

基于采样值随机压缩矩阵核空间的亚奈奎斯特采样重构算法

盖建新* 杜昊辰 刘琦 童子权

(哈尔滨理工大学测控技术与仪器黑龙江省高校重点实验室 哈尔滨 150080)

摘要: 针对现有调制宽带转换器亚奈奎斯特采样重构算法性能不高问题, 该文提出一种基于采样值核空间的支撑重构算法和随机压缩降秩方法, 将两者结合得到一种高性能采样重构算法。首先利用随机压缩变换在不改变未知矩阵稀疏特性的前提下将采样方程转化为多个新的多测量向量问题, 然后利用采样值矩阵核空间与采样矩阵支撑正交的关系获取联合稀疏支撑集, 最后通过伪逆完成重构。从理论和实验两个方面对所提方法进行了分析和验证。数值实验表明, 与传统重构算法相比, 所提算法提高了重构成功率、降低了高概率重构所需的通道数, 而且重构性能总体上随压缩次数增加而提高。

关键词: 稀疏重构; 亚奈奎斯特采样; 多测量向量; 调制宽带转换器

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)02-0484-08

DOI: 10.11999/JEIT180323

Sub-Nyquist Sampling Recovery Algorithm Based on Kernel Space of the Random-compression Sampling Value Matrix

GAI Jianxin DU Haochen LIU Qi TONG Ziquan

(The Higher Educational Key Laboratory for Measuring & Control Technology and Instrumentations of Heilongjiang Province, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: To solve the low performance problem of the existing Modulated Wideband Converter (MWC)-based sub-Nyquist sampling recovery algorithm, this paper proposes a support recovery algorithm based on the kernel space of sampling value and a random compression rank-reduction idea. Combining them, a high-performance sampling recovery algorithm is achieved. Firstly random compression transforms are used to convert the sampling equation into several new multiple-measurement-vector problems, without changing the sparsity of the unknown matrix. Then the orthogonal relationship between the kernel space of sampling value and the support vectors of sampling matrix is utilized to obtain joint sparse support set of the unknown. The final recovery is performed by the pseudo inversion. The proposed method is analyzed and verified by theory and experiment. Numerical experiments show that, compared with the traditional recovery algorithm, the proposal can improve the recovery success rate, and reduce the channel number required for high-probability recovery. Furthermore, in general, the recovery performance improves with the rise of compression times.

Key words: Sparse recovery; Sub-Nyquist sampling; Multiple measurement vectors; Modulated Wideband Converter (MWC)

1 引言

以奈奎斯特采样理论为基础的传统信息处理技术, 目前在雷达电子监视、认知无线电频谱感知等应用中正面临着采样率过高的压力^[1-3]。近年来,

压缩感知(Compressive Sensing, CS)理论^[4,5]提出了一种充满前景的信息获取方法。该理论指出, 对于稀疏或可压缩的信号, 当测量矩阵满足约束等距特性时, 可以从少量低速采样中恢复出原信号。CS理论掀起了亚奈奎斯特信息处理技术的发展新高潮。近年来, 基于CS理论, 学者们提出了随机解调^[6]、随机采样^[7]、多陪集采样^[8]、调制宽带转换^[9,10]等一系列亚奈奎斯特采样方法。研究的焦点主要集中在采样处理和重构算法两个方面。在这些方法中, 调制宽带转换器(Modulated Wideband Converter, MWC)亚奈奎斯特采样, 以其所适用的

收稿日期: 2018-04-11; 改回日期: 2018-10-29; 网络出版: 2018-11-08

*通信作者: 盖建新 gix800608@126.com

基金项目: 国家自然科学基金(61501150), 黑龙江省自然科学基金(QC2014C074)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61501150), The Natural Science Foundation of Heilongjiang Province (QC2014C074)

稀疏宽带信号模型应用广泛、重构框架运算负担轻、可采用现有商用元器件实现等优势, 受到了雷达通信、医疗成像、认知无线电等多个领域学者的广泛关注^[1]。

MWC的信息获取过程由采样和重构两个阶段组成。在采样阶段采用多个通道的结构来获取稀疏模拟信号, 通道数量决定着硬件的复杂程度, 并影响重构成功率。如何采用更少的通道, 以更高成功率从低速数据流中重构原始信号, 是MWC的核心问题^[12]。MWC的重构模型可归结为多测量向量(Multiple Measurement Vectors, MMV)问题, 属于CS理论的一个分支。MMV重构算法大致可以分为贪婪算法^[13]和凸松弛算法^[14]两大类。前者运算耗时较长难以达到测量系统对实时性的要求, 后者具有理论保障且执行效率较高, 近年来发展快、应用多。在MWC提出之初, 贪婪类的正交匹配追踪(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)算法被用于MWC重构。在一定条件下, 以较高的概率实现了精确重构。文献^[15]对迭代硬门限(IHT)、正则化IHT(NIHT)、硬门限追踪(IHP)、压缩感知匹配追踪(CoSaMP)等4种贪婪类单测量向量(Single Measurement Vector, SMV)算法进行了推广, 从理论保障方面进行了推导论证, 得出了与之对应的MMV重构算法: SIHT, SNIHT, SIHP, SCoSaMP, 其中SCoSaMP算法与其他贪婪算法相比重构性能有较大提高。文献^[16]在剖析CS与阵列信号处理之间关系的基础上, 将多信号分类(MUSIC)思想在压缩感知框架下进行了改进, 提出了可压缩MUSIC(CSMUSIC)算法, 该算法充分利用CS与MUSIC算法各自的优点, 即使源信号相干时, 只要能够通过压缩感知算法估计出特定的部分支撑集, 便可以确定性地得到剩余支撑集。但鉴于MWC重构问题的具体特点(如随机频谱分割、采样矩阵与未知矩阵均共轭对称), 并不是所有高性能MMV重构算法都可以在MWC重构过程中发挥出优势。上述算法当用于MWC重构时其性能距离理论上限仍存在较大的改进空间。文献^[17]针对一般的MMV问题提出了一种降维多测量向量与性能提升(Reduce MMV and Boost, ReMBo)重构算法, 该算法将MMV问题随机地组合成SMV问题进行求解, 通过多次尝试的方法来提升重构性能, 使得ReMBo算法的重构性能在无噪声条件下呈现出了优势, 然而在有噪声条件下用于MWC重构时, 该算法立即失效。

