

# 一种改进的变步长常数模算法

高丽娟 赵洪利 蒋太杰  
(装备指挥技术学院 北京 101416)

**摘要:** 常数模算法是一种最为常用的盲均衡算法, 普遍应用于恒包络信号和非恒包络信号的均衡, 但存在收敛速度慢和剩余误差大的缺点。在深入研究常数模算法的基础上, 该文提出一种改进的变步长算法, 对其性能进行了理论分析, 并对二值序列以及正交幅度调制信号进行了仿真。理论分析和仿真结果表明: 该算法具有收敛速度快、剩余误差小的特点。

**关键词:** 盲均衡; 常数模算法; 权向量; 步长; 剩余误差

中图分类号: TN911.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)02-0283-04

## A Modified Variable Step Size Constant Modulus Algorithm

Gao Li-juan Zhao Hong-li Jiang Tai-jie

(Institute of Command and Technology of Equipment, Beijing 101416, China)

**Abstract:** Constant modulus algorithm is a most popular algorithm and is widely used for blind equalization of non-constant envelope signals and constant envelope signals. But it exhibits very slow convergence speed and large residual error. A modified variable step size algorithm is proposed based on constant modulus algorithm. Its theoretical analysis is made and it is simulated with binary sequence and quadrature amplitude modulation signals. Theoretical analysis and simulation results show that it has the characteristics of fast convergence speed and small residual error.

**Key words:** Blind equalization; Constant modulus algorithm; Weight vector; Step; Residual error

### 1 引言

在现有的有限带宽通信系统中, 通信信道的失真和畸变所引起的码间串扰是影响通信质量的主要因素。在有线和无线传输信道的接收端主要采用自适应均衡器来抑制码间串扰。在各种盲均衡算法中, 由Godard和Treichler等人分别独立提出的常数模算法(Constant Modulus Algorithm, CMA), 由于计算量小, 能够适应一般的数字通信系统, 已经广泛应用于多种数字传输系统<sup>[1]</sup>。通过研究发现常数模算法具有收敛速度慢、收敛性能差以及稳态剩余误差较大<sup>[2]</sup>等缺点, 因此, 它的一个发展方向是进一步改进现有的算法, 以提高其收敛速度, 并使其改进后的性能更加稳定<sup>[3]</sup>。

目前, 盲均衡研究的热点主要是对各种算法性能的分析, 算法的改进等, 从而使算法取得更加广泛的应用。影响盲均衡算法性能的因素主要有: 代价函数、均衡器权向量的迭代以及迭代步长, 因此, 对盲均衡算法的改进一般从这三方面考虑。本文从均衡器权向量的迭代以及步长两个方面对常数模算法进行了改进, 提出了一种新的改进算法, 并对改进前后两种算法的性能进行了分析和仿真。

### 2 改进的变步长常数模算法

一个简单的盲均衡原理框图如图 1 所示。其中,  $a_k$  表示

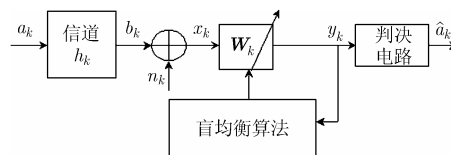


图 1 简单的盲均衡原理框图

传输信号,  $h_k$  表示信道的冲激响应,  $n_k$  是噪声序列,  $x_k$  和  $y_k$  分别表示均衡器的输入和输出,  $\hat{a}_k$  表示判决电路的输出。 $\mathbf{W}_k = [w_{0/k} \ w_{1/k} \ \dots \ w_{(L-1)/k}]^T$  表示均衡器的权向量,  $\mathbf{X}_k^T = [x_k \ x_{k-1} \ \dots \ x_{k-L+1}]$  表示均衡器的输入向量。

由图 1 有: 
$$x_k = \sum_{i=0}^{N-1} h_i a_{k-i} + n_k, \quad y_k = \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k。$$

常数模算法的代价函数为  $D^{(2)} = (1/4)E\{(|y_k|^2 - R_2)^2\}$ ,  $R_2 = \frac{E\{|a_k|^4\}}{E\{|a_k|^2\}}$ 。

