

基于四阶累积量张量联合对角化的多数据集联合盲源分离

龚晓峰^{*①} 毛蕾^① 林秋华^① 徐友根^② 刘志文^②

^①(大连理工大学信息与通信工程学院 大连 116024)

^②(北京理工大学信息与电子学院 北京 100081)

摘要: 该文提出一种基于四阶累积量张量联合对角化的联合盲源分离(J-BSS)算法。首先通过计算4阶互累积量将多数据集信号的J-BSS问题转化为4阶张量联合对角化问题。接下来,基于雅可比连续旋转将张量联合对角化这类非线性优化问题,转化为一系列可获取闭式解的简单子优化问题,并通过交替迭代对多数据集混合矩阵进行更新,进而实现J-BSS。实验结果表明,所提算法具有良好的收敛性能,较之现有的同类型BSS及J-BSS算法具有更高的精度。此外,该算法在分离实际胎儿心电图信号方面也表现出良好的性能。

关键词: 联合盲源分离; 联合张量对角化; 4阶累积量

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)03-0509-07

DOI: 10.11999/JEIT180414

Joint Blind Source Separation Based on Joint Diagonalization of Fourth-order Cumulant Tensors

GONG Xiaofeng^① MAO Lei^① LIN Qiuhua^① XU Yougen^② LIU Zhiwen^②

^①(School of Information and Communication Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

^②(School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: A new Joint Blind Source Separation (J-BSS) algorithm is proposed based on joint diagonalization of fourth-order cumulant tensors. This algorithm constructs first a set of fourth-order tensors by computing the fourth-order cross cumulant of the multiset signals. Then, based on the Jacobian successive rotation strategy, the highly nonlinear optimization problem of joint tensor diagonalization is transformed into a series of simple sub-optimization problems, each admitting a closed form solution. The multiset mixing matrices are hence updated via alternating iterations, which diagonalize jointly the data tensors. Simulation results show that the proposed algorithm has nice convergence pattern and higher accuracy than existing BSS and J-BSS algorithms of a similar type. In addition, the algorithm works well in a real-world application to fetal ECG separation.

Key words: Joint Blind Source Separation (J-BSS); Joint Tensor Diagonalization (JTD); Fourth-order cumulant

1 引言

联合盲源分离(Joint Blind Source Separation, J-BSS)旨在仅已知多数据集观测信号的前提下,对其进行联合分离,在生物医学、通信、语音、阵列等领域获得了大量关注^[1],如脑电(EEG)与功能磁共振(fMRI)^[2,3]信号联合处理,多被试fMRI数据分

析^[4];多变换域观测联合处理等(如频域、时域、空域、统计域^[5-7])。由于利用了不同集合间的相关性及相异性,经J-BSS融合处理后的信息能够更全面地描述观测对象在多层次、多剖面、多模态意义下的特征,较之传统盲源分离技术^[8],在解乱序能力、分离精度和辨识性方面具有优势^[9]。

广义联合对角化(GJD)^[6,10,11]是一类重要的J-BSS方法,其研究最早可追溯至上世纪30年代的典范相关分析^[12]。这类方法通过互累积量运算,将多数据集信号转化为相互耦合,且具有可联合对角化结构的矩阵,并通过对该结构进行代数拟合来实现J-BSS。然而目前有关GJD的研究大多基于2阶互协方差。仅有的基于4阶互累积量的方法^[10],也只

收稿日期: 2018-05-03; 改回日期: 2018-10-11; 网络出版: 2018-10-31

*通信作者: 龚晓峰 xfgong@dlut.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61671106, 61871067), 国家自然科学基金重点项目(61331019)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61671106, 61871067, 61331019)

是考虑了其在矩阵层面的低阶结构,未能充分挖掘其高阶可联合对角化结构。此外,该方法并未对信号的时域特性(如非平稳性)加以利用。

为此,本文提出基于4阶累积量张量联合对角化的J-BSS方法,通过对多数据集信号在不同时间段计算4阶互累积量张量,并对之进行张量联合对角化,估计多数据集混合矩阵,进而实现多数据集信号的J-BSS。此外,本文提出一种基于雅克比连续旋转的张量联合对角化(JTD)算法。同文献[13]中提出的仅适用于单数据集BSS的张量对角化算法相比,本文算法考虑了加载矩阵不相等的情况,从而适用于J-BSS。同文献[14]中提出的非正交张量对角化算法相比,本文算法基于正交变换,在最小二乘意义下最优。

2 问题描述

考虑如下多数据集信号模型:

$$\mathbf{x}^{(m)}(t) = \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{s}^{(m)}(t), m = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}(t)^{(m)} \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{s}(t)^{(m)} \in \mathbb{C}^R$, $\mathbf{A}^{(m)} \in \mathbb{C}^{N \times R}$ 分别表示第 m 个数据集的观测信号,源信号及混合矩阵。参数 M, N, R 分别表示数据集个数、观测通道数及源信号个数。进一步,这里做如下假设:

- (1) 当 $r \neq u$ 时, $s_r^{(m)}(t)$ 和 $s_u^{(n)}(t)$ 统计独立。
- (2) 当 $r = u$ 时, $s_r^{(m)}(t)$ 和 $s_u^{(n)}(t)$ 统计相关。
- (3) 源信号为非高斯、非平稳信号。
- (4) 多数据集模型为正定的,即 $N \geq R$ 。

在上述假设中,假设(1)和假设(2)表明多数据集信号具有组间相关性和组内独立性,是现有的J-BSS方法中普遍用到的假设条件。假设(3)和假设(4)则表明本文方法适用于正定情况下,非高斯及非平稳信号的J-BSS。此外,为了叙述方便,本文的推导过程限定数据集数目 $M = 4$,对于 $M \neq 4$ 的情况,模型构造及算法步骤可类似获得,详见3.4节。

对4个数据集的观测信号分别进行预白化:记第 m 个数据集的白化矩阵为 $\mathbf{W}^{(m)} \in \mathbb{C}^{R \times N}$, $m = 1, 2, 3, 4$ 。则预白化处理后,第 m 个数据集的观测为