本文为提高MWC重构算法性能, 将核空间思想引入MWC重构算法。为满足核空间(Kernel Space, KS)条件, 针对采样值矩阵的秩较大的问

题, 提出 K 列随机压缩(Random Compression, RC)降低维度的方法, 在不改变未知矩阵的稀疏性的前提下, 实现了降秩功能。将两种思想相结合最终得到一种名为RCKS的高性能重构算法。理论分析和实验结果验证了本文算法的有效性。

2 MWC理论简介

2.1 信号模型

设信号 $x(t)$ 为实值连续时间信号, 带限于一个较宽的频率范围 $\mathcal{F} = [-f_{\text{NYQ}}/2, f_{\text{NYQ}}/2]$ 内(f_{NYQ} 为奈奎斯特率), \mathcal{F} 内仅存在 N 个非零子频带, 子频带可分布在 \mathcal{F} 中的任意位置, 子频带最大宽度小于等于 B Hz。该类信号被称为稀疏宽带信号。图1给出了典型稀疏宽带信号频谱示意图。

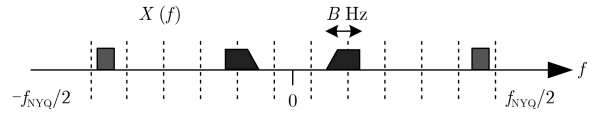


图1 稀疏宽带信号频谱示意图

2.2 采样原理

MWC采样前端由 m 个通道组成, 输入信号 $x(t)$ 同时进入 m 个通道, 在第 i 通道信号 $x(t)$ 被周期为 $T_p(f_p = 1/T_p)$ 的伪随机信号 $p_i(t)$ 混频。混频后的信号在频域被截止频率为 $1/2T$ 的低通滤波器 $h(t)$ 截断, 最后利用采样率为 $f_s = 1/T$ 的低速ADC采样, 获取 m 组低速采样值序列 $y_i[n]$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 。如图2所示。

从频域分析MWC第 i 个通道可得

$$\begin{aligned} \text{DTFT}(y_i[n]) &= Y_i(e^{j2\pi f T}) \\ &= \sum_{n=-\lambda_0}^{\lambda_0} c_{i,n} X(f - n f_p), \quad f \in \mathcal{F}_S \end{aligned} \quad (1)$$

式中, DTFT表示离散时间傅里叶变换, $c_{i,n}$ 为 $p_i(t)$ 的傅里叶级数的系数, $X(f)$ 为 $x(t)$ 的连续时间傅里叶变换, $\lambda_0 = [(f_{\text{NYQ}} + f_s)/2f_p] - 1$, $[\cdot]$ 表示向上取整, $\mathcal{F}_S \triangleq [-f_s/2, f_s/2]$ 。

从式(1)可以看出, MWC采样相当于原信号频谱 $X(f)$ 以 f_p 为步进进行移位, 并由滤波器截断成宽度为 f_s 的频谱片段, 最后以 $c_{i,n}$, $n \in [-\lambda_0, \lambda_0]$ 为系数进行线性组合。综合考虑 m 个通道, 令

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(f) &= [Y_1(e^{j2\pi f T}), \dots, Y_i(e^{j2\pi f T}), \dots, Y_m(e^{j2\pi f T})]^T, \\ \mathbf{z}(f) &= [X(f + \lambda_0 f_p), \dots, X(f), \dots, X(f - \lambda_0 f_p)]^T, \end{aligned} \quad (2)$$

式(1)可表示为

$$\mathbf{y}(f) = \mathbf{\Phi} \mathbf{z}(f), \quad f \in \mathcal{F}_S \quad (2)$$

式中, $\mathbf{\Phi}_{i,n} = c_{i,n-\lambda_0-1}$, 文中称其为采样矩阵, 维

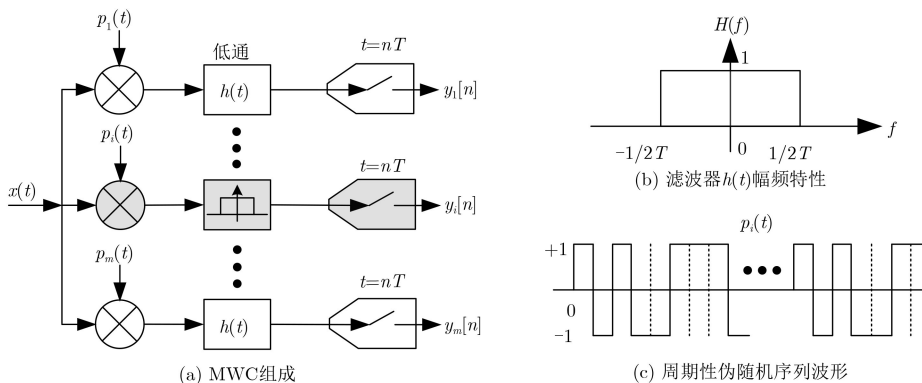


图2 MWC系统框图

数为 $m \times \lambda (\lambda = 2\lambda_0 + 1)$, 通常 $m < \lambda$ 。

式(2)两边同时右乘傅里叶反变换矩阵, 可得到对应的时域形式

$$\mathbf{Y}(n) = \Phi \mathbf{Z}(n), \quad n \in [1, L] \quad (3)$$

其中, $\mathbf{Y}(n) = [y_1[n], y_2[n], \dots, y_m[n]]^T$, $\mathbf{Z}(n) = \text{DTFT}^{-1}(z(f))$, L 为采样记录长度。