权向量迭代公式为  $\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \mu y_k (|y_k|^2 - R_2) \mathbf{X}_k^*$  ( $\mu$  为步长, \*表示共轭)。

误差函数为  $e_k = y_k (|y_k|^2 - R_2) = y_k |y_k|^{p-2} (|y_k|^p - R_p)$ , 其中,  $R_p = \frac{E\{|a_k|^{2p}\}}{E\{|a_k|^p\}}$ ,  $p=2$ 。

在常数模算法中使用了输入信号的高阶统计量, 使得其理论分析过程较为困难, 同时当均衡器收敛到最佳点后, 仍存在较大的稳态剩余误差。因此, 将误差函数进行修改, 令

$p=1$ , 改变对信号高阶统计量的使用<sup>[4]</sup>, 得到

$$e_k = y_k | y_k |^{p-2} (| y_k |^p - R_p) = y_k / | y_k | (| y_k | - R)$$

其中  $R = \frac{E\{| a_k |^p\}}{E\{| a_k |}}$ 。从而, 权向量迭代公式改为

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \mu y_k / | y_k | (| y_k | - R) \mathbf{X}_k^* \quad (1)$$

在盲均衡算法中, 步长  $\mu$  决定了算法的收敛速度, 采用大步长, 能够加快收敛速度, 但同时会带来较大的稳态剩余误差, 为了减小算法收敛后的剩余误差应采用小步长, 但会使算法的收敛速度变慢。参考文献[2]通过仿真实验进一步验证了: 采用固定步长的常数模算法在收敛速度和剩余误差方面对步长调整的要求是相矛盾的, 从而制约了其收敛性能的进一步提高。

针对这个情况, 在改进算法中采用自适应调整的步长, 在算法收敛初期加大步长, 提高收敛速度; 算法收敛后减小步长, 以减少稳态剩余误差的产生, 提高收敛精度。对步长变化的这个要求恰好与剩余误差的变化规律相一致: 在算法收敛初期, 稳态剩余误差较大; 在收敛过程中, 均衡器权向量逐渐接近最佳权向量, 剩余误差逐渐减少, 算法收敛后误差达到最小。因此, 可以利用剩余误差来调整步长的变化。

自适应调整步长  $\mu$  的递推公式为

$$\mu_{k+1} = \alpha c_{k+1} \quad (2)$$

其中  $\alpha$  为比例因子, 用于控制步长  $\mu$  的大小。为确保算法的收敛, 步长  $\mu$  需要满足<sup>[5]</sup>:  $0 \leq \mu \leq 2/3\text{tr}(\mathbf{M})$ ,  $\mathbf{M}$  为均衡器输入信号的自相关矩阵,  $\text{tr}(\mathbf{M})$  为矩阵  $\mathbf{M}$  的迹。  $\alpha$  应在满足上述条件的前提下, 在仿真实验中选择适当的值。

$$c_{k+1} = (1 - \rho)c_k + \rho e_{k+1} \mathbf{X}_{k+1} \mathbf{X}_k^T \quad (3)$$

其中参数  $\rho$  用于控制步长  $\mu$  的变化快慢, 便于从中选择更适用于步长调整的步长变化曲线,  $0 < \rho < 1$ , 其取值需要根据具体的信道环境, 通过实验来调整。

这将使得步长能够由接收序列和均衡误差来实时地进行调整, 从而更好地进行迭代。在均衡初期剩余误差较大, 能够得到较大的步长, 从而提高算法的收敛速度; 随着均衡的不断进行, 误差越来越小, 使得步长也越来越小, 这时能够进行较好的均衡, 减少稳态剩余误差的产生, 使均衡器的收敛效果达到最优。

由式(1), 式(2), 式(3)便得到一种改进的变步长常数模算法。该算法具有收敛速度快, 剩余误差小, 收敛性能好, 容易实现等优点。

### 3 算法性能的理论分析

衡量盲均衡算法性能的主要参数<sup>[6]</sup>有: 算法的收敛速度, 稳态误差以及计算复杂度。虽然改进算法使用了自适应调整的步长, 但算法的复杂性与常数模算法相比增加不大, 实现起来比较简单。下面从收敛速度和剩余误差两个方面对两种算法的性能进行分析和比较。