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{x}^{(m)}(t) = \mathbf{U}^{(m)} \mathbf{s}^{(m)}(t) \in \mathbb{C}^R \quad (2)$$

其中酉矩阵 $\mathbf{U}^{(m)} \triangleq \mathbf{W}^{(m)} \mathbf{A}^{(m)} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ 是预白化后第 m 个数据集的混合矩阵。在实际中,在假设(1)和假设(4)下, $\mathbf{W}^{(m)} \in \mathbb{C}^{R \times N}$ 可通过观测信号 $\mathbf{x}^{(m)}(t)$ 的2阶协方差矩阵的奇异值分解而获得^[10]。

预白化之后,构造一组4阶互累积量张量:

$$\mathcal{T}_k = \text{cum}(\mathbf{y}^{(1)}(t_k), \mathbf{y}^{(2)}(t_k), \mathbf{y}^{(3)}(t_k), \mathbf{y}^{(4)}(t_k)) \quad (3)$$

其中, $k=1, 2, \dots, K$, “cum(\cdot)” 用于计算互4阶累积量:

$$\begin{aligned} & (\text{cum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}))_{i,j,k,l} \\ & \triangleq E(a_i b_j^* c_k^* d_l) - E(a_i b_j^*) E(c_k^* d_l) \\ & \quad - E(a_i c_k^*) E(b_j^* d_l) \end{aligned} \quad (4)$$

其中,“E(\cdot)”代表数学期望,上标“*”表示共轭。由定义可知,每个张量 $\mathcal{T}_k \in \mathbb{C}^{R \times R \times R \times R}$ 为4组观测信号在时刻 t_k 的4阶互累积量张量, $k=1, 2, \dots, K$ 。

$$\mathcal{T}_k = \mathcal{D}_k \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)*} \times_3 \mathbf{U}^{(3)*} \times_4 \mathbf{U}^{(4)} \quad (5)$$

其中, \times_n 表示张量和矩阵的 n 模乘积, $n = 1, 2, \dots, 4$ 。以1模乘积为例,其定义如式(6)

$$(\mathcal{X} \times_1 \mathbf{A})_{j,i_2,i_3,i_4} \triangleq \sum_{i_1=1}^{I_1} x_{i_1,i_2,i_3,i_4} a_{j,i_1} \quad (6)$$

式(5)中 $\mathcal{D}_k = \text{cum}(\mathbf{s}^{(1)}(t_k), \mathbf{s}^{(2)}(t_k), \mathbf{s}^{(3)}(t_k), \mathbf{s}^{(4)}(t_k)) \in \mathbb{C}^{R \times R \times R \times R}$ 。由假设(1),假设(2)和假设(3)可知,每个张量 \mathcal{D}_k 均为超对角张量,即

$$(\mathcal{D}_k)_{r_1,r_2,r_3,r_4} \begin{cases} \neq 0, & r_1=r_2=r_3=r_4=r \\ =0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

定义 $\mathbf{U}^{(m)} \triangleq \mathbf{U}^{(m)} \mathbf{D}^{(m)} \mathbf{P}$, $m = 1, 2, 3, 4$, 其中 $\mathbf{D}^{(1)}, \mathbf{D}^{(2)}, \mathbf{D}^{(3)}, \mathbf{D}^{(4)} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ 为对角矩阵,且满足 $\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{D}^{(2)*} \mathbf{D}^{(3)*} \mathbf{D}^{(4)} = \mathbf{I}$, \mathbf{I} 为单位矩阵, $\mathbf{P} \in \mathbb{C}^{R \times R}$ 为排序矩阵。不难得知,若将式(5)中的 $\mathbf{U}^{(m)}$ 替换为 $\mathbf{U}^{(m)}$,等式依然成立。因此, $\mathbf{U}^{(m)}$ 在不考虑幅度模糊(由对角矩阵 $\mathbf{D}^{(m)}$ 表征)及顺序模糊(由排序矩阵 \mathbf{P} 表征)时,和混合矩阵 $\mathbf{U}^{(m)}$ 等价。J-BSS的目的,正是在不考虑上述两类平凡模糊的条件下,对混合矩阵进行辨识,进而分离源信号。同传统BSS有所不同,当 m 取不同值时,不同的 $\mathbf{U}^{(m)}$ 相对于真实混合矩阵 $\mathbf{U}^{(m)}$ 的排序矩阵 \mathbf{P} 是相同的,表明J-BSS所估计的混合矩阵及源信号,在顺序上自然对齐,这也是J-BSS相较于BSS的优势之一。

通过求解式(5),可获得混合矩阵 $\mathbf{U}^{(m)}$ 的估计值。为此,将在下一节提出一种基于雅克比迭代的4阶张量联合对角化算法。

3 张量联合对角化

3.1 优化准则

定义目标函数 λ' 为数据张量 \mathcal{T}_k 与拟合张量 $\mathcal{D}_k \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)*} \times_3 \mathbf{U}^{(3)*} \times_4 \mathbf{U}^{(4)}$ 间的均方误差:

$$\lambda' \triangleq \sum_{k=1}^K \|\mathcal{T}_k - \mathcal{D}_k \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)*} \times_3 \mathbf{U}^{(3)*} \times_4 \mathbf{U}^{(4)}\|_F^2,$$

其中 $\|\cdot\|_F$ 表示弗罗贝尼乌斯范数(Frobenius norm)。通过最小化 λ' , 可以计算混合矩阵在最小二乘意义下的最优估计值。由于 $\mathbf{U}^{(m)}$ 为酉矩阵, $m=1, 2, 3, 4$, 则根据酉变换的保范性,最小化 λ' 实质上等价于最大化式(8)的目标函数

$$\lambda \triangleq \sum_{k=1}^K \left\| \text{diag} \left(\mathcal{T}_k \times_1 \mathbf{U}^{(1)\text{H}} \times_2 \mathbf{U}^{(2)\text{T}} \times_3 \mathbf{U}^{(3)\text{T}} \times_4 \mathbf{U}^{(4)\text{H}} \right) \right\|_{\text{F}}^2 \quad (8)$$