假设图1为输入信号 $x(t)$ 的频谱, $f_s = f_p \geq B$, 则MWC的时域采样方程如图3所示, 图中 DTFT^{-1} 表示对 $z(f)$ 的每个行向量取DTFT逆运算。可见只要由采样方程得到 $z(f)$, 通过频谱搬移等处理方法立即恢复出图1所示的原始信号。

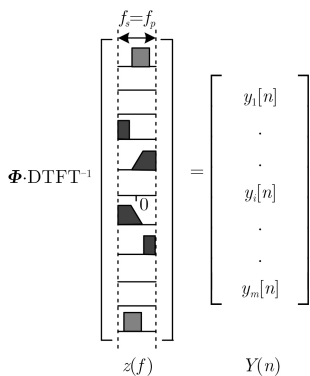


图3 MWC采样方程示意图

2.3 重构方法

MWC重构是指从采样值矩阵 $\mathbf{Y}(n)$ 通过特定算法恢复出未知矩阵 $z(f)$ 或 $\mathbf{Z}(n)$ 的过程。由于 $m < \lambda$, 式(2)和式(3)均为欠定性方程组, 常规方法有无穷多解。考虑 $z(f)$ 或 $\mathbf{Z}(n)$ 具有联合稀疏特性, 即只有少量不全为零的行, 当满足定理1条件时, 存在唯一的稀疏解。

定理 1^[9] 设多带信号 $x(t)$ 由 N 个子频带构成, 各子频带最大带宽为 B , 按照图2所示的MWC结构进行采样, 如果以下条件成立:

- (1) $f_s \geq f_p \geq B$ 并且 f_s/f_p 数值不是很大;

- (2) 一个周期内序列 $p_i(t)$ 的符号 (± 1) 数 $M \geq$

$$2 \left[\frac{f_{\text{NYQ}}}{2f_p} + \frac{1}{2} \right] - 1;$$

- (3) $m \geq 2N$;

- (4) 矩阵 Φ 的任意 $2N$ 列线性无关。

则对于 $\forall f \in \mathcal{F}_S$, $z(f)$ 是式(2)唯一的 N -稀疏解。

定理1满足时, MWC重构过程可分成两个步骤进行: 首先通过稀疏优化等算法获得支撑集 $\Omega = \text{supp}(\mathbf{Z}(n))$, 然后通过式(4)伪逆运算计算未知矩阵。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_\Omega(n) &= \Phi_\Omega^\dagger \mathbf{Y}(n) \\ \mathbf{Z}_i(n) &= 0, \quad i \notin \Omega \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中, $\Phi_\Omega^\dagger = (\Phi_\Omega^H \Phi_\Omega)^{-1} \Phi_\Omega^H$ 为 Φ_Ω 的左伪逆矩阵。MWC提出时将OMP作为MMV问题的支撑重构算法, 在一定条件下实现了精确重构。然而OMP算法在重构成功率等性能方面距离理论上限还存在较大的改进空间。针对该问题本文将核空间思想引入到MWC重构过程中。为了满足核空间思想的重构条件, 提出一种采样值 K 列随机压缩降秩变换思想。

3 所提出的算法

3.1 基于核空间思想的MMV问题支撑求解方法

前已述及, MWC重构的关键在于求解MMV问题未知矩阵的联合稀疏支撑集 Ω 。下面提出一种利用采样值矩阵的核空间矩阵来判断支撑集的方法。

设 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ 为某一MMV问题, 其中, 采样值矩阵 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times K}$, \mathbf{Y} 的秩 $\text{rank}(\mathbf{Y}) = K$, 采样矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times \lambda}$, \mathbf{A} 的Kruskal秩 $\sigma(\mathbf{A}) \geq K + 1$, 即 \mathbf{A} 的任意 $K + 1$ 列均线性无关, \mathbf{X} 的联合稀疏支撑集定义为 $\Omega = \{i | \mathbf{X}^i \neq 0\}$ 且 $|\Omega| = K$, 其中, \mathbf{X}^i 表示以 i 为索引 \mathbf{X} 的行子集, $|\Omega|$ 表示集合 Ω 的势(cardinality)。

考虑支撑集的定义, 采样值矩阵 \mathbf{Y} 可以表示为 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}_\Omega \mathbf{X}^\Omega$, 其中 \mathbf{A}_Ω 表示以 Ω 为索引 \mathbf{A} 的列子集。设 \mathbf{Q} 为 \mathbf{Y} 各列所张成的空间的核空间矩阵, 即

有 $\mathbf{Q}^T \mathbf{Y} = 0$ 成立。于是可得 $\mathbf{Q}^T \mathbf{Y} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A}_\Omega \mathbf{X}^\Omega = 0$ 。根据前提假设易知 $K = \text{rank}(\mathbf{Y}) \leq \min[\text{rank}(\mathbf{A}_\Omega), \text{rank}(\mathbf{X}^\Omega)]$, 即有 $\text{rank}(\mathbf{X}^\Omega) \geq K$, 结合 \mathbf{X} 的联合稀疏度为 K , 因此 $\text{rank}(\mathbf{X}^\Omega) = K$, 即 \mathbf{X}^Ω 可逆, 于是有 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A}_\Omega = 0$ 成立, 即对于支撑集中的任意元素 $j \in \Omega$ 均有 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A}_j = 0$ 成立。由此可见, 核空间思想为我们提供了一种可能的支撑集判决条件。问题是满足 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A}_j = 0$ 的所有 \mathbf{A} 的列索引都是支撑集的元素吗?