#### 3.1 收敛速度的分析比较

传统的常数模算法采用固定步长, 考虑到算法的稳定

性, 步长一般都很小, 导致算法的收敛速度极慢, 为了提高收敛速度, 需要将均衡器从常数模算法切换到 DD(Decision Directed)算法, 这样虽然能够在一定程度上提高收敛速度, 但是算法切换的时机选择较为困难, 如果切换的过早算法还没有收敛, 会造成均衡器的发散; 如果过晚则会影响算法的收敛速度。许多学者针对常数模算法与 DD 算法的切换问题又进行了很多研究, 其中参考文献[7]提出了一种将常数模与 DD 相结合的算法, 二者能够平稳地进行交替, 使得算法的收敛性能得到了提高。

盲均衡算法中, 在满足收敛的情况下, 如果采用小步长, 算法的收敛速度会减慢; 采用大步长能够提高算法的收敛速度, 但当均衡器权向量接近最优值时, 权向量将在最优值附近一个较大的范围内来回抖动而无法进一步收敛, 会使迭代过程出现振荡, 从而影响算法的收敛速度。

改进算法采用自适应调整的步长, 根据均衡器的均衡效果实时进行调整, 在均衡初期采用较大步长, 能够极大地提高算法的收敛速度; 到均衡后期随着误差的不断减小, 步长逐步减小, 能够减少迭代过程中的振荡现象, 使得均衡器的权向量得到进一步的收敛, 从整体上提高了算法的收敛速度。

#### 3.2 稳态剩余误差的研究分析

由于常数模算法具有的非线性特性, 对其进行理论分析比较困难。由随机梯度矢量产生的超量均方误差, 在均衡器收敛后依然很大, 造成算法收敛后的剩余误差仍然比较重, 因此可以通过分析超量均方误差来间接的分析常数模算法剩余误差。由于目前还没有找到一个十分有效的方法来定量分析超量均方误差, 考虑到超量均方误差是由随机梯度矢量引起的, 二者之间成正比关系。通过对随机梯度矢量方差的比较能够定性地比较出超量均方误差的大小。

常数模算法的随机梯度矢量<sup>[8]</sup>为  $\nabla_k = y_k (| y_k |^2 - R_2) \cdot \mathbf{X}_k^*$ 。

改进算法的随机梯度矢量为  $\nabla_k = y_k / | y_k | (| y_k | - R) \cdot \mathbf{X}_k^*$ 。

理想情况下, 均衡器收敛后, 码间干扰很小, 有  $y_k \approx a_k$ , 得到  $\nabla_k \approx a_k / | a_k | (| a_k | - R) \mathbf{X}_k^*$ 。

由于随机梯度矢量的大小可以由其功率即方差  $\text{Var}[\nabla_k]$  表示, 分析中暂不考虑信道噪声的影响, 所以得出

$$\begin{aligned} \text{Var}[\nabla_k] &= E[\nabla_{kl} \nabla_{kl}^*] = E[x_{k-l}^* x_{k-l} (| a_k | - R)^2] \\ &= P \sum_{j=i} | h_j |^2 + Q | h_i |^2 \end{aligned}$$

上式中

$$\begin{aligned} P &= E[| a_k |] E[| a_k |^3] - (E[| a_k |^2])^2 \\ Q &= (E[| a_k |])^{-2} \{ (E[| a_k |^4])^2 E[| a_k |^4] + (E[| a_k |^2])^3 \\ &\quad - 2E[| a_k |] E[| a_k |^2] E[| a_k |^3] \} \end{aligned}$$

同样, 经过推导得到常数模算法的随机梯度矢量方差为  $\text{Var}[\nabla_k] = P \sum_{j=i} | h_j |^2 + Q | h_i |^2$ 。

其中

$$P = E[|a_k|^2]E[|a_k|^6] - (E[|a_k|^4])^2$$

$$Q = (E[|a_k|^2])^{-2} \{ (E[|a_k|^2])^2 E[|a_k|^8] + (E[|a_k|^4])^3 - 2E[|a_k|^2]E[|a_k|^4]E[|a_k|^6] \}$$