其中, $\text{diag}(\cdot)$ 用于对其输入张量的非对角元置0。因此本文通过式(9)准则估计混合矩阵 $\mathbf{U}^{(m)}$ 。

$$\left(\tilde{\mathbf{U}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{U}}^{(2)}, \tilde{\mathbf{U}}^{(3)}, \tilde{\mathbf{U}}^{(4)} \right) = \arg \max_{\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}, \mathbf{U}^{(4)}} \lambda \quad (9)$$

其中, $\tilde{\mathbf{U}}^{(m)}$ 表示 $\mathbf{U}^{(m)}$ 的估计值, $m = 1, 2, 3, 4$ 。

3.2 雅克比迭代

本文算法采用雅克比迭代求解优化问题式(9)。具体而言, 记张量 \mathcal{T}_k 及混合矩阵 $\mathbf{U}^{(m)}$ 在前一次迭代的更新值分别为 $\tilde{\mathcal{T}}_{k,c}$ 和 $\tilde{\mathbf{U}}_p^{(m)}$, 其在当前迭代的更新值分别为 $\tilde{\mathcal{T}}_{k,c}$ 和 $\tilde{\mathbf{U}}_c^{(m)}$ 。每一次迭代通过Givens旋转矩阵 $\mathbf{G}_{i,j}^{(m)}$ 对 \mathcal{T}_k 和 $\mathbf{U}^{(m)}$ 进行更新, 即

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_c^{(m)} &= \tilde{\mathbf{U}}_p^{(m)} \mathbf{G}_{i,j}^{(m)} \\ \tilde{\mathcal{T}}_{k,c} &= \tilde{\mathcal{T}}_{k,p} \times_1 \mathbf{G}_{i,j}^{(1)\text{H}} \times_2 \mathbf{G}_{i,j}^{(2)\text{T}} \times_3 \mathbf{G}_{i,j}^{(3)\text{T}} \times_4 \mathbf{G}_{i,j}^{(4)\text{H}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{G}_{i,j}^{(m)}$ 除了 $(i, i), (i, j), (j, i), (j, j)$ 4个位置的元素不为0, 对角线元素为1之外, 其余位置皆为0。其在 $(i, i), (i, j), (j, i), (j, j)$ 4个位置的元素值为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{i,j}^{(m)}(i, i) & \mathbf{G}_{i,j}^{(m)}(j, i) \\ \mathbf{G}_{i,j}^{(m)}(i, j) & \mathbf{G}_{i,j}^{(m)}(j, j) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} c_{i,j}^{(m)} & s_{i,j}^{(m)} \\ -s_{i,j}^{(m)*} & c_{i,j}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中, $c_{i,j}^{(m)} = \cos \theta_{i,j}^{(m)}, s_{i,j}^{(m)} = e^{i\alpha_{i,j}^{(m)}} \sin \theta_{i,j}^{(m)}$, ‘i’为虚部单位。令坐标 i 从1取至 $R-1$, j 从 $i+1$ 取至 R , 对某一对固定的坐标值 (i, j) , 根据式(9)和式(10), $\mathbf{G}_{i,j}^{(m)}$ 的最优解通过求解式(12)优化问题获得, $m = 1, 2, 3, 4$ 。

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(1)}, \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(2)}, \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(3)}, \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(4)} \right) \\ &= \arg \max_{\mathbf{G}_{i,j}^{(1)}, \mathbf{G}_{i,j}^{(2)}, \mathbf{G}_{i,j}^{(3)}, \mathbf{G}_{i,j}^{(4)}} \sum_{k=1}^K \left\| \text{diag} \left(\tilde{\mathcal{T}}_{k,p} \times_1 \mathbf{G}_{i,j}^{(1)\text{H}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times_2 \mathbf{G}_{i,j}^{(2)\text{T}} \times_3 \mathbf{G}_{i,j}^{(3)\text{T}} \times_4 \mathbf{G}_{i,j}^{(4)\text{H}} \right) \right\|_{\text{F}}^2 \quad (12) \end{aligned}$$

获得 $\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(m)}$ 后, 按照式(10)更新 \mathcal{T}_k 和 $\mathbf{U}^{(m)}$ 。坐标 (i, j) 遍历所有取值时所包含的全部迭代的集合称为一次扫描(Sweep)。若一次扫描过后算法仍未收敛, 则按照上述步骤进行下一次扫描, 直至收敛。

综上, 雅克比迭代将优化问题式(9)化解为一系列子优化问题式(12)。由于每个Givens旋转矩阵仅有两个未知参数, 其最优解有望具有简单闭式解

形式。接下来将推导每一步迭代中 $\mathbf{G}_{i,j}^{(m)}$ 的闭式最优解。

3.3 雅克比旋转矩阵的闭式最优解

根据雅克比旋转矩阵的性质, 酉变换 $\tilde{\mathcal{T}}_{k,c} = \tilde{\mathcal{T}}_{k,p} \times_1 \mathbf{G}_{i,j}^{(1)\text{H}} \times_2 \mathbf{G}_{i,j}^{(2)\text{T}} \times_3 \mathbf{G}_{i,j}^{(3)\text{T}} \times_4 \mathbf{G}_{i,j}^{(4)\text{H}}$ 仅改变张量 $\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}$ 的下述8个子张量的取值: $\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}(i, :, :, :), \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}(j, :, :, :), \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}(:, i, :, :), \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}(:, j, :, :), \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}(:, :, i, :), \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}(:, :, j, :), \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}(:, :, :, i), \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}(:, :, :, j)$ 。这里采用Matlab符号来表示 $\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}$ 的子张量, 如 $\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}(i, :, :, :)$ 表示固定张量 $\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}$ 的第1个索引值为 i 时所获得的子张量。易知, 最大化张量 $\tilde{\mathcal{T}}_{k,c} = \tilde{\mathcal{T}}_{k,p} \times_1 \mathbf{G}_{i,j}^{(1)\text{H}} \times_2 \mathbf{G}_{i,j}^{(2)\text{T}} \times_3 \mathbf{G}_{i,j}^{(3)\text{T}} \times_4 \mathbf{G}_{i,j}^{(4)\text{H}}$ 超对角元素的范数平方和, 等价于最大化上述8个子张量相交所构成的大小为 $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 的子张量超对角元素范数平方和。因此, 优化准则式(12)可改写为