假设除了 $j \in \Omega$ 外, 还存在 $j_0 \notin \Omega$ 使 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A}_{j_0} = 0$ 成立, 则有 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A}_{[\Omega, j_0]} = 0$ 成立。然而由 $\mathbf{Q}^T \mathbf{Y} = 0$ 可知 \mathbf{Q} 的秩 $\text{rank}(\mathbf{Q}^T) = m - K$, 于是由 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A}_{[\Omega, j_0]} = 0$ 可推出 $\text{rank}(\mathbf{A}_{[\Omega, j_0]}) = K$, 这与前提条件 $\sigma(\mathbf{A}) \geq K+1$ 即 \mathbf{A} 的任意 $K+1$ 列均线性无关相矛盾, 因此综上所述, 当且仅当 $j \in \Omega$ 时 $\mathbf{Q}^T \mathbf{A}_j = 0$ 成立。

需要注意的是, 核空间思想假设采样值矩阵的秩与未知信号的稀疏度相同, 然而在MWC实际系统中, 一般采样长度较长, 即 \mathbf{Y} 包含的列向量较多, 导致 $\text{rank}(\mathbf{Y}) \geq K$ 。图4给出了不同条件下采样值矩阵的秩 $\text{rank}(\mathbf{Y})$ 的统计结果。如图4所示, 信号的频带数 $N=6$ 时(此时稀疏度为12), 在采样长度分别为 $L = 13, 20, 40, 60, 80$ 时, 通道数 m 以3为步进在区间 $[13, 78]$ 内变化, 在不同信噪比(Signal to Noise Ratio, SNR)条件下, 只要 $m \geq 13$, 采样值矩阵的秩尽管随着 m 有波动, 但均大于未知矩阵的稀疏度12。

前面分析中可知若想采用核空间思想, 必须保证 \mathbf{Y} 的秩等于 K , 若 $\text{rank}(\mathbf{Y}) > K$ 则 $\text{rank}(\mathbf{Q}) < m - K$, 造成集合 $\{j | \mathbf{Q}^T \mathbf{A}_j = 0\}$ 的势大于 K 以至于最终按照核空间方法求出的支撑元素数量会增加, 即 $|\Omega| \geq K$, 导致重构失败。为此, 需要寻找一种矩阵降秩方法, 在不影响未知矩阵稀疏性的前提下达到压缩维度的目的。

3.2 K列随机压缩降秩方法

文献[17]为了获取支撑集, 提出了一种名为ReMBo

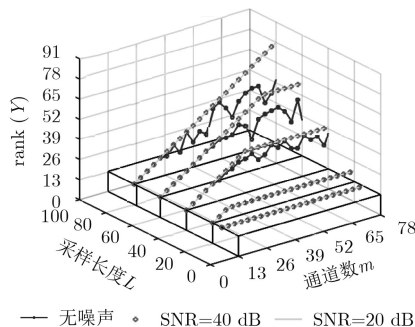


图4 不同条件下采样值矩阵的秩随通道数的变化情况

的随机线性组合方法将MMV问题变成SMV问题来求解, 同时证明了随机组合前后MMV问题的未知矩阵与SMV问题的未知向量的(联合)支撑集不变。受此启发, 本文提出一种 K 列随机压缩变换方法, 采用符合特定分布的 K 列“窄”随机矩阵将采样值矩阵进行线性变换, 进而达到降秩的目的。本节引入 K 列随机压缩变换方法有两个目的: 一是降低采样值矩阵的秩以满足核空间思想的条件, 进而利用采样值矩阵的核空间判断支撑集合; 二是将MWC采样方程压缩变换成与之具有相同支撑的多个新的MMV问题, 利用新的MMV问题间接地求解原MWC采样方程的支撑集, 并在有可能的条件下提高重构性能。ReMBo方法中, 线性组合相当于采样值矩阵及未知矩阵各行向量在随机向量上进行投影, 若采用 K 个随机向量构成的矩阵作为变换矩阵, 可将采样值矩阵压缩变换成 $m \times K$ 的新矩阵。需要注意的是压缩变换后MMV问题的唯一解的稀疏性不应发生改变, 下面采用定理的形式描述如下:

定理 2 设 $\hat{\mathbf{X}}$ 为MMV问题 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ 的唯一 K 稀疏解, 其中 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times L}$, $\sigma(\mathbf{A}) \geq 2K$ 。令 $\mathbf{T} = \{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_K\}$ 为 K ($K < m$) 个长度为 L 的单位范数随机列向量, 其元素符合某一特定连续分布。令 $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}\mathbf{T}$, $\bar{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}\mathbf{T}$, 则 $\bar{\mathbf{X}}$ 为新MMV问题 $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{U}$ 的唯一 K 稀疏解, 且 $\text{supp}(\bar{\mathbf{X}}) = \text{supp}(\hat{\mathbf{X}})$ 成立的概率为1。