由此可以看出：在相同的信道条件下，改进前后两种算法的随机梯度矢量方差主要取决于参数  $P$  和  $Q$  的值。通过数学分析和对几种常见的 QAM 星座的计算，表明：改进算法得到的  $P$ 、 $Q$  值小于原算法得到的值，从而改进算法产生的随机梯度矢量方差小于原算法的。这就意味着对于同一信号而言，在相同的信道条件下，改进算法产生的超量均方误差要小于原算法产生的。由此可以得到：均衡器收敛到最佳点后，改进算法的稳态剩余误差要小于原算法。

此外，通过研究发现常数模算法的稳态剩余误差与步长因子之间具有一种非线性关系<sup>[2]</sup>。下面对剩余误差与步长的关系进行分析，从另一方面对改进前后两种算法的稳态剩余误差的大小进行比较。

假设均衡器权向量的最优值为

$$\hat{W}_k = [w_{0/k} \ w_{1/k} \ \cdots \ w_{L-1/k}]^T$$

判决电路的输出： $\hat{a}_k = \hat{W}_k^T X_k + \xi_k$  ( $\xi_k$  为零均值，独立同分布的干扰信号)。

剩余误差为  $e_k = \hat{a}_k - y_k$ ，经过推导整理可以得到

$$e_k = \hat{W}_k^T X_k + \xi_k - W_k^T X_k = [\hat{W}_k - W_k]^T X_k + \xi_k$$

$$= [\hat{W}_k - (W_{k-1} - \mu y_{k-1} / |y_{k-1}| (|y_{k-1}| - R) X_{k-1}^*)]^T X_k + \xi_k$$

整理得到  $e_k = [\hat{W}_k - W_0]^T X_k + \xi_k + \mu \sum_{l=0}^{k-1} y_l / |y_l| \cdot (|y_l| - R) X_l^T X_l^*$ 。

均衡器收敛后，码间干扰很小，有  $y_k \approx a_k$ ，代入上式得到

$$e_k = [\hat{W}_k - W_0]^T X_k + \xi_k + \mu \sum_{l=0}^{k-1} a_l / |a_l| (|a_l| - R) X_l^T X_l^*$$

由上式第 3 项可知：剩余误差与步长  $\mu$  有关，当算法的步长较大时虽能提高算法的收敛速度，却会导致较大的剩余误差，不利于减小收敛后的剩余误差，会影响对算法收敛精度的进一步提高。

常数模算法采用固定步长，步长较小则会减慢算法的收敛速度；步长较大则会产生较大的剩余误差，二者之间存在的矛盾制约了算法性能的提高。而改进算法克服了这一点，采用自适应调整的步长，使得步长由误差和输入信号进行调整。在均衡器收敛过程中，误差由大变小，步长也随之由大逐渐变小，当均衡器收敛到最佳值附近时，步长趋于零，此时剩余误差也将得到最小值。由此可以看出，采用自适应调整的步长在提高收敛速度的同时能够减小稳态剩余误差的产生，提高了算法的收敛精度。

## 4 算法性能的仿真比较

为了验证改进算法的性能，对两种算法进行了仿真，对二者的性能进行了比较。在模拟仿真实验中，均衡器抽头个数  $L=33$ 。

### 4.1 二值序列信号的仿真

设输入信号是独立同分布的二值序列，信道的冲激响应为  $h=[1 \ 0.3 \ -0.3 \ 0.1 \ -0.1]$ ， $\rho = 0.003$ ， $\alpha = 0.08$ ，信噪比是 40dB。两种算法的运行结果如图 2 所示。

由图 2(a) 能看出：由于信道和噪声的影响，输入信号受到严重损伤。图 2(b)，图 2(c) 比较可以看出，改进算法的收敛速度明显加快，在相同的初始条件下，常数模算法要经过 2000 多次的迭代才收敛，而改进算法只要大约 1000 次的迭代就能够迅速收敛。由此可以看出，采用自适应调整步长的改进算法能够极大地提高算法的收敛速度。同时，改进算法的剩余误差明显小于原算法的剩余误差。