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(1)}, \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(2)}, \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(3)}, \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(4)} \right) \\ &= \arg \max_{\mathbf{G}_{i,j}^{(1)}, \mathbf{G}_{i,j}^{(2)}, \mathbf{G}_{i,j}^{(3)}, \mathbf{G}_{i,j}^{(4)}} \sum_{k=1}^K \left(\left| \tilde{\mathcal{T}}_{k,c}(i, i, i, i) \right|^2 \right. \\ & \quad \left. + \left| \tilde{\mathcal{T}}_{k,c}(j, j, j, j) \right|^2 \right) \quad (13) \end{aligned}$$

为了进一步简化优化过程, 用式(14)来代替式(13), 用于交替更新 $\mathbf{G}_{i,j}^{(m)}, m = 1, 2, 3, 4$ 。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(m)} &= \arg \max_{\mathbf{G}_{i,j}^{(m)}} \sum_{k=1}^K \left(\left| \left(\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(m-1)} \times_m \mathbf{G}_{i,j}^{(m)\text{H}} \right) (i, i, i, i) \right|^2 \right. \\ & \quad \left. + \left| \left(\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(m-1)} \times_m \mathbf{G}_{i,j}^{(m)\text{H}} \right) (j, j, j, j) \right|^2 \right) \quad (14) \end{aligned}$$

其中, $\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(m)} \triangleq \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(m-1)} \times_m \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(m)\text{T}}, \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)} \triangleq \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}, \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(4)} \triangleq \tilde{\mathcal{T}}_{k,c}$ 。接下来以 $\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(1)}$ 为例, 解释式(14)的求解步骤。首先根据定义可知

$$\left. \begin{aligned} \left(\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)} \times_1 \mathbf{G}_{i,j}^{(1)\text{H}} \right) (i, i, i, i) &= \mathbf{u}_{i,j}^{(1)\text{T}} \mathbf{m}_{k,i,j} \\ \left(\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)} \times_1 \mathbf{G}_{i,j}^{(1)\text{H}} \right) (j, j, j, j) &= \mathbf{u}_{i,j}^{(1)\text{T}} \mathbf{q}_{k,i,j} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中, $\mathbf{u}_{i,j}^{(1)} \triangleq \left[\cos \theta_{i,j}^{(1)}, \cos \alpha_{i,j}^{(1)} \sin \theta_{i,j}^{(1)}, \sin \alpha_{i,j}^{(1)} \sin \theta_{i,j}^{(1)} \right]^{\text{T}}$,

$$\mathbf{m}_{k,i,j} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)}(i, i, i, i) \\ -\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)}(j, i, i, i) \\ -i\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)}(j, i, i, i) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_{k,i,j} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)}(j, j, j, j) \\ \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)}(i, j, j, j) \\ -i\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)}(i, j, j, j) \end{bmatrix}.$$

根据式(15)有

$$\sum_{k=1}^K \left(\left| \left(\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)} \times_1 \mathbf{G}_{i,j}^{(1)H} \right) (i, i, i, i) \right|^2 + \left| \left(\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)} \times_1 \mathbf{G}_{i,j}^{(1)H} \right) (j, j, j, j) \right|^2 \right) = \mathbf{u}_{i,j}^{(1)T} \mathbf{M}_{i,j} \mathbf{M}_{i,j}^H \mathbf{u}_{i,j}^{(1)} \quad (16)$$

其中, $\mathbf{M}_{i,j} = [\mathbf{m}_{1,i,j}, \dots, \mathbf{m}_{K,i,j}, \mathbf{q}_{1,i,j}, \dots, \mathbf{q}_{K,i,j}] \in \mathbb{C}^{3 \times 2K}$.

上述推导表明, 对式(16)进行最大化时, $\mathbf{u}_{i,j}^{(1)}$ 对应于矩阵 $\mathbf{M}_{i,j} \mathbf{M}_{i,j}^H$ 的主特征向量, 记 $\mathbf{u}_{i,j}^{(1)}$ 的估计值为 $\tilde{\mathbf{u}}_{i,j}^{(1)}$, 则有 $\tilde{c}_{i,j}^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}_{i,j}^{(1)}(1)$, $\tilde{s}_{i,j}^{(1)} = \tilde{\mathbf{u}}_{i,j}^{(1)}(2) + i\tilde{\mathbf{u}}_{i,j}^{(1)}(3)$, 进而可由式(12)获得 $\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(1)}$. 接下来, 进行更新 $\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(1)} \triangleq \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)} \times_1 \tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(1)H}$, 并按照与求解 $\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(1)}$ 类似的步骤获得 $\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(2)}$. 类似可计算获得 $\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(3)}$ 和 $\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(4)}$.

3.4 讨论与注释

讨论 1 上述推导假设J-BSS问题为复值, 当J-BSS问题为实值时, 算法步骤类似. 主要区别在于实值雅克比旋转矩阵在 $(i, i), (i, j), (j, i), (j, j)$ 4个位置的元素值定义为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{i,j}^{(m)}(i, i) & \mathbf{G}_{i,j}^{(m)}(j, i) \\ \mathbf{G}_{i,j}^{(m)}(i, j) & \mathbf{G}_{i,j}^{(m)}(j, j) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \cos \theta_{i,j}^{(m)} & \sin \theta_{i,j}^{(m)} \\ -\sin \theta_{i,j}^{(m)} & \cos \theta_{i,j}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

且式(15)中 $\mathbf{u}_{i,j}^{(1)}, \mathbf{m}_{k,i,j}, \mathbf{q}_{k,i,j}$ 的表达式由式(18)给出:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}^{(1)} &\triangleq [\cos \theta_{i,j}^{(1)}, \sin \theta_{i,j}^{(1)}]^T \\ \mathbf{m}_{k,i,j} &\triangleq [\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)}(i, i, i, i), -\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)}(j, i, i, i)]^T \\ \mathbf{q}_{k,i,j} &\triangleq [\tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)}(j, j, j, j), \tilde{\mathcal{T}}_{k,p}^{(0)}(i, j, j, j)]^T \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

