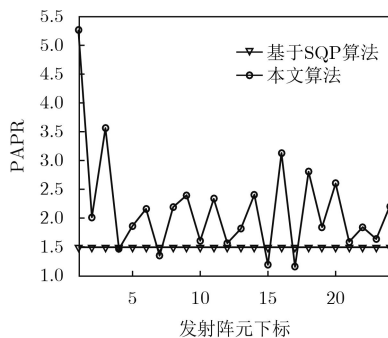


图9 各方法所设计波形的PAPR

配性能,进一步验证了所提算法的有效性。图9的仿真结果进一步验证了所提算法满足小的PAPR。

5 结论

本文提出一种基于原子范数的MIMO雷达发射波形设计方法。本文算法将原子范数的思想应用到MIMO发射波形设计中,由于发射滤波器组是从连续域中选取,避免了因离散误差引起的失真。而且本文算法仅需要设计发射滤波器组,所以本文算法的运算量低于现有基于发射波形相关矩阵设计和发射波形综合的波形设计方法的运算量。理论分析与仿真实验表明,本文算法满足等能量发射准则以及小的PAPR。同时,本文算法相比于现有算法有较低的运算量以及良好的匹配性能。

参考文献

- [1] XU Luzhou, LI Jian, and STOICA P. Target detection and parameter estimation for MIMO radar systems[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(3): 927–939. doi: [10.1109/TAES.2008.4655353](https://doi.org/10.1109/TAES.2008.4655353).
- [2] HAIMOVICH A M, BLUM R S, and CIMINI L J. MIMO radar with widely separated antennas[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(1): 116–129. doi: [10.1109/MSP.2008.4408448](https://doi.org/10.1109/MSP.2008.4408448).
- [3] LI Jian and STOICA P. MIMO radar with colocated antennas[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(5): 106–114. doi: [10.1109/MSP.2007.904812](https://doi.org/10.1109/MSP.2007.904812).
- [4] YANG Yang and BLUM R S. Minimax robust MIMO radar waveform design[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1(1): 147–155. doi: [10.1109/JSTSP.2007.897056](https://doi.org/10.1109/JSTSP.2007.897056).
- [5] FRIEDLANDER B. Waveform design for MIMO radars[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007, 43(3): 1227–1238. doi: [10.1109/TAES.2007.4383615](https://doi.org/10.1109/TAES.2007.4383615).
- [6] BEKKERMAN I and TABRIKIAN J. Target detection and localization using MIMO radars and sonars[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(10): 3873–3883. doi: [10.1109/TSP.2006.879267](https://doi.org/10.1109/TSP.2006.879267).
- [7] DENG Hai. Polyphase code design for orthogonal netted radar systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(11): 3126–3135. doi: [10.1109/TSP.2004.836530](https://doi.org/10.1109/TSP.2004.836530).
- [8] LI Hui, ZHAO Yongbo, CHENG Zengfei, et al. Correlated LFM waveform set design for MIMO radar transmit beampattern[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2017, 14(3): 329–333. doi: [10.1109/LGRS.2016.2639826](https://doi.org/10.1109/LGRS.2016.2639826).
- [9] FUHRMANN D R and ANTONIO G S. Transmit beamforming for MIMO radar systems using signal cross-correlation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(1): 171–186. doi: [10.1109/TAES.2008.4516997](https://doi.org/10.1109/TAES.2008.4516997).
- [10] LI Hui, ZHAO Yongbo, CHENG Zengfei, et al. Orthogonal frequency division multiplexing linear frequency modulation signal design with optimised pulse compression property of spatial synthesised signals[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2016, 10(7): 1319–1326. doi: [10.1049/iet-rsn.2015.0642](https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2015.0642).
- [11] LI Hui, ZHAO Yongbo, CHENG Zengfei, et al. OFDM chirp waveform diversity design with correlation interference suppression for MIMO radar[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2017, 14(7): 1032–1036. doi: [10.1109/LGRS.2017.2693681](https://doi.org/10.1109/LGRS.2017.2693681).
- [12] XU Haisheng, BLUM R S, WANG Jian, et al. Colocated MIMO radar waveform design for transmit beampattern formation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(2): 1558–1568. doi: [10.1109/TAES.2014.140249](https://doi.org/10.1109/TAES.2014.140249).
- [13] LIPOR J, AHMED S, and ALOUINI M S. Fourier-based transmit beampattern design using MIMO radar[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(9): 2226–2235. doi: [10.1109/TSP.2014.2307838](https://doi.org/10.1109/TSP.2014.2307838).
- [14] CHENG Zengfei, ZHAO Yongbo, LI Hui, et al. Sparse representation framework for MIMO radar transmit beampattern matching design[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, 53(1): 520–529. doi: [10.1109/TAES.2017.2650739](https://doi.org/10.1109/TAES.2017.2650739).

- [15] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306. doi: [10.1109/TIT.2006.871582](https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582).
- [16] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070–1081. doi: [10.3321/j.issn:0372-2112.2009.05.028](https://doi.org/10.3321/j.issn:0372-2112.2009.05.028).
SHI Guangming, LIU Danhua, GAO Dahua, *et al.* Advances in theory and application of compressed sensing[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2009, 37(5): 1070–1081. doi: [10.3321/j.issn:0372-2112.2009.05.028](https://doi.org/10.3321/j.issn:0372-2112.2009.05.028).
- [17] YANG Zai and XIE Lihua. On gridless sparse methods for multi-snapshot direction of arrival estimation[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2017, 36(8): 3370–3384. doi: [10.1007/s00034-016-0462-9](https://doi.org/10.1007/s00034-016-0462-9).
- [18] YANG Zai and XIE Lihua. Enhancing sparsity and resolution via reweighted atomic norm minimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(4): 995–1006. doi: [10.1109/TSP.2015.2493987](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2493987).
- [19] YANG Zai and XIE Lihua. Exact joint sparse frequency recovery via optimization methods[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(19): 5145–5157. doi: [10.1109/TSP.2016.2576422](https://doi.org/10.1109/TSP.2016.2576422).
- [20] 王剑书, 樊养余, 杜瑞, 等. 适用于二维阵列的无格稀疏波达方向估计算法[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(2): 447–454. doi: [10.11999/JEIT180340](https://doi.org/10.11999/JEIT180340).
WANG Jianshu, FAN Yangyu, DU Rui, *et al.* Gridless sparse method for direction of arrival estimation for two-dimensional array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(2): 447–454. doi: [10.11999/JEIT180340](https://doi.org/10.11999/JEIT180340).
- [21] STURM J F. Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones[J]. *Optimization Methods and Software*, 1999, 11(1/4): 625–653. doi: [10.1080/10556789908805766](https://doi.org/10.1080/10556789908805766).
- [22] RAO B D and HARI K V S. Performance analysis of root-music[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(12): 1939–1949. doi: [10.1109/29.45540](https://doi.org/10.1109/29.45540).
- 庞晓娇: 女, 1993年生, 博士生, 研究方向为压缩感知、阵列信号处理和MIMO雷达。
赵永波: 男, 1972年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为雷达信号处理、自适应信号处理和参数估计。
徐保庆: 男, 1992年生, 博士生, 研究方向为雷达信号处理、阵列信号处理和MIMO雷达。
曹成虎: 男, 1987年生, 博士生, 研究方向为雷达检测跟踪和阵列信号处理。
索之玲: 女, 1981年生, 博士生, 研究方向为雷达检测跟踪一体化。