证明 令 $\bar{y}_n = \mathbf{Y}\mathbf{T}_n$, $\bar{x}_n = \hat{\mathbf{X}}\mathbf{T}_n$, 其中 $n \in \{1, 2, \dots, K\}$ 。由文献[17]可知, \bar{x}_n 为SMV问题 $\bar{y}_n = \mathbf{A}u$ 的唯一 K 稀疏解, 且 $\text{P}[\text{supp}(\hat{\mathbf{X}}) = \text{supp}(\bar{x}_n)] = 1$ 成立, 即 $\text{supp}(\hat{\mathbf{X}}) = \text{supp}(\bar{x}_1) = \text{supp}(\bar{x}_2) \dots = \text{supp}(\bar{x}_K)$ 成立的概率为1。由 $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}\mathbf{T} = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_K\}$, $\bar{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}\mathbf{T} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_K\}$, 因此 $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}}$ 成立。结合联合支撑集定义知:

$$\begin{aligned} \text{supp}(\bar{\mathbf{X}}) &= \text{supp}\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_K\} \\ &= \bigcup_{n \in \{1, 2, \dots, K\}} \text{supp}(\bar{x}_n) = \text{supp}(\bar{x}_n) \quad (5) \end{aligned}$$

于是有 $\text{supp}(\bar{\mathbf{X}}) = \text{supp}(\bar{x}_n) = \text{supp}(\hat{\mathbf{X}})$ 成立概率为1, 且 $|\text{supp}(\bar{\mathbf{X}})| = |\text{supp}(\hat{\mathbf{X}})| = K$, 即 $\bar{\mathbf{X}}$ 联合稀疏度为 K 。考虑 $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{X}}$, $|\text{supp}(\bar{\mathbf{X}})| = K$, $\sigma(\mathbf{A}) \geq 2K$, 由文献[14]中定理2.2知 $\bar{\mathbf{X}}$ 为 $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{U}$ 的唯一 K 稀疏解。证毕

定理2保证了 K 列随机压缩后新MMV问题稀疏解的支撑集与原MMV问题稀疏解的支撑集相同。因此可以通过求解压缩变换后的MMV问题间接求解原MMV问题。

由 $\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}\mathbf{T}$ 知, 理论上 $\text{rank}(\bar{\mathbf{Y}}) \leq \text{rank}(\mathbf{T}) = K$ 。

在MWC实际采样中,由于信号频谱分割的随机性及频谱泄露效应,大量实验表明实际采样值矩阵在 K 列随机压缩后的秩恰好为 K 。图5给出了在不同的通道数 m 、不同采样长度 L 及不同信噪比条件下,当信号的频带数为6时(稀疏度为12)随机压缩后采样值矩阵 $\bar{\mathbf{Y}}$ 的秩的情况。从图5中可以看出,由于随机矩阵的满秩特性及MWC处理信号的实际情况,随机压缩变换保证了变换后采样值矩阵的秩与未知矩阵的稀疏度相同($K=12$)。可见通过 K 列随机压缩的方法可以达到应用核空间方法的基本条件, K 列随机压缩方法为核空间思想应用于MWC重构奠定了基础。

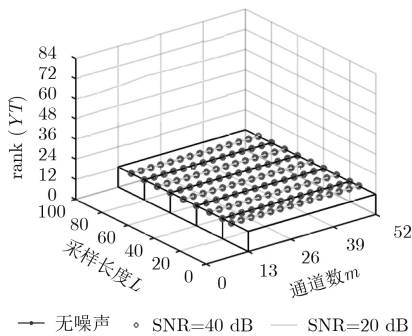


图5 不同条件下随机压缩后采样值矩阵秩的统计结果

3.3 多次 K 列随机压缩与支撑判据

本文提出的随机压缩方法,采用 K 列随机矩阵作为变换矩阵,鉴于随机性,每次重构时可以利用多个随机矩阵进行多次压缩变换,得到多个不同的MMV问题,进而增加MMV问题的多样性。问题是,每次重构时的支撑集判据如何确定。由核空间思想可知无噪声时采样值矩阵的核空间与以支撑集为索引的采样矩阵列子集正交,对于每次压缩得到的MMV问题可以采用 ℓ_2 范数的方法通过计算 $\|Q^T \mathbf{A}_j\|_{\ell_2}$ 是否为0来判断 j 是否属于支撑集。当然有噪声时可以通过判断 $\|Q^T \mathbf{A}_j\|_{\ell_2}$ 的大小的方法,通过排序来确定支撑集合。一次重构过程进行 r 次压缩变换时,考虑到各MMV问题解的联合稀疏性特征,可以将 r 个支撑集判据综合起来,将和式 $\sum_{i=1}^r \|Q_{(i)}^T \mathbf{A}_j\|_{\ell_2}$, $j \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$ 作为最终排序依据。由于该式反映了 r 个MMV问题采样值矩阵与采样矩阵之间的正交关系,即反映了 r 个未知矩阵之间的公共信息(联合稀疏信息),当个别随机压缩过程不利于重构时,由于综合条件 $\sum_{i=1}^r \|Q_{(i)}^T \mathbf{A}_j\|_{\ell_2}$ 保留了MMV问题的多样性,仍然有希望完成最终重构,进而提高判决的成功概率。

3.4 算法描述

本文提出的MWC重构算法结合了 K 列RC与

KS思想,简称为RCKS算法,具体算法描述如下。

输入: 采样值矩阵 $\mathbf{Y}(n) \in \mathbb{R}^{m \times L}$, 采样矩阵 $\Phi \in \mathbb{C}^{m \times \lambda}$, 频带数量 N , 随机压缩次数 r 。

输出: 支撑集估计 $\hat{\Omega}$, 未知矩阵估计 $\hat{\mathbf{X}}(n)$ 。

步骤1 取 r 个随机矩阵作为压缩变换矩阵 $\mathbf{T}_{(i)} = \text{randn}(L, 2N)$ $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, 实现 r 次压缩变换 $\bar{\mathbf{Y}}_{(i)} = \mathbf{Y} \mathbf{T}_{(i)}$, 其中 $\mathbf{T}_{(i)}$ 表示第 i 个随机矩阵, $\bar{\mathbf{Y}}_{(i)}$ 表示第 i 个压缩后的采样值矩阵;