讨论 2 若 $M \neq 4$, 本文算法经简单修改后仍然适用. 具体而言, 当 $M < 4$ 时, 如 $M=3$, 只需将4阶累积量张量的构造表达式(3)改写为 $\mathcal{T}_k = \text{cum}(\mathbf{y}^{(1)}(t_k), \mathbf{y}^{(2)}(t_k), \mathbf{y}^{(3)}(t_k), \mathbf{y}^{(1)}(t_k))$, $k=1, 2, \dots, K$, 对其按照本文算法进行联合对角化可获得3个数据集混合矩阵的估计值. 而当 $M > 4$ 时, 如 $M=5$, 可选取其中任意4个数据集的观测信号构造多个4阶张量, 如可构造如下两组4阶张量: $\mathcal{T}'_k = \text{cum}(\mathbf{y}^{(1)}(t_k), \mathbf{y}^{(2)}(t_k), \mathbf{y}^{(3)}(t_k), \mathbf{y}^{(4)}(t_k))$, $\mathcal{T}''_k = \text{cum}(\mathbf{y}^{(2)}(t_k), \mathbf{y}^{(3)}(t_k), \mathbf{y}^{(4)}(t_k), \mathbf{y}^{(5)}(t_k))$, $k=1, 2, \dots, K$. 应用本文算法对 $\{\mathcal{T}'_k, k=1, 2, \dots, K\}$ 进行张量联合对角化可获得混合矩阵 $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}, \mathbf{U}^{(4)}$ 的估计值. 进一步, 对于张量 $\{\mathcal{T}''_k, k=1, 2, \dots, K\}$ 而言, 由于其因子矩阵 $\mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}, \mathbf{U}^{(4)}$ 已经求得, 可通过求解简单的线性最小二乘问题获得 $\mathbf{U}^{(5)}$ 的估计值.

讨论 3 以文中考虑的 $M=4$ 的情况为例(其余情况下结论类似), 本文算法每一次扫描所需的浮点乘法数量为 $0.5R(R-1)[4(18K+162)+16R+$

$16KR^3] \approx \mathcal{O}(8KR^5)$. 较之2阶的广义正交联合对角化算法^[10], 本文算法运算量随源信号数 R 的增加上升显著. 这是因为该算法主要拟合4阶累积量的高阶超对角结构, 对高阶张量结构的利用更为充分, 计算也更为复杂. 带来的好处是其优异的收敛性能, 及对非高斯信号良好的联合分离精度(详见仿真4.1节和4.2节). 在实际中, 若确有需要对 R 较大时的J-BSS, 可采用并行加速机制^[15], 将原本顺序进行的 $R(R-1)/2$ 次连续旋转转换为并行执行, 从而加快算法运算速度.

本文算法步骤如表1所示.

表 1 基于雅克比旋转的四阶张量联合对角化算法

输入: K 个满足式(5)的张量 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_K \in \mathbb{C}^{R \times R \times R \times R}$.

对因子矩阵进行初始化, 进行如下步骤, 直至收敛.

令 i 从 1 至 $R-1$ 变化, j 从 $i+1$ 至 R 变化, 对固定索引 (i, j) :

(1) 根据式(16), 计算矩阵 $\tilde{\mathbf{G}}_{i,j}^{(m)}$, $m=1, 2, 3, 4$;

(2) 根据式(10), 更新矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}^{(m)}$ 及 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_K$.

输出: 4个因子矩阵估计值 $\tilde{\mathbf{U}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{U}}^{(2)}, \tilde{\mathbf{U}}^{(3)}, \tilde{\mathbf{U}}^{(4)}$.

4 实验结果

本节通过3组实验展示所提出的张量联合对角化算法(Joint Tensor Diagonalization, JTD)的性能. 所有实验结果是在一台笔记本电脑上运行获得的, 其配置如下: Intel Core i7-4930MX CPU @ 3.00 GHz 3.20 GHz; 32 GB内存; 64 bit Windows 10操作系统; Matlab R2016a.

4.1 无噪声条件下JTD算法的收敛性仿真

随机生成 K 个尺寸为 $R \times R \times R \times R$ 的超对角张量 \mathcal{D}_k , $k=1, 2, \dots, K$. 随机生成4个尺寸为 $R \times R$ 的矩阵, 并对之进行正交化以构造酉矩阵 $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}, \mathbf{U}^{(4)}$. 由上述生成的矩阵 $\mathcal{D}_k, \mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}, \mathbf{U}^{(4)}$, 按照式(5)直接构造目标张量 \mathcal{T}_k .

通过式(19)定义的性能指标(Performance Index, PI)对算法进行评价:

$$\text{PI}(\mathbf{Z}^{(m)}) = \frac{1}{2R(R-1)} \left[\sum_{i=1}^R \left(\sum_{j=1}^R \frac{|\mathbf{Z}^{(m)}(i, j)|}{\max_k |\mathbf{Z}^{(m)}(i, k)|} - 1 \right) + \sum_{i=1}^R \left(\sum_{j=1}^R \frac{|\mathbf{Z}^{(m)}(j, i)|}{\max_k |\mathbf{Z}^{(m)}(k, i)|} - 1 \right) \right] \quad (19)$$

其中, $\mathbf{Z}^{(m)} \triangleq \tilde{\mathbf{U}}^{(m)H} \mathbf{U}^{(m)} \in \mathbb{C}^{R \times R}$. 对结果分别计算其PI之后, 再进行平均(A-PI), 作为算法性能指标.