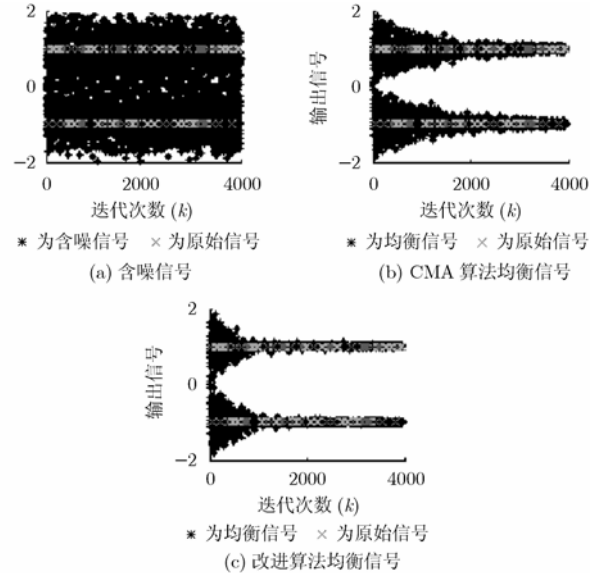


图 2 二值序列时两种算法的运行结果

### 4.2 4QAM 信号的仿真

将输入信号改成独立同分布的 4QAM 信号，信道  $h=[0.05 \ -0.063 \ 0.088 \ -0.126 \ -0.25 \ 0.9047 \ 0.25 \ 0 \ 0.126 \ 0.038 \ 0.088]$ ， $\alpha = 0.02$ ，信噪比是 20dB。图 3(a) 为不同  $\rho$  值引起步长的变化曲线，从上到下  $\rho$  分别为 0.0004, 0.0006, 0.0008；图 3(b) 为含噪信号；图 3(c) 为采用常数模算法进行均衡得到的信号星座图；图 3(d) 为改进算法得到的信号星座图，在该仿真中取  $\rho = 0.0006$ 。

由图 3 可以看出，采用常数模算法时，虽然能够得到收敛的星座图，但收敛后信号点还比较松散；而改进算法的输出信号的星座图清晰且更集中，收敛效果更好。同时，由图 3(a) 能够看出，步长  $\mu$  随迭代次数的增加而逐渐减小， $\rho$  值越大，步长下降的越快。参数  $\rho$  是用来控制步长变化快慢的，便于从中选取适合于特定信道下步长调整的变化曲线。均衡初期步长较大能够提高算法的收敛速度，随着均衡的不断进

行, 步长越来越小, 有利于减少稳态剩余误差的产生, 能够提高算法的收敛精度。

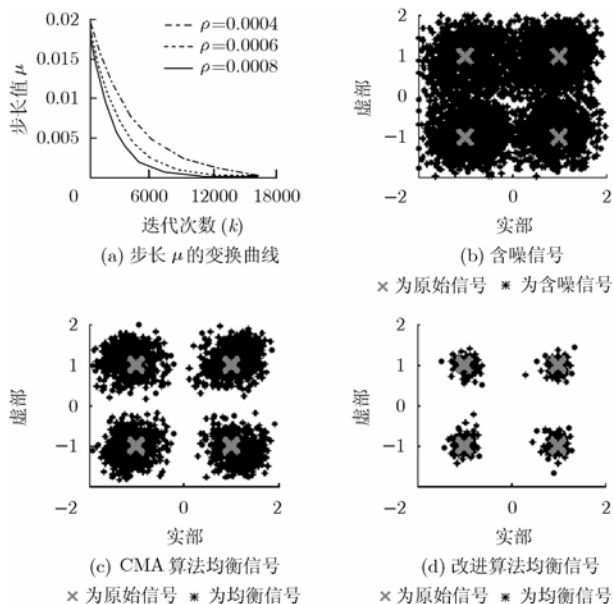


图 3 4QAM 信号时两种算法的运行结果

采用输出信号的剩余码间干扰(Inter Symbol Interference, ISI)来更好地比较两种算法的均衡性能, ISI 的表达式为<sup>[9]</sup>

$$ISI(k) = \frac{\sum_{l=0}^L |C_l(k)|^2}{\max_{0 \leq j \leq L} |C_j(k)|^2} - 1 \quad \text{其中 } C_j(k) \text{ 是均衡器权向量 } w_{j/k} \text{ 和信道冲击响应 } h_k \text{ 的卷积。}$$