步骤2 求解 $\bar{\mathbf{Y}}_{(i)}$ 的核空间矩阵 $\mathbf{Q}_{(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$;

步骤3 计算 $P_j = \sum_{i=1}^r \|Q_{(i)}^T \Phi_j\|_{\ell_2}$, $j \in \{1, 2, \dots, \lambda\}$;

步骤4 从向量 $\mathbf{P} = [P_1 P_2 \dots P_\lambda]$ 中找到 $2N$ 个最小值所对应的索引值,即支撑集 $\hat{\Omega} = \min(\mathbf{P}, 2N)$;

步骤5 按照式(4)伪逆运算完成重构,返回未知矩阵的估计 $\hat{\mathbf{X}}(n)$ 。

4 实验结果及分析

为了验证所提出的RCKS算法的有效性,本节设计了3个实验:首先考察 K 列随机压缩的次数 r 对重构性能的影响;其次在相同条件下对比RCKS算法及当前典型MMV算法用于MWC重构时的成功率情况;最后给出RCKS算法用于频谱感知时的重构效果。为了便于说明问题,实验中稀疏宽带信号由学者们普遍采用的通用表达式产生^[9,12]

$$x(t) = \sum_{n=1}^N \sqrt{E_n B_n} \text{sinc}(B_n(t - \tau_n)) \cdot \cos(2\pi f_n(t - \tau_n)) + n(t) \quad (6)$$

其中,参数 N , E_n , B_n , f_n , τ_n 分别代表子频带数、第 n 个子频带的能量系数、子带宽度、载波频率和延迟时间, $n(t)$ 为高斯白噪声。每个实验中,以下过程重复500次,将成功次数的百分率作为成功概率:

(1) 在 $p_i(t)$ 的一个周期内,等概率随机产生 ± 1 作为调制波形;

(2) 在区间 $[-f_{\text{NYQ}}/2, f_{\text{NYQ}}/2]$ 内按均匀分布随机产生各子频带的载波频率 f_n ;

(3) 用重构算法估计支撑集,当估计支撑集与实际支撑集相同即 $\hat{\Omega} = \Omega$ 时,则称重构成功,如果 $\hat{\Omega} \supset \Omega$ 且 $\Phi_{\hat{\Omega}}$ 列满秩,也作为成功标志^[9]。

首先,考察RCKS算法中随机压缩次数 r 对重构性能的影响。前已述及,本文提出的RCKS算法采用随机压缩实现降秩功能,对于同一个重构问题,该过程可以随机进行多次,而且次数 r 对算法重构性能有影响。为此,本实验检验在不同的 r 值

时, RCKS的重构成功率情况。不失一般性, 以具有6个(对称的3对)子频带的稀疏宽带信号为例。信号参数设置如下: SNR=30 dB; $E_n=\{1, 2, 3\}$; $B_n=\{50, 50, 50\}$ MHz; $\tau_n=\{0.394, 0.985, 1.379\}$ μ s; 载波频率 f_n 随机地分布在 $[-5, 5]$ GHz内。MWC采样参数设置如下: $\lambda = 2\lambda_0 + 1 = 195$; $f_s = f_p = f_{\text{NYQ}}/\lambda = 51.28$ MHz。图6给出了RCKS算法的重构成功率随通道数 m 的变化情况, 图中分别给出了压缩变换次数 $r=1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$ 时所对应的曲线。如图6所示, 当 $12 < m < 20$ 时, 总体上随着 r 增大, RCKS的重构成功率具有逐渐提高的趋势。如当 $m=14$, $r=1, 2, 3, 4, 6, 8, 10$ 时, 成功率分别为36.0%, 60.6%, 66.2%, 74.4%, 80.2%, 82.8%, 82.6%。为了清楚地看到该特点, 图7统计了 $m=14, 15, 16, 17$ 时重构成功率随压缩次数的变化曲线。从图7可以看出, 当 r 数值较小时(如

$r \leq 4$ 时), 随着 r 增大, 重构性能改进较大, 当 r 较大时, 重构成功率并不是无限制的提高, 当 $r \geq 5$ 时, 曲线开始上下波动, 此时重构性能提高较小或没有提高。可见采用RCKS算法实现MWC重构时, 随机压缩的次数并不需要太多, 后文取 $r = 4$ 。

其次, 比较在相同条件下RCKS($r = 4$)与典型的MMV算法(CSMUSIC, SCoSaMP, OMPMMV)用于MWC重构时的重构性能。本实验中, 被测信号的信噪比分别设置为无噪声, 40 dB, 30 dB和20 dB, 信号其它参数及MWC采样参数与前面实验设置相同。如图8所示, 在各种信噪比下, 当通道数 $m < 25$ 时在重构成功率方面RCKS($r = 4$)与其它算法相比均表现出了较大的优势。如当 $m = 14$, 信号中无噪声及SNR=40 dB, 30 dB, 20 dB时, RCKS($r = 4$)的重构成功率分别比