图1绘制了 N 和 K 取不同值时JTD和GOJD算法(其数据矩阵由 \mathcal{T}_k 固定后3维索引获得^[10])在10次独立实验中的A-PI随扫描次数的变化曲线。可以看

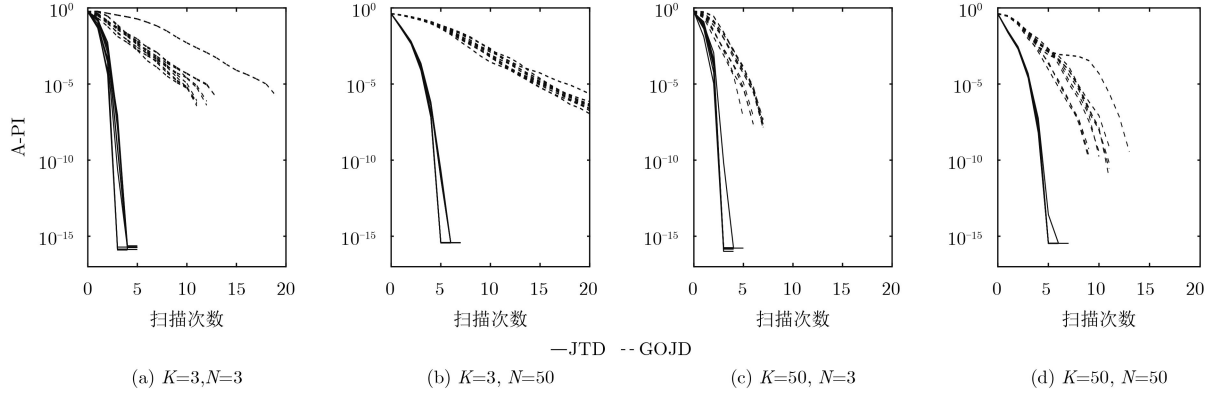


图1 无噪声下JTD和GOJD的A-PI值随扫描次数的变化曲线

4.2 计算机生成信号的J-BSS仿真

本实验中, 根据式(1)产生4组观测信号:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(m)}(t) = & \sigma_s \left\| \mathbf{A}^{(m)} \mathbf{s}^{(m)}(t) \right\|_{\text{F}}^{-1} \left(\mathbf{A}^{(m)} \mathbf{s}^{(m)}(t) \right) \\ & + \sigma_n \left\| \mathbf{n}^{(m)}(t) \right\|_{\text{F}}^{-1} \left(\mathbf{n}^{(m)}(t) \right), \end{aligned} \quad (20)$$

$m=1, 2, 3, 4$

其中, 混合矩阵 $\mathbf{A}^{(m)} \in \mathbb{C}^{N \times R}$ 由程序随机产生, 噪声项 $\mathbf{n}^{(m)}(t) \in \mathbb{C}^{N \times T}$ 为零均值单位方差的高斯白噪声。为了确保生成信号满足组间相关性(假设2), 参照文献[6,9]的仿真实验中源信号的产生方式, 即

$$\mathbf{s}_r(t) = \mathbf{Q}_r \mathbf{s}'_r(t) \quad (21)$$

其中, $\mathbf{s}_r(t) \triangleq [s_r^{(1)}(t), s_r^{(2)}(t), s_r^{(3)}(t), s_r^{(4)}(t)]^T \in \mathbb{C}^4$ 包含不同数据集中索引值为 r 的源信号, 生成信号矢量 $\mathbf{s}'_r(t) \in \mathbb{C}^4$ 为分段调幅的随机相位信号, 其相位及调幅系数随机产生。矩阵 $\mathbf{Q}_r \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ 由程序随机产生, 用于引入集间相关性。式(20)中 σ_s 和 σ_n 分别代表信号和噪声强度。信噪比定义为 $\text{SNR} \triangleq 20 \lg \sigma_s / \sigma_n$ 。

用本文算法对上述多数据集信号进行联合分离, 并和下述同类型BSS及J-BSS算法进行对比: JADE算法^[16]; STOTD算法^[13]; MCCA算法^[17]; GOJD算法^[10]。其中JADE和STOTD为基于4阶累积量的BSS算法, 在实验中分别作用于每一个数据集。MCCA和GOJD为J-BSS算法, 在基于GOJD的J-BSS方法中, 分别采用了基于4阶累积量和2阶协方差的算法, 分别记为GOJD4和GOJD2。

本实验用采样4阶互累积量作为式(3)所定义的4阶互累积量的估计值, 其计算公式为

到, 本文提出的JTD算法呈现单调下降、线性收敛的收敛模式。同GOJD相比, JTD算法平均5次扫描即能达到收敛, 具有更优的收敛性能。

$$\begin{aligned} & (\mathcal{T}_k)_{r,s,u,v} \\ & \triangleq L^{-1} \sum_{l=1}^L \left(\mathbf{Y}_k^{(1)} \right)_{r,l} \left(\mathbf{Y}_k^{(2)} \right)_{s,l}^* \left(\mathbf{Y}_k^{(3)} \right)_{u,l}^* \left(\mathbf{Y}_k^{(4)} \right)_{v,l} \\ & - L^{-2} \sum_{l=1}^L \left(\mathbf{Y}_k^{(1)} \right)_{r,l} \left(\mathbf{Y}_k^{(2)} \right)_{s,l}^* \sum_{g=1}^L \left(\mathbf{Y}_k^{(3)} \right)_{u,g}^* \left(\mathbf{Y}_k^{(4)} \right)_{v,g} \\ & - L^{-2} \sum_{l=1}^L \left(\mathbf{Y}_k^{(1)} \right)_{r,l} \left(\mathbf{Y}_k^{(3)} \right)_{s,l}^* \sum_{g=1}^L \left(\mathbf{Y}_k^{(2)} \right)_{u,g}^* \left(\mathbf{Y}_k^{(4)} \right)_{v,g} \end{aligned} \quad (22)$$

其中, $\mathbf{Y}_k^{(m)} \in \mathbb{C}^{N \times L}$ 表示预白化以后观测信号在时间维度上的第 k 个分段, $m = 1, 2, 3, 4$ 。分段长度为 L , 相邻段之间的重叠率 $\alpha \in [0, 1)$ 。

本实验固定 $N=10$, $R=5$, A-PI曲线中的每个点由200次蒙特卡洛独立实验平均获得。首先, 固定时间采样点数 $T=100000$, $L=T/10$, $\alpha=0.3$ 。令SNR从0 dB变化至10 dB。然后固定SNR=5 dB, 令 T 由20000变化至100000。结果如图2所示。