两种算法均衡后输出信号的剩余码间干扰的比较如图 4 所示。由仿真结果可以看出: 改进算法的收敛速度要比常数模算法快很多, 原算法大约要经过 9000 次迭代才收敛, 而改进算法大约经过 4000 次迭代就能够收敛。而且改进算法的剩余码间干扰远小于原算法的剩余码间干扰, 具有很好的收敛性能。

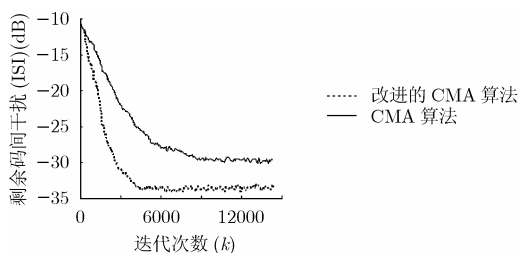


图 4 两种算法的剩余码间干扰的比较

## 5 结束语

在现有的各种盲均衡算法中, 常数模算法的应用最为广泛, 但其存在收敛速度慢、收敛性能差等缺点。在深入研究

常数模算法的基础上, 针对其存在的缺点, 提出了一种改进的变步长常数模算法, 该算法对权向量的迭代公式进行了修改, 并且使用了自适应调整的步长。文中先从理论上对改进前后两种算法的性能进行了分析, 表明改进算法无论从收敛速度还是收敛精度上均优于原算法。进而通过对二值序列信号和 QAM 信号的仿真结果的比较也得到了验证: 改进算法提高了算法的收敛速度, 减少了算法的剩余误差, 具有很好的收敛性能。

## 参考文献

- [1] Kim H N, Lee Y T, and Kim S W. Blind decision feed back equalization for VSB-based DTV receivers. *IEEE Trans. on Consumer Electronics*, 2002, 48(8): 606-609.
- [2] 赵宝峰. 变步长盲均衡算法的研究. [硕士论文], 太原: 太原理工大学, 2004, 5.
- [3] 冯熯, 廖桂生. 恒模算法: 进展与展望. *信号处理*, 2003, 19(5): 441-447.
- [4] Li Ning, Guo Yan, and Guo Li. Property of the constant modulus algorithm to capture the weak signal. *The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications*, 2003, 10(1): 9-14.
- [5] Kwong R H and Johnston E W. A variable step size LMS algorithm. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, 40(7): 1633-1642.
- [6] 刘琨, 代凌云. 一种新的基于多模误差切换的盲均衡算法. *数据采集与处理*, 2004, 19(2): 167-170.  
Liu Ju and Dai Lingyun. New blind equalization algorithm based on multi-mode error switch. *Journal of Data Acquisition & Processing*, 2004, 19(2): 167-170.
- [7] 王峰, 赵俊渭. 一种长数模与判决导引相结合的盲均衡算法研究. *通信学报*, 2002, 23(6): 105-109.  
Wang Feng and Zhao Jun-wei. On blind equalization united by constant modulus and decision directed algorithm. *Journal of China Institute of Communications*, 2002, 23(6): 105-109.
- [8] Godard D N. Self recovering equalization and carrier tracking in two dimensional data communication system. *IEEE Trans. on Commun.*, 1980, 28(11): 1867-1875.
- [9] 程勇, 姚领田, 刘雨. 一种新的适用于 MPSK 信号的盲均衡算法. *通信技术*, 2003, 141(9): 27-28.

高丽娟: 女, 1978 年生, 博士生, 研究方向为空间通信与信息系  
统。

赵洪利: 男, 1964 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为空间通  
信与信息系  
统。

蒋太杰: 男, 1976 年生, 讲师, 研究方向为军事通信技术。