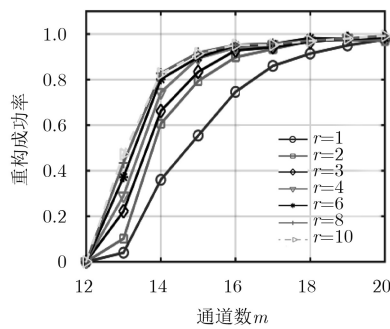


图6 不同压缩次数时RCKS重构性能随通道数的变化

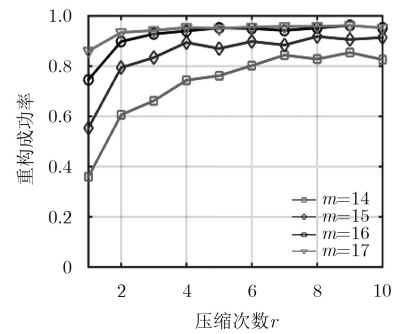
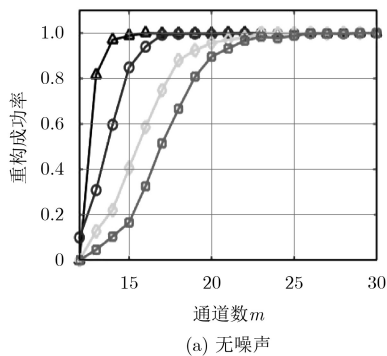
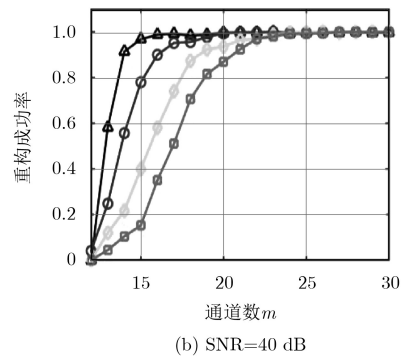


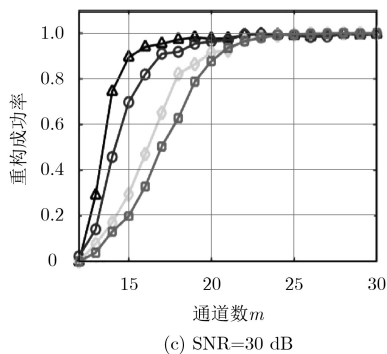
图7 RCKS重构成功率随压缩次数的变化



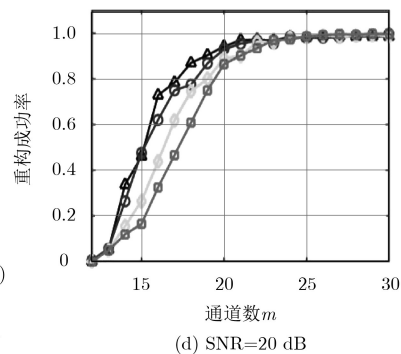
(a) 无噪声



(b) SNR=40 dB



(c) SNR=30 dB



(d) SNR=20 dB

—●— RCKS($r=4$)
 —○— CSMUSIC
 —◇— SCoSaMP
 —□— OMPMMV

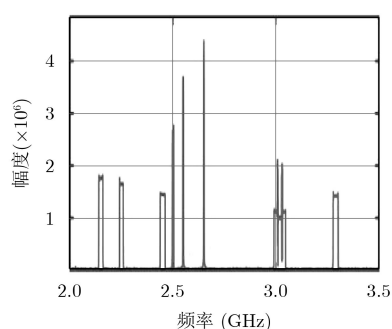
图8 不同信噪比时RCKS($r = 4$)与CSMUSIC, SCoSaMP, OMPMMV重构成功率比较

CSMUSIC高37.4%, 35.8%, 28.6%, 7.2%, 比SCoSaMP高75.0%, 69.8%, 57.4%, 18.2%, 比OMPMMV高86.6%, 81.0%, 61.4%, 21.8%。此外从图中还可以看出, 信号无噪声及SNR=40 dB, 30 dB, 20 dB时, RCKS($r=4$)高概率(大于99%)重构所需的最小通道数分别比OMPMMV少9, 5, 4, 2。由于通道数与硬件开销及总体采样率有直接关联, 因此RCKS算法可降低MWC系统的硬件复杂度。

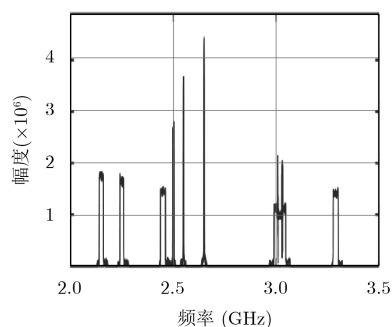
最后, 为了进一步说明本文算法有效性, 图9展示了RCKS($r=4$)算法用于亚奈奎斯特频谱感知时的重构效果。本实验中 $N=20$, $f_n=\{2.30, 2.50, 2.90, 4.00, 4.04, 4.08, 3.00, 3.10, 3.30, 4.58\}$ GHz, $E_n=\{5, 4, 4, 2, 2, 2, 4, 3, 4, 4\}$, $B_n=\{40, 37, 48, 40, 50, 40, 15, 6, 6, 50\}$ MHz, $\tau_n=\{0.319, 0.798, 0.957, 0.128, 0.160, 0.479, 0.798, 1.117, 1.197, 1.037\}$ μ s, SNR = 25 dB, $m=50$, MWC其它采样参数与前面实验相同。从图9可以看出, 尽管原信号的奈奎斯特率高达9.16 GHz, 而MWC等效采样率仅为 $mf_{\text{NYQ}}/\lambda=2.3487$ GHz, 采用RCKS($r=4$)算法仍然能够实现重构, 在子频带位置、频带宽度及幅度等方面均实现了精确恢复, 进一步说明了本文算法的有效性。