可以看到, 本文算法性能优于除GOJD2之外的其它算法。同GOJD2相比, 图2(a)表明在SNR为2~8 dB时JTD分离精度更高。图2(b)则表明当快拍数较高时, 本文算法精度更高, 反之则GOJD2稍具优势。这是因为GOJD2所采用的2阶协方差具有更小的估计误差。此外, 同BSS, JADE和STOTD相比, 除了观察到本文算法精度更优之外, 还观察到由本文算法获得的源信号估计结果在不同数据集间是对齐的。而JADE和STOTD的结果在不同数据集间没有对齐。这是因为本文算法利用了数据集的组间相关性。而BSS算法没有利用此性质。

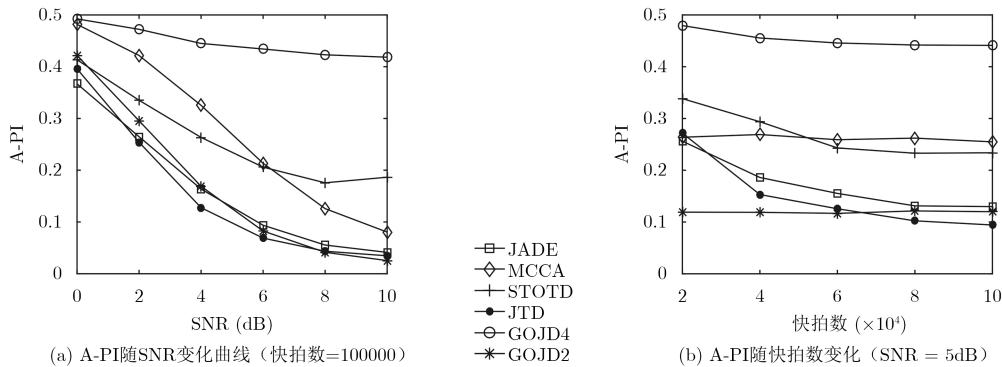


图2 本文算法和同类型算法在分离计算机合成信号时的性能对比

4.3 实际胎儿心电信号的盲分离

实验采用的ECG信号取自鲁汶大学的DAISY数据库^[16]。采样频率为250 Hz，采样点数为2500，采样时间是10 s。相邻编号的信号所对应传感器空间位置也相邻^[18]。由于母体心电信号(MECG)及胎儿心电信号(FECG)信号本质上是多维源，兼具组间相关性和组内独立性^[19,20]。可对观测信号进行分组，并采用J-BSS进行处理^[6,10]。本实验将相邻编号的 R 路信号归入同一个数据集^[10]： $\mathbf{x}^{(m)}(t) \triangleq [x_m(t), x_{m+1}(t), \dots, x_{m+R-1}(t)]^T \in \mathbb{R}^N$, $m=1, 2, \dots$,

$9-R$ 。由上式可知，数据集划分方式主要取决于 M 和 R 的取值，这里考虑下述两种情况：(1) $M=4$, $R=5$ ^[6]；(2) $M=5$, $R=4$ ^[10]。参数的选择原则为：(1)令数据集数目 $M=9-R \geq 3$ 以使MECG和FECG子空间维度约为3^[18]；(2)本文算法能够辨识的最大源信号数 $P=RM=9R-R^2$ ，越大越好。实验结果如图3所示。可以看出，两种分组下本文算法均能正确分离MECG和FECG信号。此外，两种分组下本文算法迭代次数分别为9次和7次，运行时间分别为0.791 s和0.751 s，表明本文算法处理此类信号时具有较高的效率。

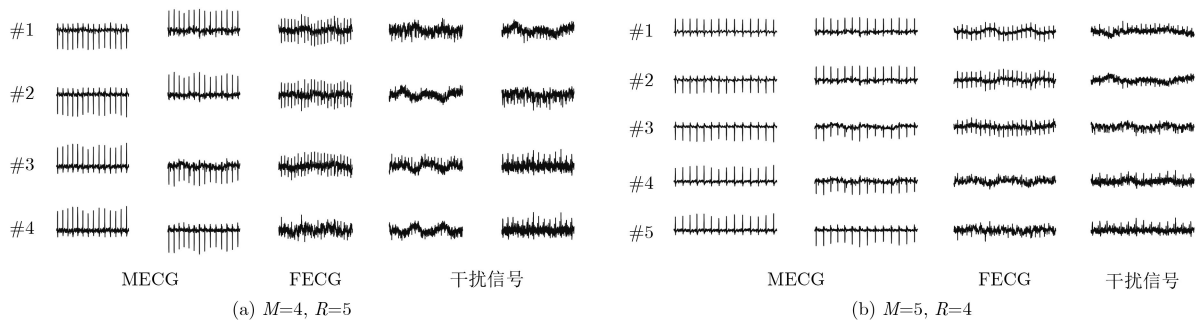


图3 实际FECG信号分离实验结果

5 结论

本文提出一种基于张量联合对角化的多数据集J-BSS算法。首先对预白化后的多数据集信号计算4阶互累积量，由于观测信号所具有的组间相关性和组内独立性，可通过对4阶互累积量进行张量联合对角化(JTD)来实现J-BSS。为此本文提出一种基于雅克比旋转的JTD算法，将张量联合对角化问题化解为一系列Givens矩阵的子优化问题，通过闭式求解每一个子优化问题完成张量对角化。实验结果揭示了本文算法较之同类型的J-BSS算法在收敛能力及精度方面所具有的优势，及较之同类型BSS算法在精度及解乱序能力方面所具有的更好性能。此外，实际FECG信号分离结果表明，本文算法能够较好地分离实际问题中的多数据集信号。

参考文献

- [1] LAHAT D, ADALI T, and JUTTEN C. Multimodal data fusion: An overview of methods, challenges, and prospects[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2015, 103(9): 1449–1477. doi: 10.1109/JPROC.2015.2460697.
 - [2] STEYRL D, KRAUSZ G, KOSCHUTNIG K, et al. Reference Layer Adaptive Filtering (RLAF) for EEG artifact reduction in simultaneous EEG-fMRI[J]. *Journal of Neural Engineering*, 2017, 14(2): 026003. doi: 10.1088/1741-2552/14/2/026003.
 - [3] 陈强, 陈勋, 余凤琼. 基于独立向量分析的脑电信号中肌电伪迹的去除方法[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(11): 2840–2847. doi: 10.11999/JEIT160209.
- CHEN Qiang, CHEN Xun, and YU Fengqiong. Removal of muscle artifact from EEG data based on independent vector