5 结论

针对现有MWC重构算法性能不高的问题, 本



(a) 原信号奈奎斯特率下的频谱



(b) 重构得到的频谱

图9 RCKS($r=4$)算法重构效果

文结合随机压缩与核空间思想, 提出一种基于采样值随机压缩矩阵核空间的重构算法。该算法首先对采样值矩阵进行多次 K 列随机压缩, 在不改变未知量稀疏特性的前提下实现降秩变换, 同时获得多个MMV问题, 然后将多个基于核空间思想的支撑集判据综合起来, 实现最终支撑重构。实验结果表明, 与现有CSMUSIC, SCoSaMP, OMPMMV等典型重构算法相比, 本文提出的算法在相同条件下具有重构成功率高、高概率重构所需通道数少等优点。

参考文献

- [1] PARK J, JANG J, IM S, *et al.* A sub-nyquist radar electronic surveillance system[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 10080–10091. doi: [10.1109/ACCESS.2018.2799304](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2799304).
- [2] QIN Zhijin, GAO Yue, PLUMBLEY M D, *et al.* Wideband spectrum sensing on real-time signals at sub-Nyquist sampling rates in single and cooperative multiple nodes[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(12): 3106–3117. doi: [10.1109/TSP.2015.2512562](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2512562).
- [3] 郑仕链, 杨小牛. 用于调制宽带转换器压缩频谱感知的重构失败判定方法[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(1): 236–240. doi: [10.11999/JEIT140127](https://doi.org/10.11999/JEIT140127).
ZHENG Shilian and YANG Xiaoniu. A reconstruction failure detection scheme for modulated wideband converter based compressed spectrum sensing[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(1): 236–240. doi: [10.11999/JEIT140127](https://doi.org/10.11999/JEIT140127).
- [4] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transaction on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306. doi: [10.1109/TIT.2006.871582](https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582).
- [5] BARANIUK R G. More is less: Signal processing and the data deluge[J]. *Science*, 2011, 331(6018): 717–719. doi: [10.1126/science.1197448](https://doi.org/10.1126/science.1197448).
- [6] LASKA J N, KIROLOS S, DUARTE M F, *et al.* Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation[C]. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, New Orleans, USA, 2007*: 1959–1962. doi: [10.1109/ISCAS.2007.378360](https://doi.org/10.1109/ISCAS.2007.378360).
- [7] FARDAD M, SAYEDI S M, and YAZDIAN E. Hardware implementation of iterative method with adaptive thresholding for random sampling recovery of sparse signals[J]. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, 2018, 26(5): 867–877. doi: [10.1109/TVLSI.2018.2791351](https://doi.org/10.1109/TVLSI.2018.2791351).
- [8] REN Shiyu, ZENG Zhimin, GUO Caili, *et al.* A low complexity sensing algorithm for wideband sparse spectra[J]. *IEEE Communications Letters*, 2017, 21(1): 92–95. doi: [10.1109/LCOMM.2016.2616471](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2016.2616471).
- [9] MISHALI M and ELDAR Y C. From theory to practice: Sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals[J].

- IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 375–391. doi: [10.1109/JSTSP.2010.2042414](https://doi.org/10.1109/JSTSP.2010.2042414).
- [10] ADAMS D, ELDAR Y C, and MURMANN B. A mixer front end for a four channel modulated wideband converter with 62-dB blocker rejection[J]. *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 2017, 52(5): 1286–1294. doi: [10.1109/JSSC.2017.2647941](https://doi.org/10.1109/JSSC.2017.2647941).
- [11] LEXA M A, DAVIES M E, and THOMPSON J S. Reconciling compressive sampling systems for spectrally sparse continuous-time signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(1): 155–171. doi: [10.1109/TSP.2011.2169408](https://doi.org/10.1109/TSP.2011.2169408).
- [12] ZHANG Ruoyu, ZHAO Honglin, JIA Shaobo, *et al.* Sparse multi-band signal recovery based on support refining for modulated wideband converter[C]. IEEE 13th International Conference on Signal Processing (ICSP), Chengdu, China, 2016: 304–309. doi: [10.1109/ICSP.2016.7877845](https://doi.org/10.1109/ICSP.2016.7877845).
- [13] COTTER F S, RAO D B, ENGAN K, *et al.* Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2477–2488. doi: [10.1109/TSP.2005.849172](https://doi.org/10.1109/TSP.2005.849172).
- [14] CHEN Jie and HUO Xiaoming. Theoretical results on sparse representations of multiple-measurement vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(12): 4634–4643. doi: [10.1109/TSP.2006.881263](https://doi.org/10.1109/TSP.2006.881263).
- [15] BLANCHARD J D, CERMAK M, HANLE D, *et al.* Greedy algorithms for joint sparse recovery[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(7): 1694–1704. doi: [10.1109/TSP.2014.2301980](https://doi.org/10.1109/TSP.2014.2301980).
- [16] KIM J M, LEE O K, and YE J C. Compressive MUSIC: Revisiting the link between compressive sensing and array signal processing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(1): 278–301. doi: [10.1109/TIT.2011.2171529](https://doi.org/10.1109/TIT.2011.2171529).
- [17] MISHALI M and ELDAR Y C. Reduce and boost: Recovering arbitrary sets of jointly sparse vectors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(10): 4692–4702. doi: [10.1109/TSP.2008.927802](https://doi.org/10.1109/TSP.2008.927802).
- 盖建新: 男, 1980年生, 博士, 副教授, 研究方向为压缩感知、亚奈奎斯特采样理论、频谱感知技术等。
- 杜昊辰: 男, 1991年生, 硕士生, 研究方向为电子与通信工程。
- 刘琦: 男, 1994年生, 硕士生, 研究方向为仪器仪表工程。
- 童子权: 男, 1968年生, 教授, 研究方向为现代电子测量仪器与系统、信号处理等。