- analysis[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(11): 2840–2847. doi: [10.11999/JEIT160209](https://doi.org/10.11999/JEIT160209).
- [4] KUANG Lidan, LIN Qiuhua, GONG Xiaofeng, *et al.* Adaptive independent vector analysis for multi-subject complex-valued fMRI data[J]. *Journal of Neuroscience Methods*, 2017, 281: 49–63. doi: [10.1016/j.jneumeth.2017.01.017](https://doi.org/10.1016/j.jneumeth.2017.01.017).
- [5] 付卫红, 张琮. 基于步长自适应的独立向量分析卷积盲分离算法[J]. *电子与信息学报*, 2018, 40(9): 2158–2164. doi: [10.11999/JEIT171156](https://doi.org/10.11999/JEIT171156).
- FU Weihong and ZHANG Cong. Independent vector analysis convolutive blind separation algorithm based on step-size adaptive[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(9): 2158–2164. doi: [10.11999/JEIT171156](https://doi.org/10.11999/JEIT171156).
- [6] GONG Xiaofeng, WANG Xiulin, and LIN Qiuhua. Generalized non-orthogonal joint diagonalization with LU decomposition and successive rotations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(5): 1322–1334. doi: [10.1109/TSP.2015.2391074](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2391074).
- [7] XING Ling, MA Qiang, and ZHU Min. Tensor semantic model for an audio classification system[J]. *Science China (Information Sciences)*, 2013, 56(6): 1–9. doi: [10.1007/s11432-013-4821-x](https://doi.org/10.1007/s11432-013-4821-x).
- [8] COMON P and JUTTEN C. *Handbook of Blind Source Separation: Independent Component Analysis and Applications*[M]. Kidlington, UK Academic Press, Inc., 2010. doi: [org/10.1016/C2009-0-19334-0](https://doi.org/org/10.1016/C2009-0-19334-0).
- [9] GONG Xiaofeng, LIN Qiuhua, CONG Fengyu, *et al.* Double coupled canonical polyadic decomposition for joint blind source separation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(13): 3475–3490. doi: [10.1109/TSP.2018.2830317](https://doi.org/10.1109/TSP.2018.2830317).
- [10] LI Xilin, ADALI T, and ANDERSON M. Joint blind source separation by generalized joint diagonalization of cumulant matrices[J]. *Signal Processing*, 2011, 91(10): 2314–2322. doi: [10.1016/j.sigpro.2011.04.016](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2011.04.016).
- [11] MIAO Jifei, CHENG Guanghui, CAI Yufeng, *et al.* Approximate joint singular value decomposition algorithm based on Givens-like rotation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2018, 25(5): 620–624. doi: [10.1109/LSP.2018.2815584](https://doi.org/10.1109/LSP.2018.2815584).
- [12] HAROLD H. Relations between two sets of variates[J]. *Biometrika*, 1936, 28(3/4): 321–377. doi: [10.2307/2333955](https://doi.org/10.2307/2333955).
- [13] DE LATHAUWER L, DE MOOR B, and VANDEWALLE J. Independent component analysis and (simultaneous) third-order tensor diagonalization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(10): 2262–2271. doi: [10.1109/78.950782](https://doi.org/10.1109/78.950782).
- [14] LIU Yingliang, GONG Xiaofeng, and LIN Qiuhua. Non-orthogonal tensor diagonalization based on successive rotations and LU decomposition[C]. *IEEE International Conference on Natural Computation*. Zhangjiajie, China, 2015: 102–107. doi: [10.1109/ICNC.2015.7377973](https://doi.org/10.1109/ICNC.2015.7377973).
- [15] WANG Xiulin, GONG Xiaofeng, LIN Qiuhua. A study on parallelization of successive rotation based joint diagonalization[C]. *International Conference on Digital Signal Processing*. Hong Kong, China, 2014: 1–5. doi: [10.1109/ICDSP.2014.6900778](https://doi.org/10.1109/ICDSP.2014.6900778).
- [16] CARDOSO J F and SOULOUMIAC A. Blind beamforming for non-Gaussian signals[J]. *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, 1993, 140(6): 362–370. doi: [10.1049/ip-f-2.1993.0054](https://doi.org/10.1049/ip-f-2.1993.0054).
- [17] LI Yiou, ADALI T, and WANG Wei, *et al.* Joint blind source separation by multiset canonical correlation analysis[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(10): 3918–3929. doi: [10.1109/TSP.2009.2021636](https://doi.org/10.1109/TSP.2009.2021636).
- [18] MOOR D. Database for the identification of systems (DaISy) [OL]. <http://www.esat.kuleuven.ac.be/sista/daisy>, 2010.
- [19] DE LATHAUWER L, DE MOOR B, and VANDEWALLE J. Fetal electrocardiogram extraction by blind source subspace separation[J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2000, 47(5): 567–572. doi: [10.1109/78.950782](https://doi.org/10.1109/78.950782).
- [20] CARDOSO J F. Multidimensional independent component analysis[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Seattle, USA, 1998: 1941–1944. doi: [10.1109/ICASSP.1998.681443](https://doi.org/10.1109/ICASSP.1998.681443).
- 龚晓峰: 男, 1981年生, 副教授, 研究方向为盲信号处理、阵列信号处理。
- 毛 蕾: 女, 1991年生, 硕士生, 研究方向为盲信号处理。
- 林秋华: 女, 1970年生, 教授, 研究方向为盲信号处理及其应用。
- 徐友根: 男, 1975年生, 教授, 研究方向为阵列信号处理及其应用。
- 刘志文: 男, 1962年生, 教授, 研究方向为数字信号与图像处理及应用, 嵌入式系统开发及应用, 生物医学信息获取与处理。